PZh2, Diff.Egy., 2018.05.16. NEPTUN: Név:

Aláírás:

1. (4+4+2 pont)

Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan a kovetkezoket: $\mathrm{sgn}(-2t+4) = \begin{cases} +1, & \text{ha } t<2 \\ -1, & \text{ha } t>2 \end{cases}$

a) $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\mathrm{sgn}(-2t+4))$.

$F(s)=$ $\int_0^2 e^{-st}\cdot(+1)\,dt + \int_2^\infty e^{-st}\cdot(-1)\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^2 - \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_2^\infty$

$$=\left(\frac{e^{-2s}}{-s} - \frac{1}{-s}\right) - \left(\frac{0}{-s} - \frac{e^{-2s}}{-s}\right) = \frac{1}{s} - 2\cdot\frac{e^{-2s}}{s} = \frac{1}{s}\left(1-2\cdot e^{-2s}\right)$$

Esetunkben milyen s eseten letezik a Laplace transzformaciot definialo impropius integral?

$\mathrm{Re}(s) > 0$

b) Szamold ki az $f(t) = -1$ es a $g(t) = t^2$ fuggvenyek $h = f * g$ konvoluciojat!

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t -1\cdot\tau^2\,d\tau = -\left[\frac{\tau^3}{3}\right]_0^t = -\frac{t^3}{3}$$

Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$? $= 0$

Vagy $-\frac{1}{s}\cdot\frac{2!}{s^{2+1}} - \left(-\frac{3!/s^{3+1}}{3}\right) = 0$

c) $a_{n+1} = 1.1a_n - 80$, $a_0 = 9000$. Mennyi a sorozat altalanos a_n tagja?

$f(x) = 1.1x - 80$ fixpontja: $f(x_{fix}) = x_{fix} = 1.1x_{fix} - 80 \Rightarrow x_{fix} = 800$

$$a_n = 1.1^n(9000-800) + 800 = 1.1^n\cdot 8200 + 800$$

2. ((1+3)+(3+3) pont)

A) Veges differenciak.

Keress numerikus egyenleteket a kovetkezo DE kozelito megoldasara:

$$(2-x)u''(x) + (1-x)u(x) = 2x, \;\; u(0) = u(1) = 0.$$

Approximaljuk az u fuggvenyt a kovetkezo vektorral: $\vec{u}_i = u(i\Delta x)$, $i = 1, \ldots, 3$, $\Delta x = 1/4$.

- Kozelitsd $u''(x)$-t az $u(x \pm \Delta x), u(x)$ ertekek segitsegevel!

$$U''(x) \approx \frac{1}{\Delta x^2}\Big(U(x+\Delta x) - 2U(x) + U(x-\Delta x)\Big)$$

- Ird fel az ennek megfelelo veges differencias kozeliteset a DE-nek mint egy inhom.lin. egyenletet a $\vec{u}$ vektorra!

$$\begin{bmatrix} 2-1\cdot\Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 2-2\cdot\Delta x & 0 \\ 0 & 0 & 2-3\cdot\Delta x \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\cdot\Delta x & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\cdot\Delta x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 1\cdot\Delta x \\ 2\cdot 2\cdot\Delta x \\ 2\cdot 3\cdot\Delta x \end{bmatrix}$$

B) Veges elemek, variacios elv.

Oszd fel a $[0, 1]$ intervallumot 4 reszre a kovetkezo pontokkal: $x_i = 0.2, 0.4, 0.8$. Legyen $v(x)$ az a folytonos fuggveny, amelyik affine az alintervallumokon es az ertekei az $x = 0, 0.2, 0.4, 0.8, 1$ pontokban a kovetkezoek: $0, v_1, v_2, v_3, 0$.

- Szamitsd ki, mennyi

$$Energy[v] = \int_0^1 (v'-1)^2 - v' - (x^2-1)v\, dx$$

kozelitoleg vagy pontosan! Kozelito szamitas eseten add meg, hogy milyen kozelitest hasznaltal!

- Ird fel az EL egyenleteket az $Energy[u]$ funkcionalra! $\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0$

$$\frac{d}{dx}\big(2(v'-1)-1\big) - \big(-(x^2-1)\big) = 0$$

$$2v''(x) + (x^2-1) = 0$$

$Energy[V] =$

$$= \left[\left(\frac{V_1-0}{0.2}-1\right)^2 + \left(\frac{V_1-0}{0.2}\right) - \left(\left[\frac{0+0.2}{2}\right]^2 - 1\right)\cdot\left(\frac{0+V_1}{2}\right)\right]\cdot 0.2$$

$$+ \left[\left(\frac{V_2-V_1}{0.2}-1\right)^2 + \left(\frac{V_2-V_1}{0.2}\right) - \left(\left[\frac{0.2+0.4}{2}\right]^2 - 1\right)\cdot\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)\right]\cdot 0.2$$

$$+ \left[\left(\frac{V_3-V_2}{0.4}-1\right)^2 + \left(\frac{V_3-V_2}{0.4}\right) - \left(\left[\frac{0.4+0.8}{2}\right]^2 - 1\right)\left(\frac{V_2+V_3}{2}\right)\right]\cdot 0.4$$

$$+ \left[\left(\frac{0-V_3}{0.2}-1\right)^2 + \left(\frac{0-V_3}{0.2}\right) - \left(\left[\frac{0.8+0.1}{2}\right]^2 - 1\right)\left(\frac{0+V_3}{2}\right)\right]\cdot 0.2$$

az (x^2-1) és az $V(x)$ függvények értékei a szubintervallumok középpontjaiban

3. ((2+2+1)+2+3 pont) $5t^2+20t+20$

A) $y'' = -9y + 5(t+2)^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. Mennyi $Y(s)$? ($\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$)

$$s^2Y(s) - 2s - 3 = -9Y(s) + 5\cdot\frac{2}{s^3} + 20\cdot\frac{1}{s^2} + 20\cdot\frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{\underbrace{s^2+9}_{(s+3i)(s-3i)}}\left(2s+3+\frac{10}{s^3}+\frac{20}{s^2}+\frac{20}{s}\right)$$

Hogy nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa?

$$Y(s) = \frac{A}{s+3i} + \frac{B}{s-3i} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s^2} + \frac{E}{s}$$

Mennyi $y(t)$?

$$y(t) = Ae^{-3it} + Be^{3it} + \frac{1}{2!}C\cdot t^2 + D\cdot t + E$$

B) Legyen $f(x) = \sqrt[2]{x}$. Ird fel f linearis approximaciojat az $x_0 = 9$ pont korul! Adj minel pontosabb felso korlatot a linearis approximacio hibajara, vagyis $|f(9+\Delta x) - f(9) - f'(9)\Delta x|$-re, ha $\Delta x \in [0, 0.1]$!

$$f(x) = x^{1/2},\ f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2},\ f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$$

$$\sqrt[2]{9+\Delta x} \approx \sqrt[2]{9} + \frac{1}{2}9^{-1/2}\cdot\Delta x = 3 + \frac{1}{6}\Delta x$$

$$|hiba(\Delta x)| \le \frac{1}{2}\Delta x^2 \max_{z\in[x_0,x_0+\Delta x]} \|f''(z)\| = \frac{1}{2}\Delta x^2\cdot\frac{1}{4}\cdot 9^{-3/2} = \frac{1}{2\cdot4\cdot27}\Delta x^2 = \frac{1}{216}\Delta x^2$$

C) Legyen $y'(t) = (2+y(t))(t-1)$, $y(2) = 3$. Ird fel $y(1+\Delta t)$ harmadrendu Taylor polinomjat!

$$y'' = (\partial_t + (2+y)(t-1)\partial_y)[(2+y)(t-1)] = (2+y) + (2+y)(t-1)\cdot(t-1) = (2+y)((t-1)^2+1)$$

$$y''' = (\partial_t + (2+y)(t-1)\partial_y)[(2+y)(t^2-2t+2)] = (2+y)(2t-2) + (2+y)(t-1)(t^2-2t+2)$$
$$= (2+y)(t-1)[t^2-2t+4]$$

$y(2) = 3$

$y'(2) = (2+3)(2-1) = 5$

$y''(2) = (2+3)((2-1)^2+1) = 10$

$y'''(2) = (2+3)\cdot(2-1)[2^2-2\cdot2+4] = 20$

$$y(1+\Delta t) \approx 3 + 5\Delta t + \frac{1}{2!}\cdot 10\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\cdot 20\Delta t^3 = 3 + 5\Delta t + 5\Delta t^2 + \frac{10}{3}\Delta t^3$$

4. (2+2+3+3 pont)

A) Legyen $\left(25\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) e^{i(kx+\omega t)} = 0$. Milyen algebrai egyenletet teljesit k es ω? Mekkora sebesseggel mozog egy ilyen sikhullam?

$$25(ik)^2 - (i\omega)^2 = 0 \longrightarrow \omega^2 = 5k^2 \longrightarrow \omega = \pm 5k$$

$$e^{i(kx+\omega t)} = e^{i|k|(\pm x \pm 5t)} = f(x \pm 5t),$$ tehát a sikhullám 5 sebességgel mozog

B) Legyen

$$\partial_t \phi(t,x) = \partial_x^2 \phi(t,x), \quad \phi(t,x+10) = \phi(t,x), \quad \phi(0,x) = f(x),$$

ahol $f(x) = 4$, ha $x \in [1,2]$, amugy 0 a $[-5,5]$ intervallum tobbi reszen.

1. Ird fel egy ortonormalt bazist $L^2([-5,5],dx)$-nek!

$$\vec{e}_n = e_n(x) = \frac{e^{in\frac{2\pi}{10}x}}{\sqrt{10}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. Szamold ki f ezen bazis szerinti kifejteset!

$$\vec{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot \vec{e}_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot e_n(x),$$ ahol

$$\hat{f}_n = (\vec{e}_n, f) = \int_{-5}^{5} \frac{e^{-in\cdot\frac{2\pi}{10}x}}{\sqrt{10}} \cdot f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{e^{-in\frac{2\pi}{10}x}}{\sqrt{10}} \cdot 4\,dx$$

$$= \frac{4}{\sqrt{10}} \left[\frac{e^{-in\frac{2\pi}{10}x}}{-in\frac{2\pi}{10}}\right]_1^2 = i\,\frac{4}{\sqrt{10}} \cdot \frac{10}{2\pi n} \cdot \left[e^{-in\cdot\frac{4}{10}\pi} - e^{-in\cdot\frac{2}{10}\pi}\right]$$

3. Mennyi $\phi(t,x)$? Hasznalj Fourier sort ϕ kifejezesere!

$$\varphi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot e^{-n^2 \cdot t \cdot \left(\frac{2\pi}{10}\right)^2} \cdot \frac{e^{in\frac{2\pi}{10}x}}{\sqrt{10}},$$

mivel $$\partial_x^2 \left(\frac{e^{in\frac{2\pi}{10}x}}{\sqrt{10}}\right) = -n^2 \left(\frac{2\pi}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{in\frac{2\pi}{10}x}}{\sqrt{10}}\right)$$