$\boxed{5}$ 1. 1 • Ird at a kovetkezo egyenletet elsorendu DE rendszerre! $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 2yv \end{pmatrix}$

$$y'' = 2yy';$$

2 • Oldd meg!

2 $y_{\text{ált}} = \frac{1}{2}t^2 + C_2 t + C_1$

$y'' = 1, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 6,$ $\quad 3 + 6t + \frac{1}{2}t^2 = y$

$y'' = 1, \quad y(0) = 3, \; y(2) = 6.$ $\quad 3 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 = y$

$\boxed{6}$ 2. Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-re $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

3 $y(2.1) = 3 + (2 - 2^2 \cdot 3) \cdot 0.1 = 2$

3 $$y' = f(x, y) = x - x^2 y;$$ $y(2.1) = 3 + \frac{1}{2}\left(-10 + (2.1 - 2.1^2 \cdot 2)\right) \cdot 0.1$

Mit josolnak ezek a modszerek $y(2.1)$-re?

$\boxed{6}$ 3. $y' = y^2 - 5y$. $\quad f' = 2y - 5$ $\quad y_1 = 0$, $\Delta y' = -5\Delta y$ $\quad y_2 = 5$, $\Delta y' = 5\Delta y$

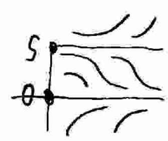
1 Keresd meg a DE fixpontjait!

2 Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!

1 Ha $y(0) = 0$, mennyi

$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$

2 Vazold a DE megoldasgorbeit!



$Jac = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y_2 - 2 & y_1 - 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{6}$ 4. 2 fixpont: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 - 1 \\ (y_1 - 3)(y_2 - 2) \end{pmatrix}.$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

2+2 Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

$y = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{6}$ 5. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad 1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad 4: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 3y_2 \\ 4y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3 Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!

1 Ird fel a DE altalanos megoldasat!

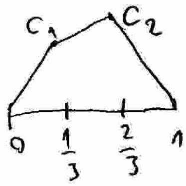
1 Ird fel a DE partikularis megoldasat!

2+3 6. Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et! $\quad \frac{d}{dx} y_2' - (-y_2^4) = 0$

$\boxed{5}$ $\frac{d}{dx}(2y') - (-4y^3) = 0$ $\qquad L = (y')^2 - y^4, \qquad M = y_1' y_2' - y_1 y_2^4.$ $\qquad \frac{d}{dx} y_1' - (-y_1 \cdot 4y_2^3) = 0$

$\boxed{6}$ 7. Legyen adott az $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^2 + (1 - x)(y(x))^2 \, dx$ funkcional a $[0, 1]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0, 3]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, $[2/3, 1]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1/3) = \phi_2(2/3) = 1$ es $\phi_2(1/3) = \phi_1(2/3) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az

3+3 $(1 - x)y(x)$-os tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert es add is meg a modszer nevet!)



$$S = \left(\frac{c_1}{1/3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{c_2 - c_1}{1/3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{-c_2}{1/3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[(1 - 0) \cdot 0^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot c_1^2\right] \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot c_1^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot c_2^2\right] \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot c_2^2 + (1 - 1) \cdot 0^2\right] \cdot \frac{1}{3}$$

1

Anal. III. PZh2.

$\cdot\, y = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-4t}$ $\quad C_1 + C_2 = 1 \quad C_1 = \frac{3}{4}$

$y' = 4C_1 e^{4t} - 4C_2 e^{-4t} \quad 4C_1 - 4C_2 = 2 \quad C_1 = \frac{1}{4} \quad y = \frac{3}{4} e^{4t} + \frac{1}{4} e^{-4t}$

$\boxed{5}$ 1. 2 (a) Oldd meg: $y'' - 16y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

3 (b) Oldd meg az allando varialasanak a modszerevel: $y' - y = e^{-3t} + 1$.

$y = C \cdot e^{t} \quad C' e^{t} = e^{-3t} + 1$

$C' = e^{-4t} + e^{-t}$

$C = -\frac{1}{4} e^{-4t} - e^{-t} + K$

$y = K e^{t} - \frac{1}{4} e^{-3t} + 1$

$\boxed{5}$ 2. 3 (a) Oldd meg a $G' + G = \delta$ egyenletet, ha $G(t) = 0$ negativ t-kre!

2 (b) Ird fel G segitsegevel az $y' + y = f(t)$ egyenlet megoldasat, ha $y(t) = f(t) = 0$ negativ t-kre!

$G = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t} & t > 0 \end{cases}$

$y = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$

3. $y'' - 16y = 15$, $y(0) = 4y'(0) = 2$ $\quad Y(s) = \frac{1}{s^2 - 16}\left(4s + 2 + \frac{15}{s}\right)$

2 (a) Szamold ki $y(t)$-nek az $Y(s)$ Laplace transzformaltjat!

2 (b) Szamold ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasat! $= \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s}$

2 (c) Mennyi $y(t)$? $\quad A e^{4t} + B e^{-4t} + C$

4. 2 (a) Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan: $\mathcal{L}(e^{3-2t})$ $= \frac{e^{3}}{s+2}$

2 (b) Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapjan: $\mathcal{L}(H(-t + 4))$ $= \int_0^4 e^{-st} = \frac{e^{-st}}{-s} + \frac{1}{s}$

2 (c)
- Szamold ki az $f(t) = 4$ es a $g(t) = 5$ fuggvenyek $h = f * g$ konvoluciojat! $= 20 \cdot t$
- Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$? $= 0$

5. 2 (a) Oldd meg! $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3 (b) Oldd meg! $G'' + 9G = \delta$, es $G(t) = 0$ negativ t-kre.

$G(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{3}\sin(3t) & t > 0 \end{cases}$

1 (c) Ird fel G segitsegevel az $y'' + 9y = f(t)$ egyenlet megoldasat, ha $y(t) = f(t) = 0$ negativ t-kre!

6. 2 (a) Mennyi a $v = (2 - i, 4 + i)^T$ es a $w = (4i, i)^T$ vektorok belso szorzata? $= -3 + 12i$

2 (b) Legyen $f_1 = (\sin(45°), i\cos(45°))^T$, $f_2 = (\cos(45°), z)^T$ egy ortonormalt bazis. Mennyi z ? $= -\frac{i}{\sqrt{2}}$

2 (c) A $v = (2, 4)^T$ vektor kifejezheto az f-ek linearis $\alpha f_1 + \beta f_2$ kombinaciojakent! Mennyi β ? $= \sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i$

7. 2 (a) Legyen $f(x) = H(-x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, ha $x \in (-\pi, \pi)$ Mennyi $\hat{f}_{-4}$? $= 0$

(b) Legyen

$$\phi(0, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \phi(t, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(t) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \partial_t \phi(t, x) = \frac{1}{3}\partial^2_{xx}\phi(t, x).$$

2
- Ird fel a $d_n(t)$ fuggvenyekre vonatkozo kozonseges DE-ket (kezdeti feltetellel egyutt)!

2
- Mennyi $d_{-4}(t)$? $= 0$

$d_n'(t) = -\frac{1}{3} n^2 \cdot d_n(t)$