1. • Ird at a kovetkezo egyenletet elsorendu DE rendszerre!

$$y'' = -y' - 2y;$$

• Oldd meg!

$$y'' = 10, \quad y(0) = 4, \ y'(0) = 5,$$
$$y'' = 10, \quad y(0) = 4, \ y(2) = 5.$$

2. Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-re $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$y' = f(x, y) = x - y^2 x;$$

Mit josolnak ezek a modszerek y(2.1)-re?

3. $y' = \cancel{-\frac{3}{1+x^2}} + 1$. $\quad -\frac{3}{1+y^2} + 1$

Keresd meg a DE fixpontjait!

Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!

Ha $y(0) = 0$, mennyi

$\lim_{x\to\infty} y(x) =$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$

Vazold a DE megoldasgorbeit!

4.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2^2 - 9 \\ y_1 - 3 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

5.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y_1 + 3y_2 \\ 3y_1 - 4y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

Mennyi

$$\begin{pmatrix} y_1(3) \\ y_2(3) \end{pmatrix} ?$$

6.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y_1 + 3y_2 \\ -4y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

Ird fel a DE partikularis megoldasat!

7. Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

$$L = (y' - 1)^2 - yy', \qquad M = y_1' y_2 + (y_2')^2 + y_1' y_2 + y_1 y_2.$$

8. Legyen adott az $S[u] = \int_0^3 (y'(x) - 7)^2 + x^2 y(x)\, dx$ funkcional a $[0, 3]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0, 3]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1) = \phi_2(2) = 1$ es $\phi_2(1) = \phi_1(2) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az $(1 - x)y(x)$-os tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert es add is meg a modszer nevet!)

1. • Ird at a kovetkezo egyenletet elsorendu DE rendszerre!

$v = y' \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -v-2y \end{pmatrix}$ (2)

$$y'' = -y' - 2y;$$

• Oldd meg!

$y'' = 10 \to y' = \int 10\, dt = 10t + C_1$

$y = \int 10t + C_1\, dt = 5t^2 + C_1 t + C_2$ (2)

$$y'' = 10, \quad y(0) = 4, \ y'(0) = 5,$$

$5 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 4$ (1)

$10 \cdot 0 + C_1 = 5$

$$y'' = 10, \quad y(0) = 4, \ y(2) = 5.$$

$5 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 4$

$5 \cdot 2^2 + C_1 \cdot 2 + C_2 = 5$

$\to C_1 = -\frac{19}{2}$, $C_2 = 4$ (1)

2. Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-re $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

Eu: $y(2.1) \approx 3 + (2 - 3^2 \cdot 2) \cdot 0.1 = 1.4$ (2)

He: $y(2.1) \approx 3 + \frac{1}{2}([2 - 3^2 \cdot 2] + [2.1 - 1.4^2 \cdot 2.1]) \cdot 0.1$ (2)

10 pont / 10 pont

$$y' = f(x, y) = x - y^2 x;$$

Mit josolnak ezek a modszerek y(2.1)-re?

3. $y' = -\frac{3}{1+y^2} + 1$.

$-\frac{3}{1+y^2} + 1 = f(y) = 0 \to y_1 = -\sqrt{2}$ (1) $\quad y_2 = \sqrt{2}$

$f' = \frac{6y}{(1+y^2)^2}$ $\quad f'(y_1) = -2\sqrt{2}/3$ $\quad f'(y_2) = 2\sqrt{2}/3$

Keresd meg a DE fixpontjait!

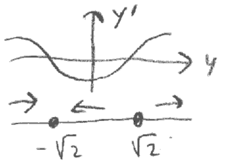
Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!

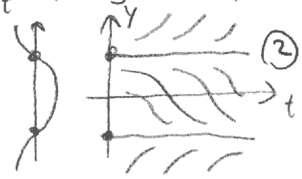
$\frac{d}{dt}(y - (-\sqrt{2})) \equiv \Delta y' = -2\sqrt{2}\,\Delta y$ (1) $\quad \frac{d}{dt}\Delta y = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\Delta y$ (1)

Ha $y(0) = 0$, mennyi

$\lim_{x\to\infty} y(x) = -\sqrt{2}$ $\quad \lim_{x\to-\infty} y(x) = \sqrt{2}$

Vazold a DE megoldasgorbeit!





(2)

$y_2^2 - 9 = 0$, $y_1 - 3 = 0 \to P_1 = \begin{pmatrix} +3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} +3 \\ +3 \end{pmatrix}$ (2)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2^2 - 9 \\ y_1 - 3 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Jac} = \begin{bmatrix} \partial_{y_1}(y_2^2-9) & \partial_{y_2}(y_2^2-9) \\ \partial_{y_1}(y_1-3) & \partial_{y_2}(y_1-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2y_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (1)

Keresd meg a DE fixpontjat!

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

$\mathrm{Jac}(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \frac{d}{dt}(\bar{y} - P_1) = \frac{d}{dt}\overline{\Delta y_1} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\overline{\Delta y_1}$ (1) + (1)

$\mathrm{Jac}(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} -4-\lambda & 3 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\quad \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -7$ (1)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y_1 + 3y_2 \\ 3y_1 - 4y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2), $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

$\bar{y}_{\acute{a}lt} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-7t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2) $\quad \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ C_1 - C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad C_1 = 7$, $C_2 = -1$

Mennyi $\begin{pmatrix} y_1(3) \\ y_2(3) \end{pmatrix}$? $= 7e^{-3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)e^{-21}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2)

$\lambda_1 = -4$, $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1)

6. $\exp t\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \exp t\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \exp t\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (1)

$= \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (1)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y_1 + 3y_2 \\ -4y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

$\bar{y}_{\acute{a}lt} = \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ (1)

Ird fel a DE partikularis megoldasat!

$y_{part} = \begin{bmatrix} e^{-4t} & 3t\,e^{-4t} \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ (1)

12 pont / 8 pont

7. Ird fel a kovetkezo Lagrange fuggvenyekhez tartozo Euler-Lagrange egyenlet(ek)et!

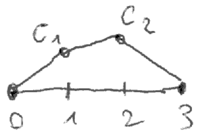
$$L = (y' - 1)^2 - yy', \qquad M = y_1' y_2 + (y_2')^2 + y_1' y_2 + y_1 y_2.$$

$\frac{d}{dx}[y' - 1 - y] - y' = 0$ (2)

$\frac{d}{dx}[y_2 + y_2] - y_2 = 0$ (2)

$\frac{d}{dx}[2y_2] - [y_1' + y_1' + y_1] = 0$

8. Legyen adott az $S[u] = \int_0^3 (y'(x) - 7)^2 + x^2 y(x)\, dx$ funkcional a $[0, 3]$-en ertelmezett es a vegpontokban eltuno fuggvenyek H teren. Legyen V a $[0, 3]$-en ertelmezett, a vegpontokban eltuno es a $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ intervallumokon affin folytonos fuggvenyek tere. Legyen ϕ_1 es ϕ_2 ennek e ternek egy bazisa, ahol $\phi_1(1) = \phi_2(2) = 1$ es $\phi_2(1) = \phi_1(2) = 0$. Legyen $u_h = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Szamitsd ki az $S[u_h] = s(c_1, c_2)$ ketvaltozos fuggvenyt! (Az $(1 - x)y(x)$-os tag kiszamitasara az integralban hasznalj valamilyen kozelito modszert es add is meg a modszer nevet!)



$S[u_h] \approx (c_1 - 7)^2 \cdot 1 + ((c_2 - c_1) - 7)^2 \cdot 1 + (-c_2 - 7)^2 \cdot 1$ (2)

$+ \frac{1}{2}[0^2 \cdot 0 + 1^2 \cdot c_1] \cdot 1 + \frac{1}{2}[1^2 \cdot c_1 + 2^2 \cdot c_2] \cdot 1 + \frac{1}{2}[2^2 \cdot c_2 + 3^2 \cdot 0] \cdot 1$

(2)