0.1 Elso lepesek

0.1.1 Linkek:

Nehany online szoftver: Octave, (SAGE, WolframAlpha).
Octave: bevezetes, 1-30. oldalak, reszletes leiras.

0.1.2 Octave parancssor:

```
>> 1+1
ans =  2

>> 1+1;

>> sin(1)
ans =  0.84147

>> a=13
a =  13

>> a(1)
ans =  13

>> a(2)
error: a(2): out of bound 1

>> a(1,1)
ans =  13

>> a(5)=55
a =

   13    0    0    0   55

>> b=[1,2,3,4; 11,12,13,14]
b =

    1    2    3    4
   11   12   13   14

>> b(2,3)
ans =  13

>> for n=1:5 squares(n)=n^2; endfor

>> squares
squares =

    1    4    9   16   25

>> for n=1:5 for m=1:2 ...
           index(n,m)=10000*n+m;  ...
   endfor endfor

>> index
index =

   10001   10002
   20001   20002
   30001   30002
   40001   40002
   50001   50002

>> ls=linspace(3,4,6)
ls =
```

```
   3.0000    3.2000    3.4000    3.6000    3.8000    4.0000

>> ls'
ans =

   3.0000
   3.2000
   3.4000
   3.6000
   3.8000
   4.0000

>> for i=1:300 x(i)=(i-1)*0.01; f(i)=sin(x(i))^2; endfor

>> plot(x,f)
```

0.2 Numerikus differencialas

$$f'(x^*) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x^* + \Delta x) - f(x^*)}{\Delta x},$$

$$error(\Delta x) = \left| \frac{f(x^* + \Delta x) - f(x^*)}{\Delta x} - f'(x^*) \right| = \left| \frac{f(x^* + \Delta x) - (f(x^*) + f'(x^*)\Delta x)}{\Delta x} \right|.$$

Gyakran elofordul, hogy

$$error(\Delta x) \approx c|\Delta x|^\alpha, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{error(\Delta x)}{|\Delta x|^\alpha} = c. \tag{1}$$

Problema: Keresd meg (numerikusan, kozelitoleg) α-t es c-t!
Mintapelda: Legyen

$$f(x) = \tan(x), \quad x^* = 0.$$

Mennyi α es c ?

Megoldas: Itt persze tudjuk, hogy $f'(x) = 1/\cos^2(x)$, $f'(0) = 1$. Ha

$$error(\Delta x) = c|\Delta x|^\alpha$$

pontosan teljesulne, akkor

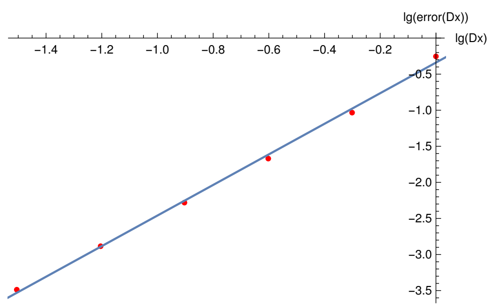
$$\log(error(\Delta x) = \log(c|\Delta x|^\alpha) = \log(c) + \alpha \log(|\Delta x|)$$

allna fenn. Tehat mit kell tennunk:

- Szamold ki a $[\log(|\Delta x|), \log(error(\Delta x)]$ koordinatakat nehany kis Δx ertekre.
- Abrazold ezeket a pontokat, majd keresd meg a rajuk legjobban illeszkedo egyenest! Ennek a meredeksege lesz α kozelitese.

Mindez esetunkben:

n	$\Delta x = 2^{-n}$	$error(\Delta x)$	$\lg(\|\Delta x\|)$	$\lg(error(\Delta x))$
0.	1.	0.557408	0.	-0.253827
1.	0.5	0.092605	-0.30103	-1.03337
2.	0.25	0.0213677	-0.60206	-1.67024
3.	0.125	0.00524109	-0.90309	-2.28058
4.	0.0625	0.00130412	-1.20412	-2.88468
5.	0.03125	0.000325648	-1.50515	-3.48725



A piros $[\log(|\Delta x|), \log(error(\Delta x)]$ pontokra legjobban illeszkedo egyenes

$$\lg(error(\Delta x)) = -0.339891 + 2.11952 \lg(|\Delta x|).$$

Vagyis a becslesunk α es c-re:

$$\alpha = 2.11952, \qquad \lg(c) = -0.339891, \quad c = 10^{-0.339891} = 0.457203.$$

Megjegyzes:

- Mivel
$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$$
$x = 0$ korul, igy a pontos ertekek
$$c = \frac{1}{3}, \qquad \alpha = 2,$$
ahol $\alpha = 2 = 3 - 1$.
- Ez az eredmeny kisse atipikus, $x = 0$ inflexios pontja a $tan(x)$ fuggvenynek, igy nincs benne x^2 tag,
- Mivel a hiba aszimptotikus viselkedese a $\Delta x \to 0$ esetre vonatkozik, pontosabb eredmenyt kaptunk volna, ha sokkal kisebb Δx ertekek sorozatara szamoltuk volna ki a hibakat. Pl. hasznalhattuk volna az $n = 10 \ldots 15$ ertekeket.
- Az egyenes illesztesenel egyforma sullyal vettuk figyelembe a piros pontokat, de a kisebb Δx ertekekhez tartozo pontok relevansabbak.
- Ha a $\Delta x_n = 1/2^n$ sorozat helyett mas sorozatot valasztottunk volna, elvileg egeszen mas eredmenyt is kaphattunk volna. (Bar ez ebben a feladatban nem fordulna elo.)
- Eleg ritka, hogy egy numerikus modszer hibajanak az aszimptotikus viselkedese ilyen egyszeru. Altalaban az $error(\Delta x) \approx c|\Delta x|^\alpha$ tipusu becslesek helyett inkabb $error(\Delta x) \leq c|\Delta x|^\alpha$ egyenlotlensegek, vagyis felso korlatok fordulnak elo. Ekkor az "egyenes illesztes" sokkal komplikaltabb.
- Ebben a feladatban tudtuk az egzakt eredmenyt: $tan'(0) = 1$, ehhez kepest szamoltuk a hibat. Ezen tudas hianyaban kisse primitiv, de egyszeru modszer, ha $\tan'(0)$ ertekenek a legkisebb Δx eseten kapott differenciahanyadost hasznaljuk:
$$\Delta x = 2^{-5}, \quad \tan'(0) \approx \frac{\tan(0 + \Delta x) - \tan(0)}{\Delta x} = 1.00033.$$

Octave kod:

```
# ez egy megjegyzes, comment:  Numerikus derivalas, fajl: HW0NumDer.m
clear
xast = 0.0;

jmin = 0;
jmax = 5;
for j = jmin : jmax
  i = j - jmin + 1;
  dx(i) = 2.0^(-j);
  error(i) = ...    #folytatas a kov. sorban, cont.next line
   abs( (tan(xast+dx(i))-tan(xast))/(dx(i)) - 1/(cos(xast))^2 );
  lgDx(i) = log10(dx(i));
  lgErrorDx(i) = log10(error(i));
end;

pf = polyfit( lgDx, lgErrorDx, 1 )
display("alpha, c:")
display ([pf(1), 10^pf(2)])

for i = 1 : jmax -jmin + 1
  linepoints(i) = pf(1) * lgDx(i) + pf(2);
end;

plot( lgDx,linepoints,  lgDx,lgErrorDx,"o" );
```

Feladatok:

1. Vegezd el ugyanezt az analizist a kovetkezo fuggvenyek eseteben:

$$\tan(x),\ x^* = 1, \qquad \ln(x),\ x^* = 3, \qquad \lg(x),\ x^* = 10, \qquad \sqrt[3]{|x|^4},\ x^* = 0,$$
$$\sqrt[4]{|x|^3},\ x^* = 0, \qquad x^2 \ln(|x|),\ x^* = 0.$$

   Az utolso ket eset kisse trukkosebb, mint az elso negy.

2. Ismeteld meg az elozo feladat elso harom esetet, ha $\Delta x_n = 2^{-n}$, de $n = 0 \ldots 15$ vagy $n = 10 \ldots 15$.

3. Ismeteld meg az elso feladat elso harom esetet, ha $\Delta x_n = 1/(n^3 + 1)$ es $n = 0 \ldots 5$.

4. Ismeteld meg az elso feladat elso harom esetet, ha $\Delta x_n = 2^{-n}$ es $n = 0 \ldots 5$, de most tegy ugy, mintha nem ismerned $f'(x^*)$ egzakt erteket.

5. Szamold ki $\tan'(0) = 1$ numerikus kozeliteset, ha $\Delta x_n = 2^{-n}$, de $n = 10 \ldots 64$. Milyen n-re lesz az a legpontosabb a kozelites? Hol bukhat meg az az elv, hogy "minel kisebb Δx, annal jobb" ?

6. Ismeteld meg a mintapeldat ugy, hogy a derivaltnak a kovetkezo kozeliteset hasznaljuk:

$$f'(x^*) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x^* + \Delta x) - f(x^* - \Delta x)}{2\Delta x}.$$

0.3 Euler modszer

Mintapelda: Legyen

$$y(0) = 0, \quad y'(t) = f(t) = |t - 0.5| = \begin{cases} 0.5 - t, & \text{if } t \leq 0.5, \\ t - 0.5, & \text{if } t \geq 0.5. \end{cases}$$

Mennyi $y(1)$ numerikus kozelitese, ha $\Delta t = 1/11$? Mennyi $y(1)$ hibaja?

Megoldas: Octave kod:

```
clear;

function ydot = f (y,t)
  if (t>=0.5)
    ydot = t - 0.5;
  else
    ydot = -(t - 0.5);
  endif
endfunction

N = 11;
dt = 1/N;
t = 0;
y = 0;

intf01 = 0;
for i = 0 : N-1
  intf01 = intf01 + f(y,t) * dt;
  t = t + dt;
endfor
error = abs(intf01-1/4);

display(intf01)
display(error)
```

Megjegyzesek:

- Szkript nem kezdodhet *function*-nal! Itt ezt biztositja *clear*.
- Persze hasznalhattuk volna az *abs* fuggvenyt az $if\ldots$ helyett.
- Az egzakt 1/4 integralt konnyu kiszamolni, Octave tud numerikusan integralni, vagy megkerdezhetjuk WolframAlpha-t:

  ```
  integrate |t-0.5| from 0 to 1
  ```

"Feladat": Legyen

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0.$$

Mennyi $y(1)$ numerikus kozelitese? A numerikus megoldasnal hogyan fugg a hiba a lepeskoztol?

"Megoldas":

A tovabbi feladatokban alkalmazzuk az Euler modszert $y(1)$ kiszamitasara, ami esetunkben egy primitiv numerikus iteracios eljaras:

$$y_0 = y_0, \quad y_{i+1} = y_i + f(i \cdot \Delta x)\,\Delta x, \quad \Delta x = 1/N, \quad y_N \approx y(1)$$

Feladat 1: Oldd meg az elozo "Feladatot" a kovetkezo fuggvenyek eseteben, felteve, hogy $y(0) = 1$:

$$\begin{aligned} &1. \quad f(t,y) = ty, && y(1) = \exp(1^2/2), \\ &2. \quad f(t,y) = y - y^2, && y(1) = \frac{2e^{2\cdot 1}}{1 + e^{2\cdot 1}}, \\ &3. \quad f(t,y) = t - y, && y(1) = 2e^{-1} + 1 - 1, \\ &4. \quad f(t,y) = -y^2, && y(1) = 1/(1+1). \end{aligned}$$

Szamold ki a kozelito erdmenyt es annak a hibajat, ha

$$\Delta t = 1/10, \;\; 1/50, \;\; 1/100.$$

Feladatok 2: Oldd meg az elozo Feladatok 1.-et a Heun fele kozelitest hasznalva!
Feladatok 3: Oldd meg a Feladatok 1.-et a kovetkezo harmadrendu Rung-Kutta fele kozelitest hasznalva!

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + 1/2 \cdot \Delta t, y_n + 1/2 \cdot k_1 \Delta t), \\ k_3 &= f(t_n + 2/3 \cdot \Delta t, y_n + 2/3 \cdot k_2 \Delta t), \\ y_{n+1} &= y_n + (1/4 \cdot k_1 + 3/4 \cdot k_3)\Delta t. \end{aligned}$$

Feladatok 4: Feladatok 1.-ben $y(1)$ egzakt referencia erteke is meg volt adva. Milyen mertekben befolyasolna a $\Delta t = 1/10,\ \ 1/50$ esetekben mert hibat, ha a pontos ertek helyett a $\Delta t = 1/100$ esetben mert erteket hasznalnank?

0.3.1 DE rendszer

Mintafeladat:
Legyen

$$\ddot{y} = -y, \quad y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ha $T = 5$, mennyi $\vec{y}(T)$?

Megoldas: Octave kod:

```
clear;

function ydot = f(y,t)
  ydot(1) = y(2);
  ydot(2) = -y(1);
endfunction

T = 5;
N = 100;
dt = 1/N;
t = 0;
y(1) = 1;
y(2) = 0;
yvec(1,1) = y(1);
yvec(1,2) = y(2);
timevec(1) = t;

for n = 1 : T*N
   y = y + f(y,t)*dt;
   t = t + dt;
   yvec(n+1,1) = y(1);
   yvec(n+1,2) = y(2);
   timevec(n+1) = t;
endfor

display("num.y = ")
display( [y] )
display("exact.y = ")
display([cos(T),-sin(T)])

tsode = linspace(0,T,T*N+1);
ysode = lsode( "f", [1,0],tsode');

figure(1)
plot(tsode,ysode)
figure(2)
plot(ysode(:,1),ysode(:,2))
```

Feladat:

1. Mennyi lenne a mintafeladatban az Euler modeszer hibaja, ha az N parameter 100 helyett 10, 1000, vagy 10000 lenne?

2. Ismeteld meg ugyanezt az $\ddot{y} = -y - 0.1\dot{y}$, $\quad y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0$ csillapitott harmonikus oszcillatorra is!
3. Ismeteld meg ugyanezt az $\ddot{y} = -y - y^3 - 0.1\dot{y}$, $\quad y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 0$ csillapitott anharmonikus oszcillatorra is! (Itt persze $y(T)$ pontos erteket szamunkra gyakorlatilag lehetetlen kitalalni.)

0.4 Geometrikus nemlinearitas

Mintapelda 1. Egy idealizalt (nulla keresztmetszet, nulla suly, vegtelen hajlekonysag) hur nyugalmi hossza $l_0 = 1.95\, meter$. Ha a hosszat l-re noveljuk, akkor a hur $T(l)$ feszultsegi ereje

$$k = 1000\,\frac{N}{m}, \quad T(l) = k\cdot(l - l_0) = k\cdot l_0\left(\frac{l}{l_0} - 1\right). \tag{2}$$

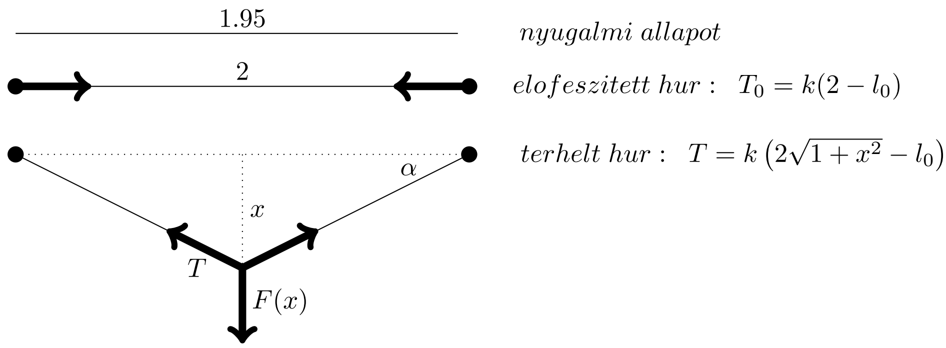
Feszitsuk ki a hurt ket, egymastol vizsintes iranyban 2 metere levo pont kozott. Mekkora $F(x)$ erovel kell lefele huznunk a hur kozeppontjat ahhoz, hogy a kozeppont x meterrel mozduljon lefele?

1. Szamold ki es abrazold $F(x)$-t!
2. Ird fel $F(x)$ linearis kozeliteset $x = 0$ korul, amit jeloljunk $F_{lin}(x)$-szel!
3. Ird fel $F(x)$ kvadratikus kozeliteset $x = 0$ korul!
4. Korulbelul mekkora x deformacio eseten lesz

$$relativHiba(x) = \left|\frac{F(x) - F_{lin}(x)}{F(x)}\right| = 0.001,\ 0.01,\ 0.1.$$

   Vagyis mikor lesz a linearis kozelites relativ hibaja 0.1, 1, 10 szazalek? (Ez az egyenlet megoldhato numerikusan, vagy "grafikusan" is. A grafikus megoldashoz valoszinuleg egy $\lg(x) \leftrightarrow \lg(relativHiba(x))$ grafra lenne szukseg.)

Megoldas:



$$F(x) = 2T\sin\alpha = 2k\left(2\sqrt{1+x^2} - l_0\right)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$F(x)$ Taylor sora (Octave kod):

```
clear;
pkg load symbolic
syms l x l0 k T F
k=1000
l0=sym(195)/sym(100)
l=2*sqrt(1+x^2)
T=k*(l-l0)
F=2*T*x/sqrt(1+x^2)
taylor(F, x, 0, 'order', 6)
```

A log-log grafja a $\lg(x) \leftrightarrow \lg(relativHiba(x))$ fuggvenynek (Octave kod):

```
clear;
k=1000;
l0=195/100;

for i=0:12
x=2^(-i);
l=2*sqrt(1+x^2);
T=k*(l-l0);
F=2*T*x/sqrt(1+x^2);
lgX(i+1)=log10(x);
lgRelError(i+1)=log10(abs((F-100*x)/F));
endfor

plot(lgX,lgRelError)
```

Feladat 1: Vajon van-e ertelme a linearizacionak, ha az 1.95 *meter* hur ket vegpontjat egymastol 1.8 *meter* tavolsagra rogzitjuk?

Feladat 2: Ismeteld meg a mintapeldat, ha a $T(l)$ feszultseg "anyagi" nemlinearitast is tartalmaz:

$$k_1 = 1000\,\frac{N}{m}, \quad k_3 = 10000\,\frac{N}{m}, \quad T(l) = k_1 \cdot (l - l_0) + k_3 \cdot (l - l_0)^3$$

Feladat 3: A mintapeldaban rogzitsunk egy $1\,kg$ tomegu tomegpontot a hur kozepehez, majd allo allpotbol engedjuk el az $x = 1\,meter$ pontbol. Ird fel a pont mozgasat leiro differencialegyenletet, illetve annak a linearizalt verziojat is! Abrazold ezek megoldasait! Jol kozeliti-e a ket gorbe egymast?

0.5 Impulzusvalasz

0.5.1 A Dirac-delta altalanositott fuggveny approximacioja

Feladat 1. Legyen

$$\delta_\epsilon^+(t) = \begin{cases} 1/3, & \text{ha } t \in [0, \epsilon], \\ 0, & \text{maskulonben} \end{cases} \qquad \delta_\epsilon^-(t) = \begin{cases} 1/3, & \text{ha } t \in [-\epsilon, 0], \\ 0, & \text{maskulonben} \end{cases}$$

- Mennyi
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \delta_\epsilon^+(t)$$
- Mennyi
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon^+(t)\,dt$$
- Mennyi
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon^+(t) \sin(t-2)\,dt$$

Feladat 2. Ismeteld meg az elozo feladatot $\delta_\epsilon^-(t)$-re!

0.5.2 Impulzusvalasz

Feladat 3. Oldd meg a kovetkezo DE-eket!

- Mi a
$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 0$$
DE altalanos megoldasa?

- Mi a
$$\frac{d}{dt}G_\epsilon^+(t) + 2G_\epsilon^+(t)(t) = \delta_\epsilon^+(t), \qquad G_\epsilon^+(t)(-77) = 0$$
DE megoldasa?

- Mennyi
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} G_\epsilon^+(t) \ \ ?$$
Vizsgald meg, hogy mennyi a kapott eredmeny hatarerteke, ha $t \to 0^+$, illetve ,ha $t \to 0^-$!

Feladat 4. Ismeteld meg az elozo feladatot $\delta_\epsilon^-(t)$-ra! Hasonlitsd ossze a valaszt az elozo feladat eredmenyevel!

Feladat 5. Ismeteld meg az elozo ket feladatot a
$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4y(t) = 0$$
differencialegyenletre!
A masodik alkerdesben a kezdeti feltetel legyen
$$G_\epsilon^+(-77) = 0, \quad \dot{G}_\epsilon^+(-77) = 0,$$
mig a harmadik eseteben vizsgald $\dot{G}$ ertekeit is:
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} G_\epsilon^+(t), \qquad \lim_{\epsilon \to 0^+} \dot{G}_\epsilon^+(t).$$

0.6 Euler-Lagrange egyenletek

Ird fel az Euler-Lagrange
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$
egyenleteket a kovetkezo $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ Lagrange fuggvenyekhez!

1. $$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2.$$
Hasonlitsd ossze az eredmenyt egy egysegnyi tomegu pont egydimenzios mozgasaval egy $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ potencialis energiamezoben!

2. $$L(x_1, x_2, x_3, \dot{x_1}, \dot{x_2}, \dot{x_3}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}\dot{x_i}^2 + \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i A_i(\vec{x}),$$
ahol
$$\vec{A}(\vec{x}) = (x_2, x_1, x_1 - x_2).$$
Hasonlitsd ossze az eredmenyt egy egysegnyi tomegu es egysegnyi toltesu pont haromdimenzios mozgasaval a $\vec{B} = rot\vec{A}$ magneses terben