

Név:

Aláírás:

1. ((1+4)+(3+2) pont)

A) Veges differenciák.

Keress numerikus egyenleteket a következő DE közelítő megoldására:

$$u''(x) + (1-x)u'(x) = 2-x, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Approximaljuk az u függvényt a következő vektorral: $\vec{u}_i = u(i\Delta x)$, $i = 1, \dots, 3$, $\Delta x = 1/4$.

- Közelítsd $u''(x)$ -t az $u(x \pm \Delta x)$, $u(x)$ értékek segítségével!

$$u''(x) \approx \frac{1}{\Delta x^2} (u(x-\Delta x) - 2u(x) + u(x+\Delta x))$$

- Ird fel az ennek megfelelő veges differencias közelítést a DE-nek mint egy inhom.lin. egyenletet a $\vec{u}$ vektorral!

$$\left\{ \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-1\cdot\Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\cdot\Delta x & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\cdot\Delta x \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1\cdot\Delta x \\ 2-2\cdot\Delta x \\ 2-3\cdot\Delta x \end{bmatrix}$$

$$\uparrow \quad \text{ha } u'(x) \approx \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$\left(\text{más közelítések: } \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

B) Veges elemek, variációs elv.

Oszd fel a $[0, 1]$ intervallumot 2 részre a következő ponttal: $x_i = 0.2$. Legyen $v(x)$ az a folytonos függvény, amelyik affine az alintervallumokon és az értékei az $x = 0, 0.2, 1$ pontokban a következők: $0, v_1, 0$.

- Számítsd ki, mennyi

$$\text{Energy}[v] = \int_0^1 \frac{1}{2} (v' + 3)^2 - (x-1)v \, dx$$

közelítőleg vagy pontosan! Közelítő számítás esetén add meg, hogy milyen közelítést használtál!

$$\begin{aligned} \text{Energy}[v] &\approx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v_1 - 0}{0.2} + 3 \right)^2 - \left(\frac{0+0.2}{2} - 1 \right) \left(\frac{0+v_1}{2} \right) \right] \cdot 0.2 \\ &+ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{0-v_1}{0.8} + 3 \right)^2 - \left(\frac{0.2+1}{2} - 1 \right) \left(\frac{v_1+0}{2} \right) \right] \cdot 0.8 \end{aligned}$$

- Ird fel az EL egyenleteket az $\text{Energy}[u]$ funkcionálra!

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0$$

$$\frac{d}{dx} (v' + 3) - (-(x-1)) = 0$$

$$v'' + (x-1) = 0$$

$$3+2+3+2$$

2. (4+2+4 pont) Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -3y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2a) Keresd meg A sajátértékeit és sajátvektorait!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 0 \rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1: \begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ -3 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-3u + v = 0$$

$$\lambda_2 = 2: \begin{bmatrix} 1-2 & 0 \\ -3 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-1 \cdot u = 0$$

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2b) Írd fel a DE általános megoldását!

$$\vec{y}_{\text{ált}}(t) = C_1 e^{1 \cdot t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 e^{2 \cdot t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2c) Számold ki a DE partikularis megoldásait!

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = C_1 \\ 0 = 3C_1 + C_2 \end{array} \right\} \rightarrow C_1 = 1, C_2 = -3$$

$$\vec{y}_{\text{part}}^I = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t \\ 3e^t - 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = C_1 \\ 1 = 3C_1 + C_2 \end{array} \right\} \rightarrow C_1 = 0, C_2 = 1$$

$$\vec{y}_{\text{part}}^{II} = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

2d) Mennyi e^{tA} ?

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \vec{y}_{\text{part}}^I & \vec{y}_{\text{part}}^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 3e^t - 3e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{vagy } e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{1 \cdot t} & 0 \\ 0 & e^{2 \cdot t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$\uparrow$ $\vec{V}_1$ $\uparrow$ $\vec{V}_2$

3A. (3 pont) $y'' - 2y' + 2y = (1-t)^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. Mennyi $Y(s)$? ($\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$)

$$(s^2 Y(s) - 2s - 3) - 2(sY(s) - 2) + 2Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2} \left(2s + \underbrace{3 - 4}_{-1} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3} \right)$$

3B. (2+3+2 pont) Legyen

$$\partial_t \phi(t, x) = 3\partial_x^2 \phi(t, x), \quad \phi(t, x + 2\pi) = \phi(t, x), \quad \phi(0, x) = f(x),$$

ahol $f(x) = 4$, ha $x \in [-1, 1]$, amugy 0 az intervallum többi részén.

3Ba. Írd fel egy ortonormált bazist $L^2([-\pi, \pi], dx)$ -nek!

$$\vec{e}_n = e_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

3Bb. Számold ki f ezen bazis szerinti kifejtését!

$$\vec{f} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot \vec{e}_n, \quad \text{ahol}$$

$$\hat{f}_n = (\vec{e}_n, \vec{f}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 4 dx$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{i}{n} \left(e^{-inx} - e^{inx} \right)$$

3Bc. Mennyi $\phi(t, x)$? Hasznalj Fourier sort ϕ kifejezésére!

$$\phi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \cdot e^{-3n^2 t} \cdot \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad$$

$$\text{mivel } 3\partial_x^2 \left(\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right) = -3n^2 \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

4a. (4 pont)

$$y' = y^3 - 27 = f(y)$$

Keressd meg a DE fixpontja(i)t!

$$y^3 - 27 = 0 \rightarrow y_{\text{fix}} = 3$$

Ird fel a fixpontok körüli linearizált közelítő DE-t!

$$f'(y) = \frac{df(y)}{dy} = 3y^2, \quad f'(y_{\text{fix}}) = 3 \cdot 3^2 = 27$$

$$\frac{d}{dt}(y - 3) = \frac{d}{dt} \Delta y = 27 \cdot \Delta y$$

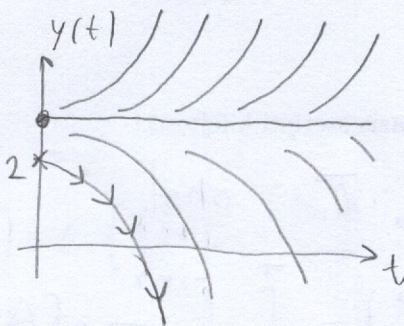
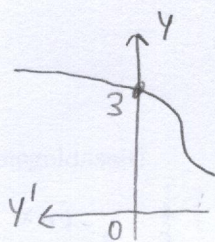
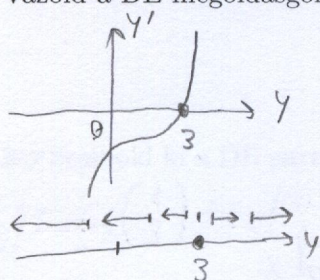
Ha $y(0) = 2$, mennyi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = -\infty$$

(pontosabban nem létezik, mivel a megoldás véges idő alatt a $-\infty$ -hez tart)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 3$$

Vázold a DE megoldásgörbeit!



4b. (2+4 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2^2 - 9 \\ (y_1 + 4)(y_2 - 5) \end{pmatrix}$$

Keressd meg a DE fixpontját!

$$y_2^2 - 9 = 0 \rightarrow y_2 = \pm 3$$

$$(y_1 + 4)(\pm 3 - 5) = 0 \rightarrow y_1 = -4$$

$$P_A = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad P_B = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ird fel a fixpont körüli linearizált közelítő DE-t!

$$J_{ac} = \begin{bmatrix} \partial_{y_1}(y_2^2 - 9) & \partial_{y_2}(y_2^2 - 9) \\ \partial_{y_1}[(y_1 + 4)(y_2 - 5)] & \partial_{y_2}[(y_1 + 4)(y_2 - 5)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2y_2 \\ y_2 - 5 & y_1 + 4 \end{bmatrix}$$

$$J_{ac}(P_A) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{ac}(P_B) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 - (-4) \\ y_2 - (-3) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \bar{\Delta y} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \bar{\Delta y}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 - (-4) \\ y_2 - 3 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \bar{\Delta y} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \bar{\Delta y}$$