Analizis III. I. Feladatsor

1. Oldd meg!

$$
\begin{gathered}
y' = 0, \\
y' = 5, \\
y' = 5\sin(x), \\
y'' = 10, \\
y' = 0, \quad y(3) = 4 \\
y' = 5, \quad y(3) = 4 \\
y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y'(3) = 5, \\
y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y(4) = 5, \\
y' = 5y, \\
y' = 5y, \quad y(3) = 4, \\
y' = 5y + 15, \\
y' = 5y + 15, \quad y(3) = 4, \\
y' = 5y^3, \\
y' = 5y^3, \quad y(3) = 4, \\
y' = 5\sqrt{|y|}, \\
y' = 5\sqrt{|y|}, \quad y(3) = 4,
\end{gathered}
$$

2. Ird at a kovetkezo egyenleteket elsorendu DE rendszerre!

$$
a)\ y'' = -y' - 2y; \qquad b)\ y''' = y + x; \qquad c)\ \frac{d^2}{dx^2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' - y_2 \\ y_2' y_1 \end{pmatrix}
$$

3. Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-ekre $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$
a)\ y' = f(x, y) = x - y; \qquad b)\ y' = x - y^2;
$$

Vegezd el ugyanezt az

$$
c)\ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}; \qquad d)\ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1^2 + x \end{pmatrix}
$$

egyenletekre az $\begin{pmatrix} y_1(2) \\ y_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ kezdeti feltetel mellett!

Mit josolnak ezek a modszerek y(2.1)-re?

....

4. Rajzold le az $y' = f(y)$ DE iranymezojet es a megoldasgorbeit! Keresd meg a DE fixpontjait es ird fel a fixponttol valo elteresre vonatkozo DE linearizalt alakjat! Vizsgald meg a fixpontok stabilitasat!

$$
\begin{gathered}
a)\ y' = 1, \qquad b)\ y' = y, \qquad c)\ y' = -y, \qquad d)\ y' = y + 1, \\
e)\ y' = -1 + y^2, \qquad f)\ y' = y(1 - y), \qquad g)\ y' = y(1 - y)(1 + y).
\end{gathered}
$$

---

5. Keresd mag az A matrix sajatertekeit es sajatvektorait! Ird fel a v vektort a sajatvektorok linearis kombinaciojakent!

$$
a)\ (7) \qquad b)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
g)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad h)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}
$$

Itt a v vektor erteke:

$$a)\ \ v = (8); \qquad b-f)\ \ v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad g-h)\ \ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

....

6. Oldd meg az elozo feladatban szereplo A matrixokra az

$$\frac{d}{dx} y = Ay, \ \ y(0) = v$$

DE-t! Ird fel az altalanos, illetve a partikuralis megoldast! Vizsgald meg az $y = 0$ fixpont stabilitasat!

....

7. $y'' = -y$. Ird at a DE-t egy elsorendu DE-rendszerre es oldd meg az elozo feladathoz hasonloan!

8. Keresd mag az A matrix sajatertekeit es sajatvektorait!

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mennyi $\exp(xA)$?

....

9. Oldd meg az elozo feladatban szereplo A matrixokra az

$$\frac{d}{dx} y = Ay, \ \ y(0) = v$$

DE-t! Ird fel a partikularis megoldast e^{xA} segitsegevel, ha a v vektor erteke:

$$a-c)\ \ v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad d)\ \ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

....

10. $y'' = y - y^3$. Legyen $p = y'$.

    Ird at a DE-t egy elsorendu DE rendszerre, keresd meg annak a fixpontjait, ird fel a fixpontoktol valo elteresre vonatkozo liearizalt DE-ket! Vizsgald meg a fixpontok stabilitasat!

....

11. Legyen adott az $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^4 + xy(x)\ dx$ funkcional a $[0, 1]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0, 1]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, $[2/3, 1]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1/3) = \phi_2(2/3) = 1$ es $\phi_2(1/3) = \phi_1(2/3) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az $xy(x)$-os tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyn kozelito modszert!)

1 Proba Zh I.

1.1

1a. (1+1+1+2 pont)
$y' = e^{-x^2} - 1/4.$
Keresd meg a DE fixpontjait!
Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!
Ha $y(0) = 0$, mennyi
$\lim_{x\to\infty} y(x) =$ $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$
Vazold a DE megoldasgorbeit!

1b. (2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 + (y_1)^2 \\ 101 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg a DE fixpontjat!
Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

2. (3+4+3 pont)
b) Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-re $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$y' = -y^3 x;$$

Mit josol a ket modszer $y(2.1)$-re?
Euler:
Heun:

3. (5+2+3 pont)
Legyen $y'' = -2y'$. Ird at a DE-t elsorendu $d\bar{y}/dt = A\bar{y}$ alaku rendszerre!
Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!
Ird fel a DE altalanos megoldasat!
Szamold ki a DE partikularis megoldasat, ha $y(0) = 5$, $y'(0) = 55$!

4. $(2 + (1 + 2) + 5$ pont)
b) Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$L = \sin(y)(y') - (y')^4, \qquad M = ((y_1')^2 + (y_2')^2)/2 + y_1' y_1 y_2' y_1$$

c) Legyen adott az $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^2 - 77(y'(x)) + x^2 y(x)\, dx$ funkcional a $[0,1]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0,1]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0,1/5]$, $[1/5,3/5]$, $[3/5,1]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1/5) = \phi_2(3/5) = 1$ es $\phi_2(1/5) = \phi_1(3/5) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az harmadik tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert es add is meg a modszer nevet!)

5. Oldd meg!

$$y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y'(3) = 5,$$
$$y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y(4) = 5,$$
$$y' = 5y + 15, \quad y(3) = 4,$$
$$y' = 5y^3,$$
$$y' = 5\sqrt{|y|}, \quad y(3) = 0,$$

1.2 2

1a. (1+1+1+2 pont)
$y' = y^4 - 16.$
Keresd meg a DE fixpontjait!
Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!
Ha $y(0) = 0$, mennyi

$\lim_{x\to\infty} y(x) =$ $\lim_{x\to -\infty} y(x) =$
Vazold a DE megoldasgorbeit!

1b. (2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2^2 - 1 \\ y_1 - 5 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg a DE fixpontjat!
Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

2. (3+4+3 pont)
b) Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-re $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$y' = 1 + y^3 x;$$

Mit josol a ket modszer $y(2.1)$-re?
Euler:
Heun:

3. (5+2+3 pont)
Legyen

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \begin{pmatrix} -4y_1 + 3y_2 \\ 3y_1 - 4y_2 \end{pmatrix} = A\bar{y}.$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!
Ird fel a DE altalanos megoldasat!
Szamold ki a DE partikularis megoldasat, ha $y(0) = 5$, $y'(0) = 55$!

4. $(2 + (1 + 2) + 5$ pont)
b) Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$L = y^2 - (y')^4, \qquad M = ((y_1')^2 + (y_2')^2)/2 + y_1' y_1 y_2' y_1$$

c) Legyen adott az $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^2 - 77(y'(x)) + x^2 y(x)\, dx$ funkcional a $[0, 1]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0, 1]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0, 1/5]$, $[1/5, 3/5]$, $[3/5, 1]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1/5) = \phi_2(3/5) = 1$ es $\phi_2(1/5) = \phi_1(3/5) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az harmadik tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert es add is meg a modszer nevet!)

5. Oldd meg!

$$y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y'(3) = 5,$$
$$y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y(4) = 5,$$
$$y' = 5y + 15, \quad y(3) = 4,$$
$$y' = 5y^3,$$
$$y' = 5\sqrt{|y|}, \quad y(3) = 0,$$

1.3 3

1a. (1+1+1+2 pont)
$y' = -y^2 + 16.$
Keresd meg a DE fixpontjait!
Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!
Ha $y(0) = 0$, mennyi
$\lim_{x\to\infty} y(x) =$ $\lim_{x\to -\infty} y(x) =$
Vazold a DE megoldasgorbeit!

1b. (2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^2 - 9 \\ y_2 - 7 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

2. (3+4+3 pont)

b) Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-re $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$y' = y^3(x-7);$$

Mit josol a ket modszer $y(2.1)$-re?
Euler:

Heun:

3. (5+2+3 pont)

Legyen

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \begin{pmatrix} -4y_1 + 3y_2 \\ -4y_2 \end{pmatrix} = A\bar{y}.$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

Szamold ki a DE partikularis megoldasat, ha $y(0) = 5$, $y'(0) = 55$!

4. $(2 + (1 + 2) + 5$ pont)

b) Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$L = y^3 - (y')^2, \qquad M = (y_2')^2)/2 + y_1' y_1 y_1 y_2' y_1$$

c) Legyen adott az $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^3 - 77(y'(x)) + x^2 y(x)\, dx$ funkcional a $[0,1]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0,1]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0,1/5]$, $[1/5,3/5]$, $[3/5,1]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1/5) = \phi_2(3/5) = 1$ es $\phi_2(1/5) = \phi_1(3/5) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az harmadik tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert es add is meg a modszer nevet!)

5. Oldd meg!

$$y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y'(3) = 5,$$
$$y'' = 0, \quad y(3) = 4,\ y(4) = 5,$$
$$y' = -5y + 15, \quad y(3) = 4,$$
$$y' = 5y^3,$$
$$y' = 5\sqrt{|-y|}, \quad y(3) = 0,$$

Rajzold le a megoldasgorbeket!

1.4 4

1a. (1+1+1+2 pont)

$y' = -y^2 + 5y$.

Keresd meg a DE fixpontjait!

Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!

Ha $y(0) = 0$, mennyi

$\lim_{x\to\infty} y(x) =$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$

Vazold a DE megoldasgorbeit!

1b. (2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_1-9)(y_2-7) \\ (y_1-8)(y_2-6) \end{pmatrix}.$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

2. (3+4+3 pont)

b) Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-re $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$y' = (y-1)(x-7);$$

Mit josol a ket modszer $y(2.1)$-re?
Euler:
Heun:

3. (5+2+3 pont)
Legyen

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \begin{pmatrix} -4y_1 + 3y_2 \\ -4y_2 \end{pmatrix} = A\bar{y}.$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!
Ird fel a DE altalanos megoldasat!
Szamold ki a DE partikularis megoldasat, ha $y(0) = 5$, $y'(0) = 55$!

4. $(2 + (1+2) + 5$ pont)
b) Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$L = y^3 - (y')^2, \qquad M = (y_2')^2)/2 + y_1' y_1 y_1 y_2' y_1$$

c) Legyen adott az $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^3 - 77(y'(x)) + x^2 y(x)\, dx$ funkcional a $[0,1]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0,1]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0,1/5]$, $[1/5,3/5]$, $[3/5,1]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1/5) = \phi_2(3/5) = 1$ es $\phi_2(1/5) = \phi_1(3/5) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az harmadik tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert es add is meg a modszer nevet!)

5. Oldd meg!

$$y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y'(3) = 5,$$
$$y'' = 0, \quad y(3) = 4,\ y(4) = 5,$$
$$y' = -5y + 15, \quad y(3) = 4,$$
$$y' = 5y^3,$$
$$y' = 5\sqrt{|-y|}, \quad y(3) = 0,$$

Rajzold le a megoldasgorbeket!