B. Zh2, Diff.Egy., 2018.05.02. NEPTUN: Név:

Aláírás:

1. (4+4+2 pont)

Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan a kovetkezoket:

a) $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\cos(-2t+7))$.

$F(s)=$ $\int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{2}\left(e^{i(-2t+7)}+e^{i(-2t+7)}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{7i}\cdot e^{-(s+2i)t}+e^{-7i}e^{-(s-2i)t}dt$

$= \frac{1}{2}\left[e^{7i}\frac{1}{s+2i}+e^{-7i}\frac{1}{s-2i}\right]$

Esetunkben milyen s eseten letezik a Laplace transzformaciot definialo impropius integral?

$Re(s)>0$

b) Szamold ki az $f(t) = t^2$ es a $g(t) = t$ fuggvenyek $h = f * g$ konvoluciojat!

$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t (t-\tau)^2\cdot\tau\, d\tau = \int_0^t t^2\tau - 2t\tau^2+\tau^3\, d\tau$

$= t^2\cdot\frac{t^2}{2} - 2t\cdot\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4} = \frac{1}{12}t^4$

Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$? | vagy $\frac{2!}{s^3}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{4!}{s^5}=0$

$=0$

c) $a_{n+1} = a_n - 8$, $a_0 = 78$. Mennyi a sorozat altalanos a_n tagja?

Számtani sorozat, így $a_n = 78-8n$

2. ((1+3)+(3+3) pont)

A) Veges differenciak.

Keress numerikus egyenleteket a kovetkezo DE kozelito megoldasara:

$$u''(x) + (1-x)u'(x) = 2 - x, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Approximaljuk az u fuggvenyt a kovetkezo vektorral: $\vec{u}_i = u(i\Delta x)$, $i = 1, \ldots, 3$, $\Delta x = 1/4$.

- Kozelitsd $u''(x)$-t az $u(x \pm \Delta x), u(x)$ ertekek segitsegevel!

$$U''(x) \approx \frac{1}{\Delta x^2}\left[U(x-\Delta x) - 2U(x) + U(x+\Delta x)\right]$$

- Ird fel az ennek megfelelo veges differencias kozeliteset a DE-nek mint egy inhom.lin. egyenletet a $\vec{u}$ vektorra!

$$\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\Delta x & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\Delta x \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\Delta x \\ 2-2\Delta x \\ 2-3\Delta x \end{bmatrix}$$

ha $U'(x) \approx \frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x}$

$\left(\text{ha } U'(x) = \frac{U(x+\Delta x) - U(x-\Delta x)}{2\Delta x}, \text{ akkor } \frac{d}{dx} \text{ mátrixa } \frac{1}{2\Delta x}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$

B) Veges elemek, variacios elv.

Oszd fel a $[0, 1]$ intervallumot 4 reszre a kovetkezo pontokkal: $x_i = 0.2, 0.4, 0.8$. Legyen $v(x)$ az a folytonos fuggveny, amelyik affine az alintervallumokon es az ertekei az $x = 0, 0.2, 0.4, 0.8, 1$ pontokban a kovetkezoek: $0, v_1, v_2, v_3, 0$.

- Szamitsd ki, mennyi

$$Energy[v] = \int_0^1 2(v' - 3)^2 - (x^2 + 1)v \, dx$$

kozelitoleg vagy pontosan! Kozelito szamitas eseten add meg, hogy milyen kozelitest hasznaltal!

- Ird fel az EL egyenleteket az $Energy[u]$ funkcionalra!

$$\begin{aligned} Energy[V] = & \left[2 \cdot \left(\frac{V_1 - 0}{0.2} - 3\right)^2 - \left(\left(\frac{0+0.2}{2}\right)^2 + 1\right) \cdot \left(\frac{0+V_1}{2}\right)\right] \cdot 0.2 \\ & + \left[2 \cdot \left(\frac{V_2 - V_1}{0.2} - 3\right)^2 - \left(\left(\frac{0.2+0.4}{2}\right)^2 + 1\right) \cdot \left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)\right] \cdot 0.2 \\ & + \left[2 \cdot \left(\frac{V_3 - V_2}{0.4} - 3\right)^2 - \left(\left(\frac{0.4+0.8}{2}\right)^2 + 1\right) \cdot \left(\frac{V_2+V_3}{2}\right)\right] \cdot 0.4 \\ & + \left[2 \cdot \left(\frac{0 - V_3}{0.2} - 3\right)^2 - \left(\left(\frac{0.8+1}{2}\right)^2 + 1\right) \cdot \left(\frac{V_3+0}{2}\right)\right] \cdot 0.2 \end{aligned}$$

Az x^2+1 és $v(x)$ függvények értékei az intervallumok középpontjaiban.

Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(4(v'-3)\right) - \left(-(x^2+1)\right) = 0 \qquad 4v''(x) + x^2 + 1 = 0$$

3. ((2+2+1)+2+3 pont)

A) $y'' - 4y' + 8y = 5t^3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. Mennyi $Y(s)$? ($\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$)

$$(s^2 Y(s) - 2s - 3) - 4(sY(s) - 2) + 8Y(s) = 5 \cdot \frac{3!}{s^4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 8}\left[2s + 3 - 8 + 5 \cdot \frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{s^2-4s+8}\left[2s - 5 + \frac{30}{s^4}\right]$$

Hogy nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa? $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = 2 \pm 2i$

$$Y(s) = \frac{A}{s-(2+2i)} + \frac{B}{s-(2-2i)} + \frac{C}{s^4} + \frac{D}{s^3} + \frac{E}{s^2} + \frac{F}{s}$$

Mennyi $y(t)$?

$$y(t) = A e^{(2+2i)t} + B e^{(2-2i)t} + \frac{1}{3!} C t^3 + \frac{1}{2!} D t^2 + E t + F$$

B) Legyen $f(x) = 1/x^3$. Ird fel f linearis approximaciojat az $x_0 = 1$ pont korul! Adj minel pontosabb felso korlatot a linearis approximacio hibajara, vagyis $|f(1+\Delta x) - f(1) - f'(1)\Delta x|$-re, ha $\Delta x \in [0, 0.1]$!

$$f(1+\Delta x) \approx \frac{1}{1^3} + (-3 \cdot 1^{-4})\Delta x = 1 - 3\Delta x$$

$$|hiba(\Delta x)| \leq \frac{1}{2}\Delta x^2 \cdot \max_{z \in [1, 1+\Delta x]} \|f''(z)\| = \frac{1}{2}\Delta x^2 \cdot \left|(-3)\cdot(-4)\cdot 1^{-5}\right| = 6\Delta x^2$$

C) Legyen $y'(t) = (y(t) - 2)(t - 3)$, $y(1) = 2$. Ird fel $y(1 + \Delta t)$ harmadrendu Taylor polinomjat!

$$y'' = [\partial_t + (y-2)(t-3)\partial_y][(y-2)(t-3)] = (y-2) + (y-2)(t-3)\cdot(t-3)$$
$$= [(t-3)^2 + 1](y-2)$$

$$y''' = [\partial_t + (y-2)(t-3)\partial_y]\{[(t-3)^2+1](y-2)\} = 2(t-3)(y-2) + (y-2)(t-3)\cdot[(t-3)^2+1]$$
$$= (t-3)(y-2)[2 + [(t-3)^2+1]]$$

$$y(1) = 2,\quad y'(1) = (2-2)(1-3) = 0,\quad y''(1) = 0,\quad y'''(1) = 0$$

$$y(1+\Delta t) \approx 2 + 0 \cdot \Delta t + 0 \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + 0 \cdot \frac{\Delta t^3}{3!} = 2$$

($y(t) = 2$ amúgy exaktúl megoldja a Diff.egyenletet.)

4. (2+2+3+3 pont)

A) Legyen $\left(4\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) e^{i(kx+\omega t)} = 0$. Milyen algebrai egyenletet teljesit k es ω? Mekkora sebesseggel mozog egy ilyen sikhullam?

$$4(ik)^2 - (i\omega)^2 = 0 \Rightarrow \omega = \pm 2k$$

Tehát $e^{i(kx+\omega t)} = e^{i|k|(\pm x \pm 2t)}$, így a hullám sebessége 2.

(Mivel $\varphi(t,x) = f(x-vt)$ egy v sebességgel haladó hullámfrontot ír le.)

B) Legyen

$$\partial_t \phi(t,x) = \partial_x^2 \phi(t,x), \quad \phi(t, x+2) = \phi(t,x), \quad \phi(0,x) = f(x),$$

ahol $f(x) = 5$, ha $x \in [1,2]$, amugy 0 a $[0,2]$ intervallum tobbi reszen.

1. Ird fel egy ortonormalt bazist $L^2([0,2], dx)$-nek!

$$\vec{e}_n = e_n(x) = \frac{e^{i\frac{2\pi}{2}nx}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{i\pi n x}}{\sqrt{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. Szamold ki f ezen bazis szerinti kifejteset!

$$\hat{f}_n = (\vec{e}_n, f) = \int_0^2 \frac{e^{-i\pi n x}}{\sqrt{2}} \cdot f(x)\, dx = \int_1^2 \frac{e^{-i\pi n x}}{\sqrt{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{-i\pi n} \cdot e^{-i\pi n x}\right]_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i \cdot \frac{1}{\pi n}\left[1 - e^{-i\pi n}\right]$$

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot \vec{e}_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot \frac{e^{i\pi n x}}{\sqrt{2}}$$

3. Mennyi $\phi(t,x)$? Hasznalj Fourier sort ϕ kifejezesere!

$$\partial_x^2 \vec{e}_n = \partial_x \frac{e^{in\pi x}}{\sqrt{2}} = (in\pi)^2 \cdot \frac{e^{in\pi x}}{\sqrt{2}} = -(n\pi)^2 \cdot \vec{e}_n$$

Így $\varphi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot e^{-(n\pi)^2 \cdot t} \cdot \frac{e^{in\pi x}}{\sqrt{2}}$