4. (2+2+3+3 pont)
A) Legyen $\left(\partial^2_{xx} - 6\partial^2_{tt} - \partial^2_{xt}\right)\phi(x,t) = 0$.
1. Keresd meg a PDE halado-hullam megoldasait!
2. Milyen sebesseggel mozog a hátrafele, illetve az előrefele mozgo halado-hullam?

B) Legyen

$$\partial_t\phi(t,x) = \partial^2_x\phi(t,x), \quad \phi(t,x+5) = \phi(t,x), \quad \phi(0,x) = f(x),$$

ahol $f(x) = 2019$.
1. Ird fel egy ortonormalt bazist $L^2([0,5],dx)$-nek!

2. Szamold ki f ezen bazis szerinti kifejteset!

3. Mennyi $\phi(t,x)$? Hasznalj Fourier sort ϕ kifejezesere (ha muszaj)!

---

1. (4+4+2 pont)
Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan a kovetkezoket:
a) $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(2 + e^{4t})$.
$F(s)=$

Esetunkben milyen s eseten letezik a Laplace transzformaciot definialo impropius integral?

b) Szamold ki az $f(t) = 0$ es a $g(t) = t^3 - e^{-t^2}$ fuggvenyek $h = f * g$ konvoluciojat!

Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$?

c) $a_{n+1} = 55a_n - 112, \;\; a_0 = 78$. Mennyi a sorozat altalanos a_n tagja?

---

2. ((1+3)+(3+3) pont)
A)

$$u''(x) + xu'(x) = 93, \;\; u(0) = u(1) = 0.$$

Approximaljuk az u fuggvenyt a kovetkezo vektorral: $\vec{u}_i = u(i\Delta x), \; i = 1,\ldots,3, \; \Delta x = 1/4$.

- Kozelitsd $u''(x)$-t az $u(x \pm \Delta x), u(x)$ ertekek segitsegevel!
- Ird fel az ennek megfelelo veges differencias kozeliteset a DE-nek mint egy inhom.lin. egyenletet a $\vec{u}$ vektorra!

B) Veges elemek, variacios elv.
Oszd fel a $[0,1]$ intervallumot 4 reszre a kovetkezo pontokkal: $x_i = 0.1,\, 0.4,\, 0.6$. Legyen $v(x)$ az a folytonos fuggveny, amelyik affine az alintervallumokon es az ertekei az $x = 0,\, 0.1,\, 0.4,\, 0.6,\, 1$ pontokban a kovetkezoek: $0, v_1, v_2, v_3, 0$.

- Szamitsd ki, mennyi
$$Energy[v] = \int_0^1 2(v' - 3)^2 - (x^2+1)v\, dx$$
kozelitoleg vagy pontosan! Kozelito szamitas eseten add meg, hogy milyen kozelitest hasznaltal!
- Ird fel az EL egyenleteket az $Energy[u]$ funkcionalra!

---

3. ((2+2+1)+2+3 pont)
A) $y'' - 3y' + 2y = 5(t-4)^2, \; y(0) = 2, \; y'(0) = 3$. Mennyi $Y(s)$? $(\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}})$

Hogy nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa?

Mennyi $y(t)$?

B) Legyen $f(x) = e^{-x}$. Ird fel f linearis approximaciojat az $x_0 = 1$ pont korul! Adj minel pontosabb felso korlatot a linearis approximacio hibajara, vagyis $|f(1+\Delta x) - f(1) - f'(1)\Delta x|$-re, ha $\Delta x \in [0, 0.1]$!

C) Legyen $y'(t) = (y(t)+2)(t+3), \;\; y(1) = 2$. Ird fel $y(1+\Delta t)$ masodrendu Taylor polinomjat!