PZh1a, Diff.Egy., 2015.04.02.

1a. (1+1+1+2 pont)

$y' = \frac{2}{1+x^2} - 1.$

Keresd meg a DE fixpontjait!

Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!

Ha $y(0) = 0$, mennyi

$\lim_{x\to\infty} y(x) =$ $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$

Vazold a DE megoldasgorbeit!

1b. (2+3 pont)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2^2 - 9 \\ y_1 - 3 \\ y_3 - 2 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

2. (3+4+1+2 pont)

a)

$$y' = f(x, y) = y^2 x^3$$

Mennyi y'' es y''' ? Ird fel y harmadrendu Talor polinomjat az $x = 2$ pont korul, ha $y(2) = 1$!

b) Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-re $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel, ha

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 + 1 \\ y_1^2 - y_2 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mit josol a ket modszer $\bar{y}(2.1)$-re?

Euler:

Heun:

c) Oldd meg! $y' = 3y,\ y(7) = 9.$

d) Fejezd ki a kovetkezo DE megoldasat hatarozott integralas segitsegevel! $y' = 3e^{3t^2},\ y(7) = 9.$

3. (5+2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y_1 + 3y_2 \\ 3y_1 - 4y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

Mennyi

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \quad ?$$

3. $(1 + (2 + 2) + 5$ pont)

a) $x_0 = 7,\ x_{n+1} = \phi(x_n) = x_n + 7.$ Mennyi x_n ?

b) Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$L = (2y' - 1)^2 - y^4 y', \qquad M = y_1' y_2' + (y_2')^2 + y_1' y_2 - y_1 y_2.$$

c) Legyen adott az $S[u] = \int_0^3 (y'(x))^2 + (1 - x)y(x)\, dx$ funkcional a $[0, 3]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0, 3]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1) = \phi_2(2) = 1$ es $\phi_2(1) = \phi_1(2) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az $(1 - x)y(x)$-os tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert es add is meg a modszer nevet!)