

1a. (1+1+1+2 pont)

$$y' = -y^3 + 4x.$$

Keresd meg a DE fixpontjait!

Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!

Ha  $y(0) = 0.5$ , mennyi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) =$$

Vazold a DE megoldasgorbeit!

1b. (2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_2 - 3)(y_1 - 4) \\ (y_2 - 5)(y_1 - 6) \end{pmatrix}.$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

2. (3+4+3 pont)

a)

$$y' = f(x, y) = -y^2 - x^2;$$

Mennyi  $y''$ ? Ird fel  $y$  masodrendu Talor polinomjat az  $x = 3$  pont korul, ha  $y(3) = 1$ !

b) Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszeret a kovetkezo DE-re  $\Delta x = 0.1$  lepeskozzel az  $y(3) = 1$  kezdeti feltetel mellett!

$$y' = -y^2 - x^2.$$

Mit josol a ket modszer  $y(3.1)$ -re?

Euler:

Heun:

c) Legyen  $f(x) = 1/x^3$ ,  $x_0 = 3$ . Ird fel  $f$ -nek a linearis  $f(x_0 + \Delta x) \approx T_1(x_0 + \Delta x)$  kozeliteset, ha  $\Delta x = 0.1$ ! Mennyi  $\max_{z \in [x_0, x_0 + \Delta x]} |f''(z)|$ ? Adj nemtrivialis felso korlatot a kozelites  $|\text{hiba}(\Delta x)| = |f(x_0 + \Delta x) - T_1(x_0 + \Delta x)|$  hibajara!

3. (5+2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 3y_1 + 4y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Keresd meg  $A$  sajatertekeit es sajatvektorait!

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

Szamold ki a DE partikularis megoldasat!

4. (2 + (1 + 2) + 5 pont)

a)  $x_0 = 8$ ,  $x_{n+1} = \phi(x_n) = x_n + 99$ . Mennyi  $x_n$ ?

b) Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$L = y - y^4, \quad M = (y_1')(y_2')^2/2 + y_1'y_1 + y_2'y_1$$

c) Legyen adott az  $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^2 + (1+x)(y(x))^2 dx$  funkcional a  $[0, 1]$ -en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek  $H$  teren. Legyen  $V$  a  $[0, 1]$ -en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a  $[0, 1/5]$ ,  $[1/5, 3/5]$ ,  $[3/5, 1]$  intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen  $\phi_1$  es  $\phi_2$  ennek a ternek egy bazisa, ahol  $\phi_1(1/5) = \phi_2(3/5) = 1$  es  $\phi_2(1/5) = \phi_1(3/5) = 0$ . Legyen  $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ . Szamitsd ki az  $S[u_h] = s(c_1, c_2)$  ketváltozos fuggvenyt! (Az masodik tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszeret es add is meg a modszer nevet!)