Analizis III. I. Feladatsor

1. Oldd meg!

$$y' = 0,$$
$$y' = 5,$$
$$y' = 5\sin(x),$$
$$y'' = 10,$$
$$y' = 0, \quad y(3) = 4$$
$$y' = 5, \quad y(3) = 4$$
$$y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y'(3) = 5,$$
$$y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y(4) = 5,$$
$$y' = 5y,$$
$$y' = 5y, \quad y(3) = 4,$$
$$y' = 5y + 15,$$
$$y' = 5y + 15, \quad y(3) = 4,$$
$$y' = 5y^3,$$
$$y' = 5y^3, \quad y(3) = 4,$$
$$y' = 5\sqrt{|y|},$$
$$y' = 5\sqrt{|y|}, \quad y(3) = 4,$$

2. Ird at a kovetkezo egyenleteket elsorendu DE rendszerre!

$$a)\ \ y'' = -y' - 2y; \qquad b)\ \ y''' = y + x; \qquad c)\ \ \frac{d^2}{dx^2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' - y_2 \\ y_2' y_1 \end{pmatrix}$$

Megoldas:

$$a)\ \ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -v - 2y \end{pmatrix}; \qquad b)\ \ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ v \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ a \\ y + x \end{pmatrix}; \qquad c)\ \ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \\ y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 - y_2 \\ v_2 \\ v_2 y_1 \end{pmatrix}$$

3. Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-ekre $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$a)\ \ y' = f(x, y) = x - y; \qquad b)\ \ y' = x - y^2;$$

Vegezd el ugyanezt az

$$c)\ \ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}; \qquad d)\ \ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1^2 + x \end{pmatrix}$$

egyenletekre az $\begin{pmatrix} y_1(2) \\ y_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ kezdeti feltetel mellett!

Mit josolnak ezek a modszerek y(2.1)-re?

....

Megoldas:

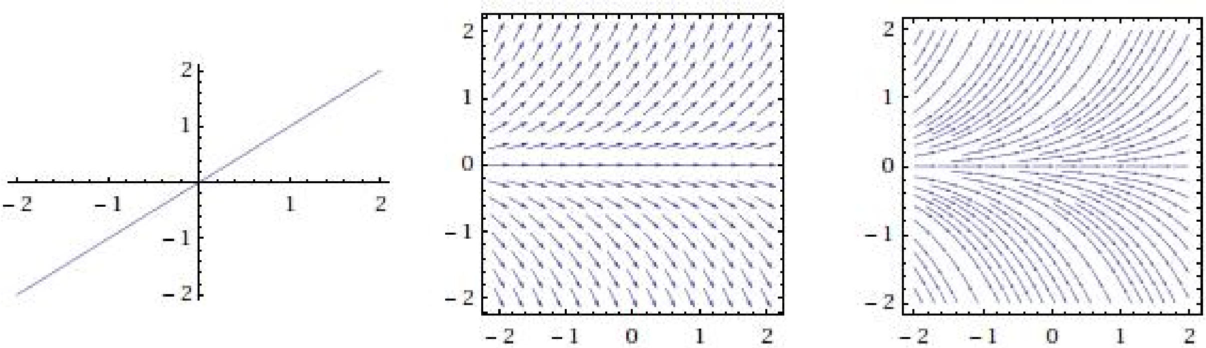
$$a) \quad Euler: \quad y(2.1) \approx y(2) + (2 - 3) \cdot 0.1 = 3 + (-1) \cdot 0.1 = 2.9,$$
$$y(2.2) \approx y(2.1) + (2.1 - 2.9) \cdot 0.1$$
$$Heun: \quad k_1 = f(2, 3) = 2 - 3 = -1, \quad k_2 = f(2 + 0.1, 3 + f(2, 3) \cdot 0.1) = 2.1 - 2.9 = -0.8,$$
$$y(2.1) \approx y(2) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \cdot 0.1 = 3 + \frac{1}{2}(-1 - 0.8) \cdot 0.1.$$

4. Rajzold le az $y' = f(y)$ DE iranymezojet es a megoldasgorbeit! Keresd meg a DE fixpontjait es ird fel a fixponttol valo elteresre vonatkozo DE linearizalt alakjat! Vizsgald meg a fixpontok stabilitasat!

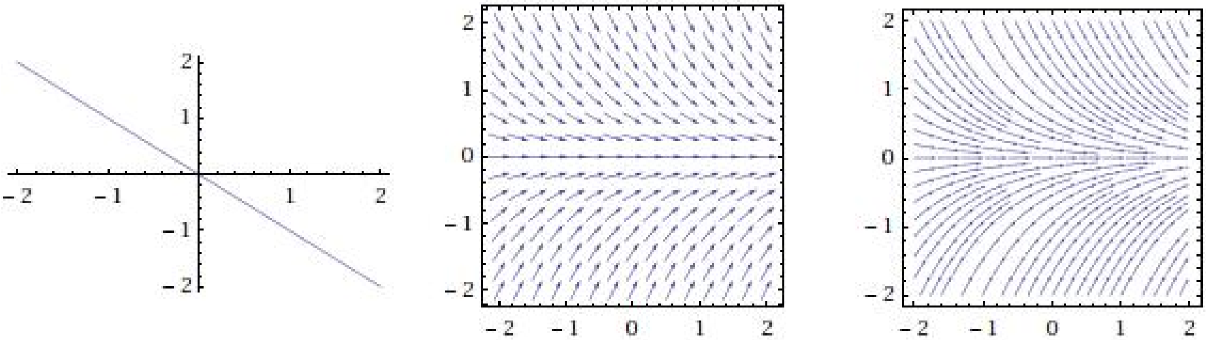
$$a)\ \ y' = 1, \qquad b)\ \ y' = y, \qquad c)\ \ y' = -y, \qquad d)\ \ y' = y + 1,$$
$$e)\ \ y' = -1 + y^2, \qquad f)\ \ y' = y(1-y), \qquad g)\ \ y' = y(1-y)(1+y).$$

Megoldas:

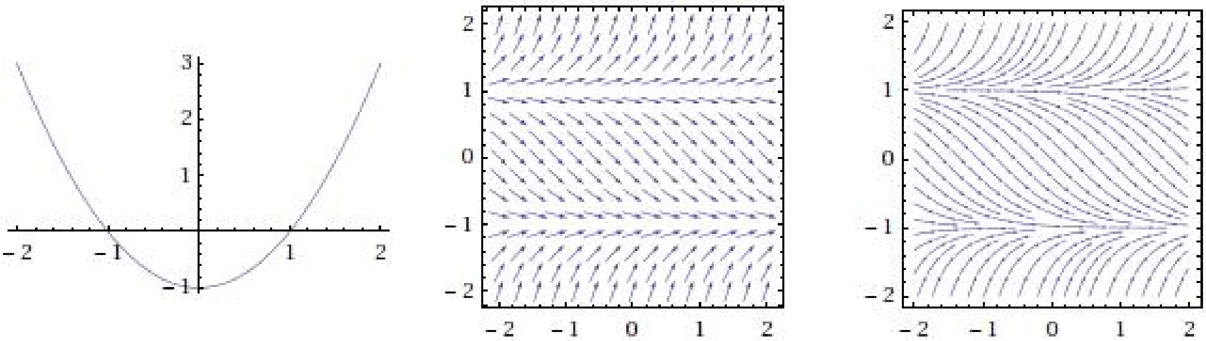
b) $y' = y$



c) $y' = -y$



e) $y' = y^2 - 1$



. . . .

g) $y' = f(y) = y(1-y)(1+y) = +y - y^3$

$f'(y) = \frac{d}{dy} f(y) = 1 - 3y^2$. A fixpontok:

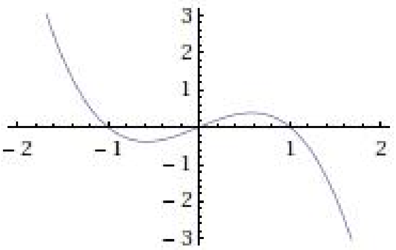
$$y_1 = 0, \qquad\qquad y_2 = 1, \qquad\qquad y_3 = -1,$$

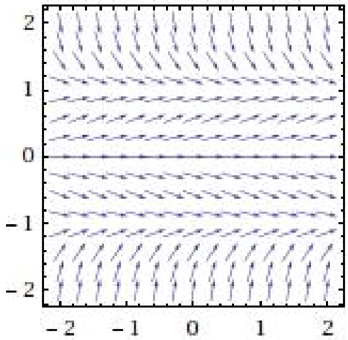
$$f'(y_1) = f'(0) = 1 - 3 \cdot 0^2 = 1 > 0, \qquad f'(1) = -2 < 0, \qquad f'(-1) = -2 < 0.$$

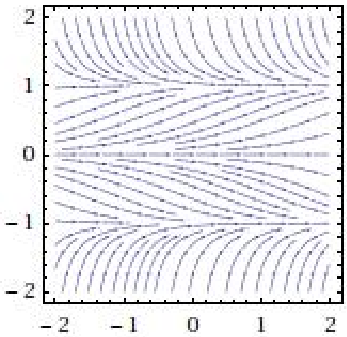
f' elojele alapjan az $y_1,\ y_2,\ y_3$ fixpontok stabilitasa: *instabil, stabil, stabil.*

A linearizalt egyenletek a fixpontok korul:

$$\frac{d}{dx}(y-0) = \frac{d}{dx}\Delta y_1 = 1 \cdot \Delta y_1, \qquad \frac{d}{dx}(y-1) = \frac{d}{dx}\Delta y_2 = -2 \cdot \Delta y_2, \qquad \frac{d}{dx}(y-(-1)) = \frac{d}{dx}\Delta y_3 = -2 \cdot \Delta y_3,$$







---

5. Keresd mag az A matrix sajatertekeit es sajatvektorait! Ird fel a v vektort a sajatvektorok linearis kombinaciojakent!

$$a)\ \ (7) \qquad b)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad h)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Itt a v vektor erteke:

$$a)\ v = (8); \qquad b-f)\ v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad g-h)\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

....

Megoldas:

b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sajatertekek: $\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2$,
Sajatvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mivel A eleve diagonalis volt, ez a feladat trivialis, a sajatertekek a diagonalis elemek, a sajatvektorok pedig a standard bazis.

....

d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sajatertekek egyenlete:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 1 \cdot 0 = 0$$

Sajatertekek: $\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2$.

Sajatvektorok egyenlete ($\lambda_1 = 3$-ra):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \text{vagy} \qquad \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Innen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$. Ezek kozul valasztunk egy nem nulla vektort, pl. legyen $x = 1$.
Sajatvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad\qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f) Sajatertekek: $\lambda_1 = 2 + 3i, \qquad \lambda_2 = 2 - 3i$,
Sajatvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad\qquad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

. . . .

g) Mivel A a d) es az a) blokkok kombinacioja, igy ezen ket feladat eredmenyeit felhasznalva a kovetkezoket kapjuk:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Sajatertekek: $\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 7, \qquad ,$
Sajatvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

---

6. Oldd meg az elozo feladatban szereplo A matrixokra az

$$\frac{d}{dx}y = Ay, \quad y(0) = v$$

DE-t! Ird fel az altalanos, illetve a partikuralis megoldast! Vizsgald meg az $y = 0$ fixpont stabilitasat!

. . . .

Megoldas:

d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sajatertekek: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$. Sajatvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az altalanos megoldas:

$$y_{alt}(x) = \sum_i C_i e^{\lambda_i x} v_i = C_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ha

$$y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

akkor a partikularis megoldas

$$y_{part}(x) = 4e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mivel mindket sajatertek valos resze pozitiv, igy az $y = 0$ fixpont instabil.

---

7. $y'' = -y$. Ird at a DE-t egy elsorendu DE-rendszerre es oldd meg az elozo feladathoz hasonloan!

Megoldas:

. . . .

Ugyanez elsorendu DE rendszerkent:

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$$

A sajatertekei es sajatvektorai:

$$\lambda_1 = i, \;\; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = -i, \;\; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Tehat az altalanos megoldas:

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = C_1 e^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + C_2 e^{-ix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

---

8. Keresd mag az A matrix sajatertekeit es sajatvektorait!

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mennyi $\exp(xA)$?

....

Megoldas:

c)

Sajatertek:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2.$$

Az egyetlen sajatvektor:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{vagyis} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\exp(xA)$:

$$\exp(xA) = \exp\left[\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \exp\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \cdots\right] = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 3xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

Itt az elso, $\exp(C + D) = \exp(C) \cdot \exp(D)$ tipusu atalakitast azert lehetett elvegezni, mert esetunkben $[C, D] = CD - DC = 0$ volt:

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Az utolso elotti atalakitasnal pedig azt hasznaltuk ki, hogy

$$\begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = (3x)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

---

9. Oldd meg az elozo feladatban szereplo A matrixokra az

$$\frac{d}{dx} y = Ay, \quad y(0) = v$$

DE-t! Ird fel a partikularis megoldast e^{xA} segitsegevel, ha a v vektor erteke:

$$a - c)\ \ v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad d)\ \ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

....

Megoldas:

c)

$$y_{part}(x) = e^{xA} y(0) = \exp\left[x \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 3xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

---

10. $y'' = y - y^3$. Legyen $p = y'$.

Ird at a DE-t egy elsorendu DE rendszerre, keresd meg annak a fixpontjait, ird fel a fixpontoktol valo elteresre vonatkozo liearizalt DE-ket! Vizsgald meg a fixpontok stabilitasat!

....

Megoldas:

Elsorendu DE-rendszer:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ y - y^3 \end{pmatrix}$$

Egyensulyi allapotok (fixpontok):

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y\\p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\y-y^3\end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad y_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \qquad y_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad y_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},$$

A Jacobi matrix:

$$J = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}p & \frac{\partial}{\partial p}p\\ \frac{\partial}{\partial y}(y-y^3) & \frac{\partial}{\partial p}(y-y^3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-3y^2 & 0\end{pmatrix}$$

A Jacobi matrix erteke a fixpontokban:

$$J(y_1) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad J(y_2) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}, \qquad J(y_3) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

A matrixok sajatertekei:

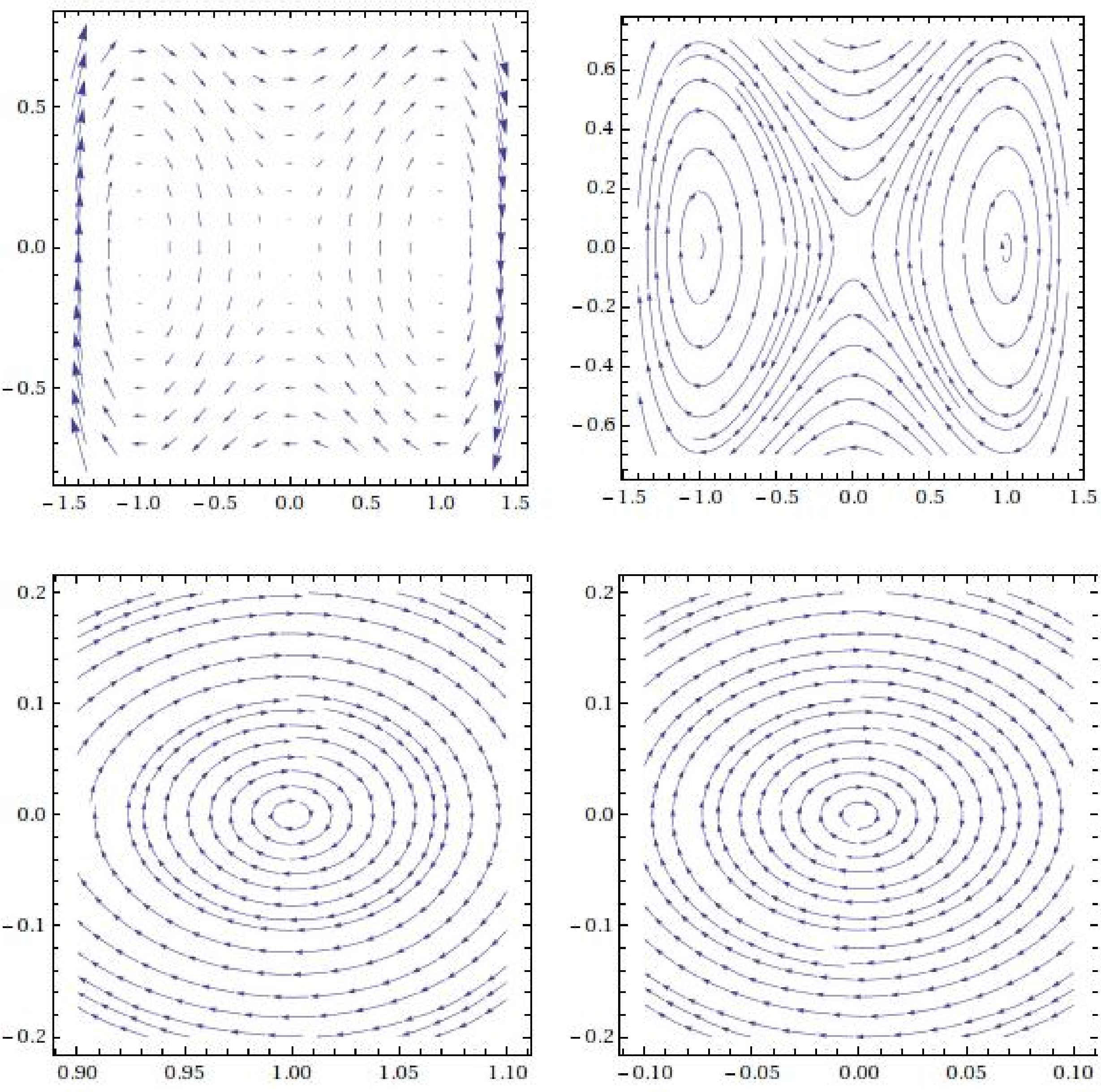
$$y_1: \quad (1,-1), \qquad\qquad y_2: \quad (0-\sqrt{2}i, 0+\sqrt{2}i), \qquad\qquad y_3: \quad (0-\sqrt{2}i, 0+\sqrt{2}i).$$

Mivel

$$\begin{aligned} y_1: \quad -1 < 0 < 1 \quad &\Longrightarrow \quad y_1 \text{ instabil nyeregpont}\\ y_{2,3}: \Re(0\pm\sqrt{2}i) = 0,\ \Im(0\pm\sqrt{2}i) \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad y_{2,3} \text{ centrum, stabil, de nem aszimptotikusan} \end{aligned}$$

A linearizalt DE pl. az y_2 fixpont korul:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y-1\\p-0\end{pmatrix} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\Delta y\\ \Delta p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta y\\ \Delta p\end{pmatrix}$$



Az felso sor ket abraja a DE vektormezojet, illetve annak megoldasgorbeit mutatja. A masodik sor elso abraja a megoldasgorbeket abrazolja az y_2 fixpont korul, mig a masodik abra a linearizalt, kozelito egyenlet megoldasgorbeit tartalmazza.

11. Legyen adott az $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^4 + xy(x)\, dx$ funkcional a $[0,1]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0,1]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1/3) = \phi_2(2/3) = 1$ es $\phi_2(1/3) = \phi_1(2/3) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az $xy(x)$-os tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyn kozelito modszert!)

    Megoldas:

$$\begin{gathered}
S[u_h] \\
\approx \left[(3c_1)^4 \cdot \frac{1}{3} + (3(c_2 - c_1))^4 \cdot \frac{1}{3} + (-3c_2)^4 \cdot \frac{1}{3}\right] \\
+ \left[\frac{1}{2}\left(0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot c_1\right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot c_1 + \frac{2}{3} \cdot c_2\right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot c_2 + 1 \cdot 0\right) \cdot \frac{1}{3}\right]
\end{gathered}$$

1 Proba Zh I.

1.1

1a. (1+1+1+2 pont)
$y' = e^{-x^2} - 1/4.$
Keresd meg a DE fixpontjait!
Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!
Ha $y(0) = 0$, mennyi
$\lim_{x\to\infty} y(x) =$ $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$
Vazold a DE megoldasgorbeit!

1b. (2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 + (y_1)^2 \\ 101 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg a DE fixpontjat!
Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

2. (3+4+3 pont)
b) Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-re $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$y' = -y^3 x;$$

Mit josol a ket modszer $y(2.1)$-re?
Euler:
Heun:

3. (5+2+3 pont)
Legyen $y'' = -2y'$. Ird at a DE-t elsorendu $d\bar{y}/dt = A\bar{y}$ alaku rendszerre!
Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!
Ird fel a DE altalanos megoldasat!
Szamold ki a DE partikularis megoldasat, ha $y(0) = 5$, $y'(0) = 55$!

4. $(2 + (1 + 2) + 5$ pont)
b) Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$L = \sin(y)(y') - (y')^4, \qquad M = ((y_1')^2 + (y_2')^2)/2 + y_1' y_1 y_2' y_1$$

c) Legyen adott az $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^2 - 77(y'(x)) + x^2 y(x)\, dx$ funkcional a $[0,1]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0,1]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0,1/5]$, $[1/5,3/5]$, $[3/5,1]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1/5) = \phi_2(3/5) = 1$ es $\phi_2(1/5) = \phi_1(3/5) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az harmadik tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert es add is meg a modszer nevet!)

5. Oldd meg!

$$y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y'(3) = 5,$$
$$y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y(4) = 5,$$
$$y' = 5y + 15, \quad y(3) = 4,$$
$$y' = 5y^3,$$
$$y' = 5\sqrt{|y|}, \quad y(3) = 0,$$

1.2 2

1a. (1+1+1+2 pont)
$y' = y^4 - 16.$
Keresd meg a DE fixpontjait!
Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!
Ha $y(0) = 0$, mennyi

$\lim_{x\to\infty} y(x) =$ $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$
Vazold a DE megoldasgorbeit!

1b. (2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2^2 - 1 \\ y_1 - 5 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg a DE fixpontjat!
Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

2. (3+4+3 pont)
b) Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-re $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$y' = 1 + y^3 x;$$

Mit josol a ket modszer $y(2.1)$-re?
Euler:
Heun:

3. (5+2+3 pont)
Legyen

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \begin{pmatrix} -4y_1 + 3y_2 \\ 3y_1 - 4y_2 \end{pmatrix} = A\bar{y}.$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!
Ird fel a DE altalanos megoldasat!
Szamold ki a DE partikularis megoldasat, ha $y(0) = 5$, $y'(0) = 55$!

4. $(2 + (1 + 2) + 5$ pont)
b) Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$L = y^2 - (y')^4, \qquad M = ((y_1')^2 + (y_2')^2)/2 + y_1' y_1 y_2' y_1$$

c) Legyen adott az $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^2 - 77(y'(x)) + x^2 y(x)\, dx$ funkcional a $[0, 1]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0, 1]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0, 1/5]$, $[1/5, 3/5]$, $[3/5, 1]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1/5) = \phi_2(3/5) = 1$ es $\phi_2(1/5) = \phi_1(3/5) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az harmadik tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert es add is meg a modszer nevet!)

5. Oldd meg!

$$y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y'(3) = 5,$$
$$y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y(4) = 5,$$
$$y' = 5y + 15, \quad y(3) = 4,$$
$$y' = 5y^3,$$
$$y' = 5\sqrt{|y|}, \quad y(3) = 0,$$

1.3 3

1a. (1+1+1+2 pont)
$y' = -y^2 + 16.$
Keresd meg a DE fixpontjait!
Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!
Ha $y(0) = 0$, mennyi
$\lim_{x\to\infty} y(x) =$ $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$
Vazold a DE megoldasgorbeit!

1b. (2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^2 - 9 \\ y_2 - 7 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

2. (3+4+3 pont)

b) Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-re $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$y' = y^3(x-7);$$

Mit josol a ket modszer $y(2.1)$-re?
Euler:

Heun:

3. (5+2+3 pont)

Legyen

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \begin{pmatrix} -4y_1 + 3y_2 \\ -4y_2 \end{pmatrix} = A\bar{y}.$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

Szamold ki a DE partikularis megoldasat, ha $y(0) = 5$, $y'(0) = 55$!

4. $(2 + (1 + 2) + 5$ pont)

b) Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$L = y^3 - (y')^2, \qquad M = (y_2')^2)/2 + y_1' y_1 y_1 y_2' y_1$$

c) Legyen adott az $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^3 - 77(y'(x)) + x^2 y(x)\, dx$ funkcional a $[0,1]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0,1]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0,1/5]$, $[1/5,3/5]$, $[3/5,1]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1/5) = \phi_2(3/5) = 1$ es $\phi_2(1/5) = \phi_1(3/5) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az harmadik tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert es add is meg a modszer nevet!)

5. Oldd meg!

$$y'' = 10, \quad y(3) = 4,\ y'(3) = 5,$$
$$y'' = 0, \quad y(3) = 4,\ y(4) = 5,$$
$$y' = -5y + 15, \quad y(3) = 4,$$
$$y' = 5y^3,$$
$$y' = 5\sqrt{|-y|}, \quad y(3) = 0,$$

Rajzold le a megoldasgorbeket!

1.4 4

1a. (1+1+1+2 pont)

$y' = -y^2 + 5y$.

Keresd meg a DE fixpontjait!

Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!

Ha $y(0) = 0$, mennyi

$\lim_{x\to\infty} y(x) =$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$

Vazold a DE megoldasgorbeit!

1b. (2+3 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_1-9)(y_2-7) \\ (y_1-8)(y_2-6) \end{pmatrix}.$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

2. (3+4+3 pont)

b) Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-re $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$y' = (y-1)(x-7);$$

Mit josol a ket modszer $y(2.1)$-re?
Euler:
Heun:

3. (5+2+3 pont)
Legyen

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \begin{pmatrix} -4y_1 + 3y_2 \\ -4y_2 \end{pmatrix} = A\bar{y}.$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!
Ird fel a DE altalanos megoldasat!
Szamold ki a DE partikularis megoldasat, ha $y(0) = 5$, $y'(0) = 55$!

4. $(2 + (1 + 2) + 5$ pont$)$
b) Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$L = y^3 - (y')^2, \qquad M = (y_2')^2)/2 + y_1' y_1 y_1 y_2' y_1$$

c) Legyen adott az $S[u] = \int_0^1 (y'(x))^3 - 77(y'(x)) + x^2 y(x)\, dx$ funkcional a $[0, 1]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0, 1]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0, 1/5]$, $[1/5, 3/5]$, $[3/5, 1]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1/5) = \phi_2(3/5) = 1$ es $\phi_2(1/5) = \phi_1(3/5) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az harmadik tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert es add is meg a modszer nevet!)

5. Oldd meg!

$$y'' = 10, \quad y(3) = 4, \ y'(3) = 5,$$
$$y'' = 0, \quad y(3) = 4, \ y(4) = 5,$$
$$y' = -5y + 15, \quad y(3) = 4,$$
$$y' = 5y^3,$$
$$y' = 5\sqrt{|-y|}, \quad y(3) = 0,$$

Rajzold le a megoldasgorbeket!