

1. (2+2+3+3 pont)

A) Legyen $(\partial_x + 2\partial_t)(2\partial_x - \partial_t)\phi(x, t) = 0$.

1. Keresd meg a PDE halado-hullam megoldasait!

2. Milyen sebességgel mozog a hátrafele, illetve az előrefele mozgo halado-hullam?

B) Legyen

$$\partial_t \phi(t, x) = \partial_x^2 \phi(t, x), \quad \phi(t, x + 2\pi) = \phi(t, x), \quad \phi(0, x) = f(x),$$

ahol $f(x) = 2019 \cdot \operatorname{sgn}(x)$ a $(-\pi, \pi)$ intervallumon.

1. Ird fel egy ortonormalt bazist $L^2(-\pi, \pi], dx$ -nek!

2. Szamold ki f ezen bazis szerinti kifejtését!

3. Mennyi $\phi(t, x)$? Hasznalj Fourier sort ϕ kifejezesere!

2. (4+4+2 pont)

Szamitsd ki a Laplace tr. definicioja alapján a kovetkezoeket:

a) $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(e^{-t} - 3)$.

$F(s) =$

Esetunkben milyen s eseten letezik a Laplace transzformaciot definialo impropius integral?

b) Szamold ki az $f(t) = 1984$ es a $g(t) = t$ fuggvények $h = f * g$ konvoluciojat!

Mennyi $\mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) - \mathcal{L}(h(t))$?

c) $a_{n+1} = a_n - 112$, $a_0 = 78$. Mennyi a sorozat altalanos a_n tagja?

2. ((1+3)+(3+3) pont)

A)

$$u''(x) + u'(x) + xu(x) = 93, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Approximaljuk az u fuggvenyt a kovetkezo vektorral: $\vec{u}_i = u(i\Delta x)$, $i = 1, \dots, 3$, $\Delta x = 1/4$.

- Kozelitsd $u''(x)$ -t az $u(x \pm \Delta x)$, $u(x)$ ertekek segitsegevel!
- Ird fel az ennek megfelelo veges differencias kozeliteset a DE-nek mint egy inhom.lin. egyenletet a $\vec{u}$ vektorra!

B) Veges elemek, variacios elv.

Oszd fel a $[0, 1]$ intervallumot 4 reszre a kovetkezo pontokkal: $x_i = 0.2, 0.4, 0.8$. Legyen $v(x)$ az a folytonos fuggvény, amelyik affine az alintervallumokon es az ertekei az $x = 0, 0.2, 0.4, 0.8, 1$ pontokban a kovetkezoek: $0, v_1, v_2, v_3, 0$.

- Szamitsd ki, mennyi

$$\text{Energy}[v] = \int_0^1 (v')^2 + v' - (1-x)v \, dx$$

kozelitoleg vagy pontosan! Kozelito szamitas eseten add meg, hogy milyen kozelitest hasznaltal!

- Ird fel az EL egyenleteket az $\text{Energy}[u]$ funkcionalra!

3. ((2+2+1)+2+3 pont)

A) $y'' - 2y' + 2y = 5(t-4)^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. Mennyi $Y(s)$? ($\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$)

Hogy nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa?

Mennyi $y(t)$?

B) Legyen $f(x) = 1/x^3$. Ird fel f linearis approximaciojat az $x_0 = 1$ pont korul! Adj minel pontosabb felso korlatot a linearis approximacio hibajara, vagyis $|f(1+\Delta x) - f(1) - f'(1)\Delta x|$ -re, ha $\Delta x \in [0, 0.1]$!

C) Legyen $y'(t) = (y(t)(t+3))$, $y(1) = 2$. Ird fel $y(1+\Delta t)$ masodrendu Taylor polinomjat!