Zh2, Diff.Egy., 2018.05.02. NEPTUN: Név:

Aláírás:

1. (4+4+2 pont)

Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan a kovetkezoket:

a) $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(-2t+7))$.

$F(s)=$ $\int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{2i}\left(e^{i(-2t+7)} - e^{-i(-2t+7)}\right)dt = \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{7i}\cdot e^{-(s+2i)t} - e^{-7i}e^{-(s-2i)t}\,dt$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{7i}\cdot\frac{1}{s+2i} - e^{-7i}\frac{1}{s-2i}\right]$$

Esetunkben milyen s eseten letezik a Laplace transzformaciot definialo impropius integral?

$\mathrm{Re}(s) > 0$

b) Szamold ki az $f(t) = t-1$ es a $g(t) = t$ fuggvenyek $h = f * g$ konvoluciojat!

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t (t-\tau-1)\tau\,d\tau = \int_0^t t\tau - \tau^2 - \tau\,d\tau =$$

$$= (t-1)\cdot\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t - \left[\frac{\tau^3}{3}\right]_0^t = (t-1)\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2$$

Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$?

$= 0$

Vagy $\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)\cdot\frac{1}{s^2} - \left[\frac{1}{6}\cdot\frac{3!}{s^4} - \frac{1}{2}\frac{2!}{s^3}\right] = 0$

c) $a_{n+1} = 7a_n - 8$, $a_0 = 78$. Mennyi a sorozat altalanos a_n tagja?

Az $f(x) = 7x-8$ leképezés fixpontja: $x_{fix} = 7x_{fix} - 8 \implies x_{fix} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$$a_n = 7^n\cdot\left[78 - \frac{4}{3}\right] + \frac{4}{3}$$

2. ((1+3)+(3+3) pont)
A) Veges differenciak.
Keress numerikus egyenleteket a kovetkezo DE kozelito megoldasara:

$$u''(x) + (1 - x)u(x) = 2x, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Approximaljuk az u fuggvenyt a kovetkezo vektorral: $\vec{u}_i = u(i\Delta x)$, $i = 1, \ldots, 3$, $\Delta x = 1/4$.

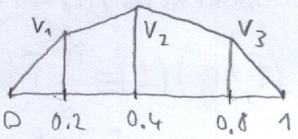
- Kozelitsd $u''(x)$-t az $u(x \pm \Delta x), u(x)$ ertekek segitsegevel!

$$u''(x) \approx \frac{1}{\Delta x^2}\left[u(x-\Delta x) - 2u(x) + u(x+\Delta x)\right]$$

- Ird fel az ennek megfelelo veges differencias kozeliteset a DE-nek mint egy inhom.lin. egyenletet a $\vec{u}$ vektorra!

$$\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1-\Delta x & 0 & 0\\ 0 & 1-2\Delta x & 0\\ 0 & 0 & 1-3\Delta x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix}1\cdot\Delta x\\ 2\cdot\Delta x\\ 3\cdot\Delta x\end{bmatrix} = \Delta x\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 6\end{bmatrix}$$

B) Veges elemek, variacios elv.
Oszd fel a $[0, 1]$ intervallumot 4 reszre a kovetkezo pontokkal: $x_i = 0.2, 0.4, 0.8$. Legyen $v(x)$ az a folytonos fuggveny, amelyik affine az alintervallumokon es az ertekei az $x = 0, 0.2, 0.4, 0.8, 1$ pontokban a kovetkezoek: $0, v_1, v_2, v_3, 0$.



- Szamitsd ki, mennyi

$$Energy[v] = \int_0^1 2(v')^2 - v' - (x^2 - 1)v\,dx$$

kozelitoleg vagy pontosan! Kozelito szamitas eseten add meg, hogy milyen kozelitest hasznaltal!

- Ird fel az EL egyenleteket az $Energy[u]$ funkcionalra!

$$\begin{aligned} Energy[V] = & \left[2\cdot\left(\frac{V_1-0}{0.2}\right)^2 - \left(\frac{V_1-0}{0.2}\right) - \left(\left(\frac{0+0.2}{2}\right)^2 - 1\right)\cdot\left(\frac{0+V_1}{2}\right)\right]\cdot 0.2 \\ & + \left[2\cdot\left(\frac{V_2-V_1}{0.2}\right)^2 - \left(\frac{V_2-V_1}{0.2}\right) - \left(\left(\frac{0.2+0.4}{2}\right)^2 - 1\right)\cdot\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)\right]\cdot 0.2 \\ & + \left[2\cdot\left(\frac{V_3-V_2}{0.4}\right)^2 - \left(\frac{V_3-V_2}{0.4}\right) - \left(\left(\frac{0.4+0.8}{2}\right)^2 - 1\right)\cdot\left(\frac{V_2+V_3}{2}\right)\right]\cdot 0.4 \\ & + \left[2\cdot\left(\frac{0-V_3}{0.2}\right)^2 - \left(\frac{0-V_3}{0.2}\right) - \left(\left(\frac{0.8+1}{2}\right)^2 - 1\right)\cdot\left(\frac{V_3+0}{2}\right)\right]\cdot 0.2 \end{aligned}$$

Az (x^2-1) és $v(x)$ függvények értékei az intervallumok középpontjaiban

Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0$$

$$\frac{d}{dx}(4v' - 1) - (-(x^2-1))\cdot 1 = 0$$

$$4v''(x) + x^2 - 1 = 0$$

3. ((2+2+1)+2+3 pont)

A) $y'' + 4y' + 8y = 5t^3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. Mennyi $Y(s)$? ($\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$)

$$(s^2 Y(s) - 2s - 3) + 4(sY(s) - 2) + 8Y(s) = 5 \cdot \frac{3!}{s^4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+8}\left[\underbrace{2s+3+8}_{11} + \overbrace{5 \cdot 3!}^{30}\frac{1}{s^4}\right]$$

Hogy nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa? $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = -2 \pm 2i$

$$Y(s) = \frac{A}{s-(-2+2i)} + \frac{B}{s-(-2-2i)} + \frac{C}{s^4} + \frac{D}{s^3} + \frac{E}{s^2} + \frac{F}{s}$$

Mennyi $y(t)$?

$$y(t) = A e^{(-2+2i)t} + B e^{(-2-2i)t} + \frac{1}{3!} C \cdot t^3 + \frac{1}{2!} D t^2 + E t + F$$

B) Legyen $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Ird fel f linearis approximaciojat az $x_0 = 8$ pont korul! Adj minel pontosabb felso korlatot a linearis approximacio hibajara, vagyis $|f(8 + \Delta x) - f(8) - f'(8)\Delta x|$-re, ha $\Delta x \in [0, 0.1]$!

$$f(8+\Delta x) \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3} 8^{-2/3} \cdot \Delta x = 2 + \frac{1}{3 \cdot 4} \Delta x$$

$$|hiba(\Delta x)| \leq \frac{1}{2} \Delta x^2 \cdot \max_{z \in [8, 8+\Delta x]} |f''(z)| = \frac{1}{2} \Delta x^2 \cdot \left|\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 8^{-5/3}\right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^5} \Delta x^2 = \frac{1}{9 \cdot 32} \Delta x^2$$

288

C) Legyen $y'(t) = (2 + y(t))(3 + t)$, $y(1) = 2$. Ird fel $y(1 + \Delta t)$ harmadrendu Taylor polinomjat!

$$y'' = [\partial_t + (2+y)(3+t)\partial_y][(2+y)(3+t)] = (2+y) + (2+y)(3+t) \cdot (3+t)$$

$$= [(3+t)^2 + 1](2+y)$$

$$y''' = [\partial_t + (2+y)(3+t)\partial_y]\{[(3+t)^2+1](2+y)\} = (2+y) \cdot 2 \cdot (3+t) + (2+y)(3+t) \cdot [(3+t)^2+1]$$

$$= (2+y)\left[(3+t)\left[2 + [(3+t)^2+1]\right]\right]$$

$y(1) = 2$, $y'(1) = (2+2) \cdot (3+1) = 16$, $y''(1) = [(3+1)^2+1](2+2) = 17 \cdot 4 = 68$

$$y'''(1) = (2+2) \cdot [(3+1)[2 + [(3+1)^2+1]]] = 4 \cdot 4 \cdot 19 = 304$$

$$y(1+\Delta t) \approx 2 + 16\Delta t + \frac{68}{2!}\Delta t^2 + \frac{304}{3!}\Delta t^3 = 2 + 16\Delta t + 34\Delta t^2 + \frac{152}{3}\Delta t^3$$

4. (2+2+3+3 pont)

A) Legyen $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 9\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) e^{i(kx+\omega t)} = 0$. Milyen algebrai egyenletet teljesit k es ω? Mekkora sebesseggel mozog egy ilyen sikhullam?

$$(ik)^2 - 9(i\omega)^2 = 0 \Rightarrow \omega = \pm\frac{1}{3}k$$

Tehát $e^{i(kx+\omega t)} = e^{i|k|(\pm x \pm \frac{1}{3}t)}$, így a hullám sebessége $\frac{1}{3}$.

(Mivel $\varphi(t,x) = f(x - vt)$ egy v sebességgel haladó hullámfrontot ír le.)

B) Legyen

$$\partial_t \phi(t,x) = \partial_x^2 \phi(t,x), \quad \phi(t,x+5) = \phi(t,x), \quad \phi(0,x) = f(x),$$

ahol $f(x) = 5$, ha $x \in [0,1]$, amugy 0 a $[0,5]$ intervallum tobbi reszen.

1. Ird fel egy ortonormalt bazist $L^2([0,5], dx)$-nek!

$$\vec{e}_n = e_n(x) = \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}nx}}{\sqrt{5}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. Szamold ki f ezen bazis szerinti kifejteset!

$$\hat{f}_n = (\vec{e}_n, \vec{f}) = \int_0^5 \frac{e^{-i\frac{2\pi}{5}nx}}{\sqrt{5}} \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-i\frac{2\pi}{5}nx}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{-i\cdot\frac{2\pi}{5}n}\cdot e^{-i\frac{2\pi}{5}nx}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot i\cdot\frac{5}{2\pi n}\cdot\left[e^{-i\frac{2\pi}{5}n} - 1\right]$$

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot \vec{e}_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}nx}}{\sqrt{5}}$$

3. Mennyi $\phi(t,x)$? Hasznalj Fourier sort ϕ kifejezesere!

$$\partial_x^2 \vec{e}_n = \partial_x^2 \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}nx}}{\sqrt{5}} = \left(i\frac{2\pi}{5}n\right)^2 \cdot \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}nx}}{\sqrt{5}} = -\left(\frac{2\pi}{5}n\right)^2 \cdot \vec{e}_n$$

Így $\varphi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot e^{-\left(\frac{2\pi}{5}n\right)^2\cdot t} \cdot \frac{e^{i\frac{2\pi}{5}nx}}{\sqrt{5}}$