

Név:

Aláírás:

((3+2+1)+(3+1)) pont
 1A) $y'' - 4y' + 5y = (e^{it} - e^{-it})^2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$. Mennyi $Y(s)$?

$$\sqrt{\quad} = e^{2it} - 2 + e^{-2it}$$

$$(s^2 Y(s) - 3s - 2) - 4(s Y(s) - 3) + 5 Y(s) = \frac{1}{s-2i} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2i}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5} \left[3s - 10 + \frac{1}{s-2i} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2i} \right]$$

Hogy néz ki $Y(s)$ parciális tört felbontása? $(s^2 - 4s + 5) = (s - (2+i))(s - (2-i))$

$$Y(s) = \frac{A}{s-(2+i)} + \frac{B}{s-(2-i)} + \frac{C}{s-2i} + \frac{D}{s+2i} + \frac{E}{s}$$

Mennyi $y(t)$?

$$y(t) = A e^{(2+i)t} + B e^{(2-i)t} + C e^{2it} + D e^{-2it} + E$$

1B1) Mi az $G'''(t) + 9G(t) = \delta(t)$ DE retardált fundamentalis megoldása?

$$t < 0: G(t) = 0$$

$$t \approx 0: \left. \begin{aligned} G(0^+) - G(0^-) &= 0 \\ G'(0^+) - G'(0^-) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow G(0^+) = 0, G'(0^+) = 1$$

$$t > 0: G''(t) + 9G(t) = 0 \Rightarrow G(t) = A \cos(3t) + B \sin(3t) \Rightarrow G(t) = \frac{1}{3} \sin(3t)$$

$$G(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } t < 0 \\ \frac{1}{3} \sin(3t) & , \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

1B2) Mi az $y''(t) + 9y(t) = f(t)$, $y(t) = f(t) = 0$, ha $t \ll 0$ DE megoldása?

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{1}{3} \sin(3[t-\tau]) f(\tau) d\tau$$

4A) (5 pont)

$$y' = y^3 - y.$$

Keresd meg a DE fixpontjait!

$$y^3 - y = 0 \Rightarrow y_1 = -1, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 1$$

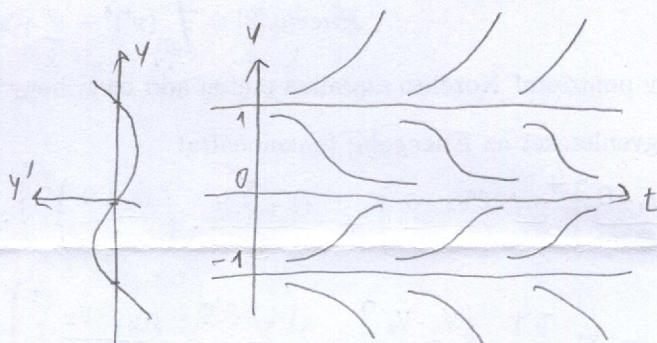
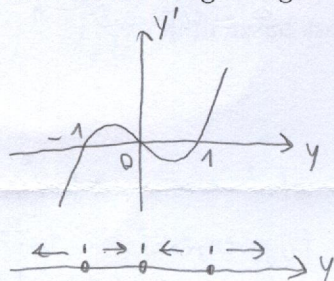
Ird fel a fixpontok körüli linearizált közelítő DE-t! $\frac{d}{dy}(y^3 - y) = 3y^2 - 1$

$$\begin{aligned} y_1 = -1, \quad 3(-1)^2 - 1 = 2 & \quad \left| \quad y_2 = 0, \quad 3 \cdot 0^2 - 1 = -1 \quad \right| \quad y_3 = 1, \quad 3 \cdot 1^2 - 1 = 2 \\ \frac{d}{dt}(y - (-1)) = \frac{d}{dt} \Delta y = 2 \Delta y & \quad \left| \quad \frac{d}{dt}(y - 0) = \frac{d}{dt} \Delta y = -1 \cdot \Delta y \quad \right| \quad \frac{d}{dt}(y - 1) = \frac{d}{dt} \Delta y = 2 \Delta y \end{aligned}$$

Ha $y(0) = -0.5$, mennyi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -1$$

Vázold a DE megoldásgörbeit!



4B). (5 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_1 - 4)(y_2 + 3) \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}$$

Keresd meg a DE fixpontjait!

$$\begin{aligned} (y_1 - 4)(y_2 + 3) = 0 \\ y_1 y_2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 = 0 \text{ vagy } y_2 = -3 \\ y_2 = 0 \text{ vagy } y_1 = 4 \end{aligned} \quad P_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad P_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ird fel a fixpont körüli linearizált közelítő DE-t!

$$\begin{aligned} J_{AC} &= \begin{pmatrix} \partial_{y_1}[(y_1 - 4)(y_2 + 3)] & \partial_{y_2}[(y_1 - 4)(y_2 + 3)] \\ \partial_{y_1}(y_1 y_2) & \partial_{y_2}(y_1 y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_2 + 3 & y_1 - 4 \\ y_2 & y_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$J_{AC}(P_A) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{AC}(P_B) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 - 0 \\ y_2 - (-3) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \vec{\Delta y} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 - 4 \\ y_2 - 0 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix}$$

2. (3+2+2+3 pont) Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y_1 + 3y_2 \\ 3y_1 + 4y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg A sajátértékeit és sajátvektorait!

$$D = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 3^2 = \lambda^2 - 8\lambda + 7 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7$$

$$\begin{array}{l|l} \lambda_1 = 1 & \lambda_2 = 7 \\ \left(\begin{pmatrix} 4-1 & 3 \\ 3 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. & \left. \begin{pmatrix} 4-7 & 3 \\ 3 & 4-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ 3u + 3v = 0 & -3u + 3v = 0 \\ v = -v & v = v \\ \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ird fel a DE általános megoldását!

$$\vec{y}_{\text{alt}}(t) = C_1 e^{1 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Számold ki a DE partikularis megoldásait!

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 3 \\ -C_1 + C_2 = 7 \end{array} \Rightarrow C_1 = -2, C_2 = 5$$

$$\vec{y}_{\text{part}}(t) = -2e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 5e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^t + 5e^{7t} \\ 2e^t + 5e^{7t} \end{pmatrix}$$

Mennyi e^{tA} ?

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix} \quad A = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} S^{-1} = S D S^{-1}$$

$$e^{tA} = e^{t S D S^{-1}} = S e^{tD} S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{7t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{7t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{vagy} \quad = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{7t} + \frac{1}{2}e^t & \frac{1}{2}e^{7t} - \frac{1}{2}e^t \\ \frac{1}{2}e^{7t} - \frac{1}{2}e^t & \frac{1}{2}e^{7t} + \frac{1}{2}e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{y}^{\text{I}}(t) & \vec{y}^{\text{II}}(t) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ahol $\vec{y}^{\text{I}}(t)$ a DE megoldása az $\vec{y}^{\text{I}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, illetve
 $\vec{y}^{\text{II}}(t)$ ————— $\vec{y}^{\text{II}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ kezdeti feltétel mellett.

((2+1)+(3+1)+3 pont)

3a. Legyen $f(t) = 4$, $g(t) = (1-t)$. Mennyi $h(t) = (f * g)(t)$?

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t 4 \cdot (1-\tau) d\tau = \left[4\tau \right]_0^t - \left[4 \frac{\tau^2}{2} \right]_0^t \\ = 4t - 2t^2$$

Mennyi $\mathcal{L}(h) - \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$?

$$= 0.$$

Valóban:

$$F(s) = \frac{4}{s}$$

$$\frac{4}{s} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \right) = \frac{4}{s^2} - 2 \cdot \frac{2}{s^3} = H(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$$

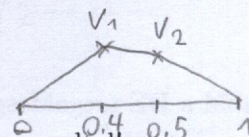
3b.

Veges elemek, variacios elv.

Oszd fel a $[0, 1]$ intervallumot 3 részre a következő pontokkal: $x_i = 0.4, 0.5$. Legyen $v(x)$ az a folytonos függvény, amelyik affine az alintervallumokon és az értékei az $x = 0, 0.4, 0.5, 1$ pontokban a következők: $0, v_1, v_2, 0$.

- Számítsd ki, mennyi

$$\text{Energy}[v] = \int_0^1 (v')^4 - v' + xv^2 dx$$



kozelítőleg vagy pontosan! Közelítő számítás esetén add meg, hogy milyen közelítést használtál!

- Ird fel az EL egyenleteket az $\text{Energy}[u]$ funkcionálra!

$$E[v] = \left(\left[\frac{v_1 - 0}{0.4} \right]^4 - \left[\frac{v_1 - 0}{0.4} \right] + \frac{0 + 0.4}{2} \cdot \left(\frac{v_1 + 0}{2} \right)^2 \right) \cdot 0.4 \\ + \left(\left[\frac{v_2 - v_1}{0.1} \right]^4 - \left[\frac{v_2 - v_1}{0.1} \right] + \frac{0.4 + 0.5}{2} \cdot \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right)^2 \right) \cdot 0.1 \\ + \left(\left[\frac{0 - v_2}{0.5} \right]^4 - \left[\frac{v_2 - v_1}{0.5} \right] + \frac{0.5 + 1}{2} \cdot \left(\frac{v_2 + 0}{2} \right)^2 \right) \cdot 0.5,$$

ahol az x_i és $v(x)$ függvényeket az intervallumok közepén felvett értékekkel közelítettük.

$$\text{Euler-Lagrange: } \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0$$

$$\frac{d}{dx} (4(v')^3 - 1) - x \cdot (2v) = 0 = 12(v')^2 \cdot v'' - 2x \cdot v = 0$$

3c. Legyen $f \in L^2([-\pi, \pi], dx)$ egyenlő hárommal, ha $x < 0$, amúgy meg legyen az értéke kettő. Mennyi $\hat{f}_7$, ha $f(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{inx}$?

$$\hat{f}_7 = \left(\frac{e^{7ix}}{\sqrt{2\pi}}, f(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-7ix} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\pi}^0 e^{-7ix} \cdot 3 dx + \int_0^{\pi} e^{-7ix} \cdot 2 dx \right] \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[3 \cdot \left[\frac{e^{-7ix}}{-7i} \right]_{-\pi}^0 + 2 \cdot \left[\frac{e^{-7ix}}{-7i} \right]_0^{\pi} \right] = \frac{i}{7\sqrt{2\pi}} \left[3 \cdot (1 - (-1)) + 2 \cdot ((-1) - 1) \right] \\ = \frac{2i}{7\sqrt{2\pi}} = \frac{\sqrt{2}i}{7\sqrt{\pi}}$$