Diff. Egy. Proba Zh2.

1. (a) Legyen $\left(\partial^2_{xx} - \partial^2_{xx} - 3\partial^2_{xt}\right) e^{i(kx-\omega t)} = 0$. Milyen algebrai egyenletet teljesit k es ω?
   Legyen $y'' - 3y' + y = e^{5it}$. Ird fel az egyenlet egy megoldasat!

   (b) Legyen $\partial^2_{xt} e^{i(kx+\omega t)} = 0$. Milyen algebrai egyenletet teljesit k es ω? Keresd meg az egyenlet megoldasait!

2. (a)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y_1 \\ 4y_1 + 4y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Mennyi e^{tA} ? Ird fel a DE partikularis megoldasat!

   (b)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y_1 - 4y_2 \\ 4y_1 + 5y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait! Ird fel a DE altalanos megoldasat! Mennyi e^{tA} ? Ird fel a DE partikularis megoldasat e^{tA} segitsegevel!

3. (a) $y_t(t,x) = y_{xx}(t,x),\ y(0,x) = \cos(7x)$. Mennyi $y(t,x)$?

   (b) $y_{tt}(t,x) = y_{xx}(t,x),\ y(0,x) = \cos(7x),\ y'(0,x) = \sin(5x)$. Mennyi $y(t,x)$?

4. (a) Legyen

$$\phi(0,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \phi_t(0,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2|n|} \frac{1}{n^8} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\phi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \partial_{tt}\phi(t,x) = \frac{1}{4}\partial^2_{xx}\phi(t,x).$$

   Ird fel a $c_n(t)$ fuggvenyekre vonatkozo kozonseges DE-ket (kezdeti feltetellel egyutt)!

   (b) Legyen

$$\phi(0,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \phi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(t) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \partial_t\phi(t,x) = \frac{1}{2}\partial^2_{xx}\phi(t,x).$$

   Ird fel a $d_n(t)$ fuggvenyekre vonatkozo kozonseges DE-ket (kezdeti feltetellel egyutt)!

5. (a)
   - Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 1-2i \\ -i-1 & -3 \end{pmatrix}.$$

     Mennyi A^* ?
   - Mennyi a $v = (2+3i, 4-i)^T$ es a $w = (4, i)^T$ vektorok belso szorzata?
   - Legyen $f_1 = (\sin(30^\circ, i\cos(30^\circ)^T$, $f_2 = (\cos(30^\circ, z)^T$ egy ortonormalt bazis. Mennyi z ?
   - A $v = (5,6)^T$ vektor kifejezheto az f-ek linearis $\alpha f_1 + \beta f_2$ kombinaciojakent! Mennyi α ?

   (b)
   - Legyen $f(x) = \sin(4x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, ha $x \in (-\pi, \pi)$ Mennyi $\hat{f}_2$ es $\hat{f}_4$?
   - Legyen $f(x) = H(t-1)H(2-t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, ha $x \in (-\pi, \pi)$ Mennyi $\hat{f}_2$ es $\hat{f}_3$?
   - Legyen $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le \pi$, maskulonben nulla. Ha $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipx}\, dx$, akkor mennyi $\hat{f}(1)$?

6. (a)
   - Oldd meg! $y'' - 25y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
   - Oldd meg! $G'' - 25G = \delta$, es $G(t) = 0$ negativ t-kre.
   - Ird fel G segitsegevel az $y'' - 25y = f(t)$ egyenlet megoldasat, ha $y(t) = f(t) = 0$ negativ t-kre!

   (b)
   - Oldd meg! $y'' + 25y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
   - Oldd meg! $G'' + 25G = \delta$, es $G(t) = 0$ negativ t-kre.
   - Ird fel G segitsegevel az $y'' + 25y = f(t)$ egyenlet megoldasat, ha $y(t) = f(t) = 0$ negativ t-kre!

7. (a)
   - Oldd meg! $y' - 25y = 0,\ y(0) = 1.$
   - Oldd meg! $G' - 25G = \delta$, es $G(t) = 0$ negativ t-kre.
   - Ird fel G segitsegevel az $y' - 25y = f(t)$ egyenlet megoldasat, ha $y(t) = f(t) = 0$ negativ t-kre!

8. (a)
   - Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan: $\mathcal{L}(\sin(2t))$
   - Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan: $\mathcal{L}(H(-t+4)e^{-5t})$
   - Szamold ki az $f(t) = H(t-3)$ es a $g(t) = e^{5t}$ fuggvenyek $h = f * g$ konvoluciojat!
   - Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$?

   (b)
   - Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan: $\mathcal{L}(tH(t-2))$
   - Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan: $\mathcal{L}(H(-t-4)e^{-5t})$
   - Szamold ki az $f(t) = \sin(t)$ es a $g(t) = e^{5t}$ fuggvenyek $h = f * g$ konvoluciojat!
   - Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$?

9. (a) $y' - 4y = 3,\ y(0) = 2.$
   - Szamold ki $y(t)$-nek az $Y(s)$ Laplace transzformaltjat!
   - Szamold ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasat!
   - Mennyi $\mathcal{L}^{-1}(Y(s))$?
   - Mennyi $y(t)$?

10. (a) $y'' - 4y = 3,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 20$
   - Szamold ki $y(t)$-nek az $Y(s)$ Laplace transzformaltjat!
   - Szamold ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasanak a strukturajat!
   - Mennyi $y(t)$?

   (b) $y'' + 4y = 3,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 20$
   - Szamold ki $y(t)$-nek az $Y(s)$ Laplace transzformaltjat!
   - Ird fel $Y(s)$ parcialis tort felbontasanak a strukturajat!
   - Mennyi $\mathcal{L}^{-1}(Y(s))$?
   - Mennyi $y(t)$?

11. (a) Oldd meg: $y'' - 25y = 0,\ y(0) = 10,\ y'(0) = 20.$

   (b) Oldd meg az allando varialasanak a modszerevel: $y' + 3y = 5.$