1. Legyen $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 16\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) e^{i(kx+\omega t)} = 0$. Milyen algebrai egyenletet teljesit k es ω? Mekkora sebesseggel mozog egy ilyen sikhullam?
   Megoldas: $k^2 = 16\omega^2$, tehat $|\omega| = |k|/\sqrt{16}$, igy

$$\exp\{i(kx+\omega t)\} = \exp\left\{i|k|\left(\pm x \pm \frac{1}{4}t\right)\right\}.$$

   Vagyis a sikhullam 1/4 sebesseggel mozog. (A $\phi(t,x) = f(x - vt)$ fuggveny egy v sebesseggel mozgo hullamprofilt ir le.)
   Variansok:
   Legyen $\left(9\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) e^{i(kx+\omega t)} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - 16\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) e^{i(kx+\omega t)} = 0.$

2. Legyen

$$\partial_t \phi(t,x) = \partial_x^2 \phi(t,x), \quad \phi(t,x+3) = \phi(t,x), \quad \phi(0,x) = f(x),$$

   ahol $f(x) = 55$, ha $x \in [1,2]$, amugy 0 a $[0,3]$ intervallum tobbi reszen.
   1. Ird fel egy ortonormalt bazist $L^2([0,4], dx)$-nek!
   2. Szamold ki f ezen bazis szerinti kifejteset!
   3. Mennyi $\phi(t,x)$? Hasznalj Fourier sort ϕ kifejezesere!

   Variansok:
   - Legyen a periodus 3 helyett: $\pi,\ 2\pi,\ L,\ 2\pi L$.
   - A periodicitas helyett legyen a peremfeltetel
     (a) $\phi(t,0) = \phi(t,\pi) = 0$,
     (b) $\phi'_x(t,0) = \phi'_x(t,\pi) = 0$,

3.
   - Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ -et, ahol f a kovetkezo:
     $H(-4t+8),\ H(-4t-8),\ H(t-3)H(-t-5),\ \exp(-4t+8),\ \sin(-4t+8),\ \cos(-4t+8)$ (itt H a Heaviside theta fuggveny).
     Ezekben az esetekben milyen s eseten letezik a Laplace transzformaciot definialo impropius integral?
   - Szamold ki az $f(t) = t - 1$ es a $g(t) = t$ fuggvenyek $h = f * g$ konvoluciojat!
     Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$?
     Variansok: Ismeteld meg a feladatot a kovetkezo f, g fuggveny parokra is:
     (a) $1,\ 1$,
     (b) $5,\ t$,
     (c) $t,\ t$,
     (d) $t,\ t^2$.

4. (a) Kozelitsd $u''(x)$-t az $u(x \pm \Delta x), u(x)$ ertekek segitsegevel!
   (Hogy nezne ki $u'''(x)$ es $u^{(4)}(x)$ kozelitese (unatkozo hallgatoknak) ?)
   (b) Keress numerikus egyenleteket a kovetkezo DE kozelito megoldasara:

$$u''(x) + (1-x)u(x) = 2x, \;\; u(0) = u(1) = 0.$$

   Approximaljuk az u fuggvenyt a kovetkezo vektorral: $\vec{u}_i = u(i\Delta x),\ i = 1,\ldots,3,\ \Delta x = 1/4$.
   Ird fel az ennek megfelelo veges differencias kozeliteset a DE-nek mint egy inhom.lin. egyenletet a $\vec{u}$ vektorra!
   Variansok: Ismeteld meg a feladatot a kovetkezo DE-ekre is:

$$xu''(x) + u(x) = 2,$$
$$u''(x) + (1-x)u'(x) = 2x,$$
$$(1-x)u''(x) + (1-x)u'(x) = 2x.$$

5. Veges elemek, variacios elv.
Oszd fel a $[0,1]$ intervallumot 4 reszre a kovetkezo pontokkal: $x_i = 0.2,\ 0.4,\ 0.8$. Legyen $v(x)$ az a folytonos fuggveny, amelyik affine az alintervallumokon es az ertekei az $x = 0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.8,\ 1$ pontokban a kovetkezoek: $0, v_1, v_2, v_3, 0$.

   - Szamitsd ki, mennyi
$$Energy[v] = \int_0^1 2(v')^2 - v' - (x^2-1)v\,dx$$
kozelitoleg vagy pontosan! Kozelito szamitas eseten add meg, hogy milyen kozelitest hasznaltal!
   - Ird fel az EL egyenleteket az $Energy[u]$ funkcionalra!

   Variansok:
   Ismeteld meg a feladatot, ha
$$Energy[v] = \int_0^1 2(v')^2 - v' - (x^2-1)v\,dx,$$
$$Energy[v] = \int_0^1 2(v')^4 - v' - (x^2-1)v^4\,dx$$
   Ird fel az Euler-Lagrange egyenleteket a kovetkezo $L(\bar{u}, \bar{u}')$ Lagrange fuggvenyekre:
$$(u_1')^2 + (u_2')^2 + u_1u_2' + u_1u_2,$$
$$u_1u_1' + u_2u_2'.$$

6. $y'' + 4y' + 8y = 5t^3,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3$. Mennyi $Y(s)$? $(\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}})$
Hogy nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa?
Mennyi $y(t)$?

   Variansok: Ismeteld meg a feladatot, ha
$$y'' + 9y = 5(t-1)^2,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3,$$
$$y''' + 9y = 5(t-1)^2,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 2,$$
$$y' + 9y = t^2 - 1,\ y(0) = 2.$$

7. Legyen
$$\frac{d}{dt}\bar{y}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Mennyi az $\bar{y}(t)$ megoldas $\bar{Y}(s)$ Laplace transzformaltja?

   Variansok: Ismeteld meg a feladatot, ha
$$\frac{d^2}{dt^2}\bar{y}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1'(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

8. Kik a holomorf fuggvenyek a kovetkezoek kozul:
$$f(z) = f(x+iy) = -x - iy, \quad f(z) = f(x+iy) = -x + iy, \quad f(z) = f(x+iy) = -x - iy,$$
$$f(z) = f(x+iy) = x^2 + 2ixy - 2y^2, \quad f(z) = f(x+iy) = x^2 + 2ixy + 2y^2,$$
$$f(z) = f(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin x), \quad f(z) = f(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y)$$

   Megoldas: $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorf, ha a Cauchy-Riemann egyenletek
$$u_x' = v_y', \qquad u_y' = -v_x'$$
   teljesulnek. Pl. $f(z) = f(x+iy) = x^2 + 2ixy + 2y^2$ nem holomorf, mivel
$$\left(x^2 + 2y^2\right)_x' = 4x = (2xy)_y',$$
$$\left(x^2 + 2y^2\right)_y' = 4y \neq -(2xy)_y' = 2x,$$
   tehat a masodik CR egyenlet serul.

9. Legyen $f(x) = \sqrt[2]{x}$. Ird fel f linearis approximaciojat az $x_0 = 4$ pont korul! Adj minel pontosabb felso korlatot a linearis approximacio hibajara, vagyis $|f(4+\Delta x) - f(4) - f'(4)\Delta x|$-re, ha $\Delta x \in [0, 0.1]$!

   Variansok: Ismeteld meg a feladatot, ha

$$
\begin{gathered}
f(x) = \sqrt[6]{x}, \quad x_0 = 64, \\
f(x) = 1/x, \quad x_0 = 4, \\
f(x) = 1/x^2, \quad x_0 = 4,
\end{gathered}
$$

10. Legyen $y'(t) = (2 + y^2(t))t, \;\; y(1) = 1$. Ird fel $y(1 + \Delta t)$ harmadrendu Taylor polinomjat!

    Variansok: Ismeteld meg a feladatot, ha

$$
\begin{gathered}
y'(t) = y(t)^2(t+1), \\
y'(t) = y(t) + 3.
\end{gathered}
$$

11. Legyen $y'(t) = (y^2(t) - 1)(t - 1), \;\; y(3) = 2$. Mit josol a Heun modszer $y(3.001)$-ra?

    Variansok: Ismeteld meg a feladatot, ha

$$
\begin{gathered}
y'(t) = y^2(t) - t, \;\; y(3) = 2, \\
\frac{d}{dt}\bar{y}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(3) \\ y_2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.
\end{gathered}
$$