

1a. (1+1+1+2 pont) Ird at a kovetkezo egyenleteket elsorende DE rendszerrel!

$$\frac{d^2}{dx^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' - y_2 \\ y_2' y_1 \end{pmatrix}$$

1ab. Oldd meg!  $y' = 3y$ ,  $y(7) = 9$ .

1ac. Fejezd ki a kovetkezo DE megoldasat határozott integralas segitsegevel!  $y' = 3e^{3t^2}$ ,  $y(7) = 9$ .

1b. (2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 + (y_1)^3 \\ 101 - y_2 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

2. (3+4+3 pont)

a)

$$y' = f(x, y) = -y - x + 3;$$

Mennyi  $y''$ ? Ird fel  $y$  masodrendu Talor polinomjat az  $x = 0$  pont korul, ha  $y(0) = 3$ !

b) Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-re  $\Delta x = 0.1$  lepeskozzel az  $y(2) = 3$  kezdeti feltetel mellett!

$$y' = -y - x + 3;$$

Mit josol a ket modszer  $y(2.1)$ -re?

Euler:

Heun:

c) Legyen  $f(x) = 1/x^3 + x$ ,  $x_0 = 4$ . Ird fel  $f$ -nek a linearis  $f(x_0 + \Delta x) \approx T_1(x_0 + \Delta x)$  kozeliteset, ha  $\Delta x = 0.1$ ! Mennyi  $\max_{z \in [x_0, x_0 + \Delta x]} |f''(z)|$ ? Adj nemtrivialis felso korlatot a kozelites  $|\text{hiba}(\Delta x)| = |f(x_0 + \Delta x) - T_1(x_0 + \Delta x)|$  hibajara!

3. (5+2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y_1 + 3y_2 \\ -4y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Keresd meg  $A$  sajatertekeit es sajátvektorait!

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

Szamold ki a DE partikularis megoldasat!

4. (2 + (1 + 2) + 5 pont)

a) Ird at a kovetkezo DE-t idofuggetlen DE rendszerre ( $x$  az ido)!

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy_1 + y_2 \\ y_1 y_2 + x \end{pmatrix}$$

b) Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$L = \sin(y)(y') - (y')^4, \quad M = ((y_1')^2 + (y_2')^2)/2 + y_1' y_1 y_2' y_1$$

c) Legyen adott az  $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^2 - 77(y'(x)) + x^2 y(x) dx$  funkcional a  $[0, 1]$ -en értelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek  $H$  teren. Legyen  $V$  a  $[0, 1]$ -en értelmezett, a vegpontokban eltuno es a  $[0, 1/5]$ ,  $[1/5, 3/5]$ ,  $[3/5, 1]$  intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen  $\phi_1$  es  $\phi_2$  ennek e ternek egy bazisa, ahol  $\phi_1(1/5) = \phi_2(3/5) = 1$  es  $\phi_2(1/5) = \phi_1(3/5) = 0$ . Legyen  $u_h = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2$ . Szamitsd ki az  $S[u_h] = s(c_1, c_2)$  ketváltozos fuggvenyt! (Az harmadik tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert es add is meg a modszer nevet!)