Max. pontszám: 38 pont
4A: extra 2 pont

4. (2+2+3+3 pont)

A) Legyen $(\partial_{xx}^2 - 6\partial_{tt}^2 - \partial_{xt}^2)\,\phi(x,t) = 0$.

1. Keresd meg a PDE halado-hullam megoldasait!

2. Milyen sebesseggel mozog a hátrafele, illetve az előrefele mozgo halado-hullam?

$y = f(x - vt) \qquad f'' - 6v^2 f'' + v f'' = 0 \qquad 1 - 6v^2 + v = 0 \qquad 6v^2 - v - 1 = 0$

$$v_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm 5}{12} = \frac{1}{2}, \; -\frac{1}{3}$$

előre: $\frac{1}{2}$ hátra: $-\frac{1}{3}$

B) Legyen

$$\partial_t \phi(t,x) = \partial_x^2 \phi(t,x), \quad \phi(t, x+5) = \phi(t,x), \quad \phi(0,x) = f(x),$$

ahol $f(x) = 2019$.

1. Ird fel egy ortonormalt bazist $L^2([0,5], dx)$-nek!

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{in\frac{x \cdot 2\pi}{5}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. Szamold ki f ezen bazis szerinti kifejteset!

$$f(x) = 2019 = 2019 \cdot \sqrt{5} \cdot e_0 = 2019 \cdot \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 1\right)$$

3. Mennyi $\phi(t,x)$? Hasznalj Fourier sort ϕ kifejezesere (ha muszaj)!

$\varphi(x,t) = 2019$

39

Zh2, Diff.Egy., 2019.05.03 NEPTUN: Név:

Aláírás:

1. (4+4+2 pont)
Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan a kovetkezoket:
a) $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(2 + e^{4t}))$.
$F(s)$=

$$\frac{2}{s} + \frac{1}{s-4}$$

Esetunkben milyen s eseten letezik a Laplace transzformaciot definialo impropius integral?

$$\mathrm{Re}\ s > 4$$

b) Szamold ki az $f(t) = 2$ es a $g(t) = t^2 - e^{-t}$ fuggvenyek $h = f \star g$ konvoluciojat!

$$\int_0^t 2(\tau^2 - e^{-\tau})\,d\tau = 2\frac{t^3}{3} - 2\left[\frac{e^{-\tau}}{-1}\right]_0^t = \frac{2t^3}{3} - 2(-e^{-t}+1) = \frac{2t^3}{3} + 2e^{-t} - 2$$

Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$?

$$0$$

c) $a_{n+1} = 55a_n - 112$, $a_0 = 78$. Mennyi a sorozat altalanos a_n tagja?

$$a_{fix} = \frac{112}{54}$$

$$a_n = 55^n\left(78 - \frac{112}{54}\right) + \frac{112}{54}$$

$$= \frac{56}{27}$$

3. ((2+2+1)+2+3 pont) $= 5t^2 - 40t + 80$

A) $y'' - 3y' + 2y = 5(t-4)^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. Mennyi $Y(s)$? ($\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$)

$$[s^2 Y(s) - s \cdot 2 - 3] - 3[sY(s) - 2] + 2Y(s) = 5 \cdot \frac{2}{s^3} - 40 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{80}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}\left[2s - 3 + \frac{10}{s^3} - \frac{40}{s^2} + \frac{80}{s}\right]$$

Hogy nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa?

$$Y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s^2} + \frac{E}{s}$$

Mennyi $y(t)$?

$$y(t) = Ae^{+2t} + Be^{1t} + \frac{C}{2}t^2 + Dt + E$$

B) Legyen $f(x) = e^{-x}$. Ird fel f linearis approximaciojat az $x_0 = 1$ pont korul! Adj minel pontosabb felso korlatot a linearis approximacio hibajara, vagyis $|f(1+\Delta x) - f(1) - f'(1)\Delta x|$-re, ha $\Delta x \in [0, 0.1]$!

$$err \leq \frac{1}{2}\Delta x^2 \cdot \max_{x \in [1, 1.1]} |(e^{-x})''| = \frac{1}{2}\Delta x^2 \cdot e^{-1}$$

$$f(1+\Delta x) \approx e^{-1} + (-e^{-1})\Delta x$$

C) Legyen $y'(t) = (y(t) + 2)(t+3)$, $y(1) = 2$. Ird fel $y(1+\Delta t)$ masodrendu Taylor polinomjat!

$y(1) = 2$

$y'(1) = (2+2)(1+3) = 16$

$y'' = (\partial_t + (y+2)(t+3)\partial_y)[(y+2)(t+3)] = (y+2) + (y+2)(t+3)(t+3) =$

$= (y+2)[1 + (t+3)^2]$

$y''(1) = (2+2)[1 + (1+3)^2] = 68$

$y(1+\Delta t) \approx 2 + 16\Delta t + \frac{68}{2}\Delta t^2$

$\frac{68}{2} = 34$

2. ((1+3)+(3+3) pont)
A)

$$u''(x) + xu'(x) = 93, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Approximaljuk az u fuggvenyt a kovetkezo vektorral: $\vec{u}_i = u(i\Delta x)$, $i = 1, \ldots, 3$, $\Delta x = 1/4$.

- Kozelitsd $u''(x)$-t az $u(x \pm \Delta x), u(x)$ ertekek segitsegevel!

$$\frac{1}{\Delta x^2}\Big(U(x+\Delta x) - 2U(x) + U(x-\Delta x)\Big)$$

- Ird fel az ennek megfelelo veges differencias kozeliteset a DE-nek mint egy inhom.lin. egyenletet a $\vec{u}$ vektorra!

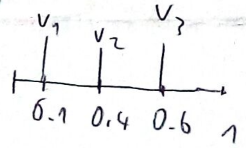
$$\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1\Delta x & & \\ & 2\Delta x & \\ & & 3\Delta x \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93 \\ 93 \\ 93 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2\Delta x}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

B) Veges elemek, variacios elv.
Oszd fel a $[0, 1]$ intervallumot 4 reszre a kovetkezo pontokkal: $x_i = 0.1, 0.4, 0.6$. Legyen $v(x)$ az a folytonos fuggveny, amelyik affine az alintervallumokon es az ertekei az $x = 0, 0.1, 0.4, 0.6, 1$ pontokban a kovetkezoek: $0, v_1, v_2, v_3, 0$.

- Szamitsd ki, mennyi

$$Energy[v] = \int_0^1 2(v' - 3)^2 - (x^2 + 1)v\, dx$$



kozelitoleg vagy pontosan! Kozelito szamitas eseten add meg, hogy milyen kozelitest hasznaltal!

- Ird fel az EL egyenleteket az $Energy[u]$ funkcionalra!

$$2\left(\frac{v_1-0}{0.1} - 3\right)^2 \cdot 0.1 + 2\left(\frac{v_2-v_1}{0.3} - 3\right)^2 \cdot 0.3 + 2\left(\frac{v_3-v_2}{0.2} - 3\right)^2 \cdot 0.2 + 2\left(\frac{0-v_3}{0.4} - 3\right)^2 \cdot 0.4$$

Középpont

$$+ \left(0.05^2+1\right)\left(\frac{0+v_1}{2}\right) \cdot 0.1 + \left(0.25^2+1\right)\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) 0.3 + \left(0.5^2+1\right)\left(\frac{v_2+v_3}{2}\right) 0.2 + \left(0.8^2+1\right)\left(\frac{v_3+0}{2}\right) 0.4$$

$$\frac{d}{dx}\, 4(v'-3) - \left(-(x^2+1)\right) = 0$$

$$4v'' + (x^2+1) = 0$$