Zh2, Diff.Egy., 2017.05.05. NEPTUN: Név:

Aláírás:

1. (2+1+3+3+1 pont)
Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan a kovetkezoket:
a) $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(e^{-2t+7})$.
$F(s)=$ $\int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-2t+7} dt = e^7 \int_0^\infty e^{-(s+2)t} dt = e^7 \cdot \frac{e^{-(s+2)t}}{-(s+2)} \Big|_0^\infty$

$= e^7 \cdot 0 - \frac{e^7}{-(s+2)} = \frac{e^7}{s+2}$

2p

Esetunkben milyen s eseten letezik a Laplace transzformaciot definialo impropius integral?

$Re(s) > -2$

1p

$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(H(-2t+3)e^{-5t})$ (Itt H a Heaviside fuggveny.)
$F(s)=$ $\int_0^\infty e^{-st} H(-2t+3) e^{-5t} dt = \int_0^{3/2} e^{-(s+5)t} dt = \frac{e^{-(s+5)t}}{-(s+5)} \Big|_0^{3/2}$

$= - \frac{e^{(s+5)\cdot\frac{3}{2}}}{(s+5} + \frac{1}{s+5}$

3p

b) Szamold ki az $f(t) = 4t^2$ es a $g(t) = -5$ fuggvenyek $h = f * g$ konvoluciojat!

$h(t) = \int_0^t 4(t-\tau)^2 \cdot (-5) d\tau = \int_0^t -5 \cdot 4 \tau^2 d\tau = -20 \frac{t^3}{3}$

g*f

3p

Megj: itt f, g, csak t>0-ra lennének definiálva.
A valós egyenesen $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau$, esetünkben ez nem létezik. Ha valaki ezt írta, az helyes megoldásnak számít!

Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$? $= 0$

Mivel $\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$

1p

3 +3 +4

4. ([redacted]+3+5 pont)

A) Legyen $(2\partial_{xx}^2 - 3\partial_{tt}^2 + 4\partial_{xt}^2)\, e^{i(kx+\omega t)} = 0$. Milyen algebrai egyenletet teljesit k es ω?

$$2(ik)^2 - 3(i\omega)^2 - 4(i\omega)(ik) = 0$$

$$-2k^2 + 3\omega^2 + 4\omega k = 0$$

B) Legyen

$$\partial_t\phi(t,x) = \partial_x^2\phi(t,x), \quad \phi(t, x+\pi) = \phi(t,x), \quad \phi(0,x) = f(x),$$

ahol $f(x) = 5$, ha $x \in [2,3]$, amugy 0 a $[0,\pi]$ intervalum tobbi reszen.

1. Ird fel egy ortonormalt bazist $L^2([0,\pi], dx)$-nek!

pl.:

$$e_n(x) = \frac{e^{i2nx}}{\sqrt{\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. Mennyi $\phi(t,x)$?

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{e^{i2nx}}{\sqrt{\pi}}\right) = -4n^2 \cdot \left(\frac{e^{i2nx}}{\sqrt{\pi}}\right)$$

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot \frac{e^{i2nx}}{\sqrt{\pi}}, \quad \text{ahol } \hat{f}_n = (e_n, f) = \int_0^\pi \frac{e^{-i2nx}}{\sqrt{\pi}} \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_2^3 \frac{5}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-i2nx}\, dx = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-i2n\cdot 3} - e^{-i2n\cdot 2}}{-i\cdot 2n}$$

$$\varphi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot e^{-4n^2 t} \cdot \frac{e^{i2nx}}{\sqrt{\pi}} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{5}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-i2n\cdot 3} - e^{-i2n\cdot 2}}{-i\cdot 2n} \cdot e^{-4n^2 t} \cdot \frac{e^{i2nx}}{\sqrt{\pi}}$$

2. (4+(3+1+2) pont)
A) Veges differenciak.
Keress numerikus egyenleteket a kovetkezo DE kozelito megoldasara:

$$u''(x) + xu(x) = x(1-x), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Approximaljuk az u fuggvenyt a kovetkezo vektorral: $\vec{u}_i = u(i\Delta x)$, $i = 1, \ldots, 4$, $\Delta x = 1/5$.

1 • Kozelitsd $u''(x)$-t az $u(x \pm \Delta x), u(x)$ ertekek segitsegevel!

$$U''(x) = \frac{1}{\Delta x^2}\left(U(x+\Delta x) - 2U(x) + U(x-\Delta x)\right)$$

3 • Ird fel az ennek megfelelo veges differencias kozeliteset a DE-nek mint egy inhom.lin. egyenletet a $\vec{u}$ vektorra!

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{\frac{d^2}{dx^2}}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1\Delta x & & & \\ & 2\Delta x & & \\ & & 3\Delta x & \\ & & & 4\Delta x \end{bmatrix}}_{x\cdot}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\Delta x(1-1\cdot\Delta x) \\ 2\Delta x(1-2\Delta x) \\ 3\Delta x(1-3\Delta x) \\ 4\Delta x(1-4\Delta x) \end{bmatrix}$$

B) Veges elemek, variacios elv.
Oszd fel a $[0, 1]$ intervallumot 4 reszre a kovetkezo pontokkal: $x_i = 0.3,\ 0.5,\ 0.7$. Legyen $v(x)$ az a folytonos fuggveny, amelyik affine az alintervallumokon es az ertekei az $x = 0,\ 0.2,\ 0.5,\ 0.8,\ 1$ pontokban a kovetkezoek: $0, v_1, v_2, v_3, 0$.

1 • 3 Szamitsd ki, mennyi

$$Energy[v] = \int_0^1 (v')^2 - x(1-x)v\, dx$$

kozelitoleg vagy pontosan! Kozelito szamitas eseten add meg, hogy milyen kozelitest hasznaltal!

2 • 1 Ird fel az EL egyenleteket az $Energy[u]$ funkcionalra!

3 • 2 Ird fel az igy kapott DE gyenge megfogalmazasat!

) Közelítő számítás, középpont módszer: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(n+\frac{1}{2}\Delta x)\cdot\Delta x$, ahol $\Delta x = \frac{b-a}{N}$

$$nergy[V] \approx 0.3\cdot\left(\frac{V_1-0}{0.3}\right)^2 + 0.2\left(\frac{V_2-V_1}{0.2}\right)^2 + 0.2\left(\frac{V_3-V_1}{0.2}\right)^2 + 0.3\left(\frac{0-V_3}{0.3}\right)^2$$
$$-\left(\frac{0+0.3}{2}\right)\left(1-\frac{0+0.3}{2}\right)\cdot\left(\frac{0+V_1}{2}\right)\cdot 0.3 - \left(\frac{0.3+0.5}{2}\right)\left(1-\frac{0.3+0.5}{2}\right)\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)\cdot 0.2$$
$$-\left(\frac{0.5+0.8}{2}\right)\left(1-\frac{0.5+0.8}{2}\right)\left(\frac{V_2+V_3}{2}\right)\cdot 0.2 - \left(\frac{0.8+1}{2}\right)\left(1-\frac{0.8+1}{2}\right)\left(\frac{V_3+0}{2}\right)\cdot 0.3$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 = \frac{d}{dx}(2u') - (-x(1-x)) = 2u'' + x(1-x) = 0$$

$$\int_0^1 \varphi(x)\cdot\left[2u'' + x(1-x)\right]dx = \int_0^1 -2\varphi' u' + \varphi\cdot x(1-x)\,dx = 0$$

"bármely" olyan φ-re, amire $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$

3. (5×2 pont)

$y'' + 4y' + 8y = 5t^3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. Mennyi $Y(s)$? ($\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$)

$$(s^2 Y(s) - 2s - 3) + 4(sY(s) - 2) + 8Y(s) = 5 \cdot \frac{6}{s^4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+8} \cdot \left(2s + 11 + \frac{30}{s^4}\right)$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm 2i$$

Oldd meg a $G'' + 4G' + 8G = \delta(t)$ egyenletet, ahol $G(t) = 0$, ha $t < 0$!

$$G(0^+) = 0 \;\Big|\; G'(0^+) = 1 \;\Big|\; G''(t) + 4G'(t) + 8G(t) = 0, \text{ ha } t > 0$$

$$\Downarrow$$

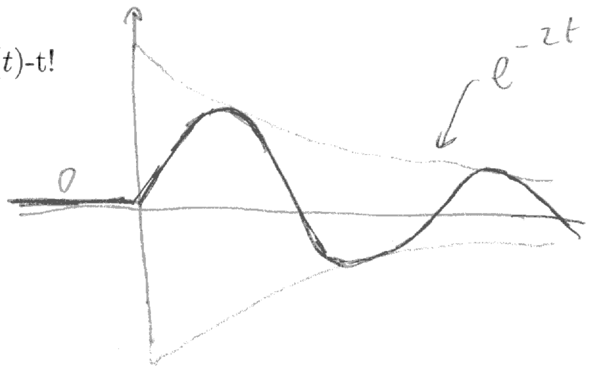
$$G(t) = C_1 e^{(-2+2i)t} + C_2 e^{(-2-2i)t} = e^{-2t}(K_1 \cos(2t) + K_2 \sin(2t))$$

$K_1 = 0$, mivel $G(0^+) = 0$,

$K_2 = \frac{1}{2}$, mivel $G'(0^+) = 1$

$$G(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-2t} \sin 2t, & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

Rajzold le $G(t)$-t!



Írd fel a $y'' + 4y' + 8y = f(t)$ egyenlet megoldasat, ha $y(t) = f(t) = 0$ amikor $t < 0$!

$$y(t) = \int_0^{\infty} G(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^{t} \frac{1}{2} e^{-2(t-\tau)} \sin(2(t-\tau)) f(\tau) d\tau$$

Szamitsd ki az $\mathbb{R}$-en adott $H(t)H(1-t)$ fuggveny Fourier transzformaltjat!

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipt} H(t) H(t-1)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-ipt}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-ip} e^{-ipt} \Big|_0^1 = \frac{i}{\sqrt{2\pi}\, p} \left(e^{-ip} - 1\right)$$