

Név:

Aláírás:

1.(2+2+4+2 pont)

1a. Mi az $y'(t) = 1 - 2\delta(t)$, $y(3) = 3$ DE megoldása?

$$y' = 1 - 2\delta \rightarrow y(t) = t - 2H(t) + C, \text{ ahol } H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$y(3) = 3 \rightarrow 3 - 2 \cdot 1 + C = 3 \rightarrow C = 2$$

$$y(t) = t - 2H(t) + 2$$

2

1b. Számold ki az $f(t) = -t$ és a $g(t) = t - 1$ függvények $h = f * g$ konvolúcióját!

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t -(t-\tau)(\tau-1) d\tau = \\ &= \int_0^t +t + \tau^2 - (t+1)\tau d\tau = \left[t\tau \right]_0^t + \left[\frac{\tau^3}{3} \right]_0^t - \left[(t+1)\frac{\tau^2}{2} \right]_0^t = \\ &= t^2 + \frac{t^3}{3} - (t+1)\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

2

1c1. Mi a $G''(t) + 9G(t) = \delta(t)$ DE retardált fundamentalis megoldása?

$$t < 0: G(t) = 0$$

$$t > 0: G''(t) + 9G(t) = 0 \rightarrow G(t) = C_1 \cos(\sqrt{9}t) + C_2 \sin(\sqrt{9}t)$$

$$t \approx 0: \underbrace{G(0^+) - G(0^-)}_{=0} = 0, \quad \underbrace{G'(0^+) - G'(0^-)}_{=0} = 1$$

így $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{3}$

4

$$\text{tehát } G(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ \frac{1}{3} \sin(3t), & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

1c2. Mi az $y''(t) + 9y(t) = f(t)$, $y(t) = f(t) = 0$, ha $t < 0$ DE megoldása?

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f(s) ds = \int_{-\infty}^t \frac{1}{3} \sin(3(t-s)) f(s) ds$$

2

2. (4+2+4 pont) Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 3y_2 \\ -3y_1 + y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2a) Keresd meg A sajátértékeit és sajátvektorait!

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10 \rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$$

$$\lambda_1 = 1 + 3i$$

$$\begin{pmatrix} 1-(1+3i) & 3 \\ -3 & 1-(1+3i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-3iu + 3v = 0$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 - 3i$$

$$\begin{pmatrix} 1-(1-3i) & 3 \\ -3 & 1-(1-3i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3iu + 3v = 0$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

4 pont

2b) Írd fel a DE általános megoldását!

$$\vec{y}_{\text{alt}}(t) = C_1 e^{(1+3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} + C_2 e^{(1-3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

2 pont

2c) Számold ki a DE partikularis megoldásait!

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -iC_1 + iC_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -iC_1 + iC_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = i/2 \\ C_2 = -i/2 \end{cases}$$

$$\vec{y}_I(t) = \frac{1}{2} e^{(1+3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{(1-3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_{II}(t) = \frac{-i}{2} e^{(1+3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} + \frac{i}{2} e^{(1-3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

3 pont

2d) Mennyi e^{tA} ?

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ +i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+3i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-3i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ +i & -i \end{pmatrix}^{-1}$$

Vagy

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vec{y}_I(t) & \vec{y}_{II}(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Megjegyzés: } \exp \begin{pmatrix} t & 3t \\ 0 & t \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3t \\ -3t & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 3t \\ -3t & 0 \end{pmatrix}^2 + \dots \right)$$

de ez nem nulla, így a Taylor sort folytatni kell a ∞ -ig!

Ez a módszer az $\exp \begin{pmatrix} t & 3t \\ 0 & t \end{pmatrix}$ típusú mátrixok esetén működik jól!

1 pont

2e) Mi az $\frac{d}{dt}\bar{y}(t) = A\bar{y}(t) + \bar{f}(t)$, $\bar{y}(t) = \bar{f}(t) = 0$, ha $t \ll 0$, DE megoldása?

$$\bar{y}(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A} \bar{f}(s) ds$$

2 pont

3. Legyen

$$\partial_t \phi(t, x) = \partial_x^2 \phi(t, x), \quad \phi(t, x + 2\pi) = \phi(t, x), \quad \phi(0, x) = f(x),$$

ahol $f(x) = 4$, ha $x \in [-1, 1]$, amugy 0 az intervallum többi részén.

3a. Írd fel egy ortonormált bazist $L^2([-\pi, \pi], dx)$ -nek!

$$\vec{e}_n = e_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2 pont

3b. Számold ki f ezen bazis szerinti kifejtését!

$$f(x) = \vec{f} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \vec{e}_n, \quad \text{ahol}$$

$$\hat{f}_n = (\vec{e}_n, \vec{f}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 4 dx$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{i}{n} (e^{-in} - e^{+in})$$

4 pont

3c. Mennyi $\phi(t, x)$? Hasznalj Fourier sort ϕ kifejezésére!

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot e^{-n^2 t} \vec{e}_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{-n^2 t} \cdot \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

mivel $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{e}_n = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right) = -n^2 \cdot \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$

2 pont

4. (3+1 pont)

4a. a) Számítsd ki a Laplace tr. definíciója alapján a következőket: $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\text{sgn}(-2t+4))$.

~~$F(s) =$~~

$$\text{sgn}(-2t+4) = \begin{cases} +1, & \text{ha } t < 2 \\ -1, & \text{ha } t > 2 \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \text{sgn}(-2t+4) dt = \int_0^2 +1 \cdot e^{-st} dt + \int_2^{\infty} -1 \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^2 - \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_2^{\infty} = \left(-\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{1}{s} \right) - \left(0 + \frac{e^{-2s}}{s} \right) = -2\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{1}{s}$$

Esetünkben milyen s esetén létezik a Laplace transzformációt definiáló improprius integrál?

$$\text{Re } s > 0$$

4b. (2+4 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_1^2 - 4) \\ (y_1 - 4)(y_2 + 5) \end{pmatrix}$$

Keresd meg a DE fixpontját!

$$y_1^2 - 4 = 0 \rightarrow y_1 = \pm 2$$

$$(\pm 2 - 4)(y_2 + 5) = 0 \rightarrow y_2 = -5 \quad P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ird fel a fixpont körüli linearizált közelítő DE-t!

$$J_{ac} = \begin{pmatrix} \partial_{y_1}(y_1^2 - 4) & \partial_{y_2}(y_1^2 - 4) \\ \partial_{y_1}[(y_1 - 4)(y_2 + 5)] & \partial_{y_2}[(y_1 - 4)(y_2 + 5)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 & 0 \\ y_2 + 5 & y_1 - 4 \end{pmatrix}$$

$$J_{ac}(P_1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$J_{ac}(P_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 - (-2) \\ y_2 - (-5) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 - 2 \\ y_2 - (-5) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix}$$