

Aláírás:

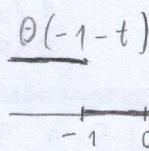
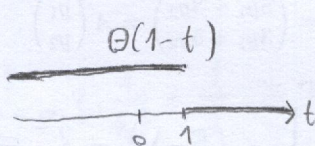
1. (2+4+2+2 pont)

a) Számítsd ki a Laplace tr. definíciója alapján!

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\theta(1-t) + \theta(-1-t))$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} \cdot 1 dt =$$

$$= \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^1 = -\frac{1}{s} (e^{-s \cdot 1} - e^{-s \cdot 0}) = \frac{1}{s} (1 - e^{-s})$$



$$\text{vagyis } \theta(1-t) + \theta(-1-t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{ha } 1 < t \end{cases}$$

az $\mathbb{R}^+$ félegyenesen

$$\rightarrow = t^2 - 2t + 1$$

b) $y'' - 4y = (t-1)^2$, $y(0) = -5$, $y'(0) = 6$. Mennyi $Y(s)$? ($\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$) Írd fel $Y(s)$ parciális tört felbontásának az alakját, és add meg, hogy mennyi $y(t)$!

$$(s^2 Y(s) - (-5)s - 6) - 4Y(s) = \frac{2}{s^3} - 2 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 4} \left(-5s + 6 + \frac{2}{s^3} - 2 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

$\underbrace{s^2 - 4}_{(s-2)(s+2)}$

$$= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s^2} + \frac{E}{s}$$

$$y(t) = A e^{-2t} + B e^{2t} + \frac{C}{2} t^2 + D t + E$$

$\rightarrow$ mivel $\mathcal{L}\left(\frac{C}{2} t^2\right) = \frac{C}{2} \cdot \frac{2!}{s^3} = \frac{C}{s^3}$

c) Legyen $x_{n+1} = x_n - 8$, $x_0 = 13$. Mennyi x_n ?

$$x_n \text{ egy számtani sorozat, } x_n = 13 - 8n$$

(a fixpont körüli linearizálás nem alkalmazható, mivel nincs fixpont:

$$x_{\text{fix}} = x_{\text{fix}} - 8 \quad \text{-nak nincs megoldása}$$

d) Írd át a következő DE rendszert elsőrendű időfüggetlen DE rendszerre!

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 y_2^2 \\ t^2 y_2' + y_1 + t^3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ y_1 y_2^2 \\ s^2 v_2 + y_1 + s^3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. ((3+1+2)+4 pont)

A)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y_1 + 3y_2 \\ 3y_1 + 5y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Keress meg A sajátértékeit és sajátvektorait!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 3^2 = \lambda^2 - 10\lambda + 16 \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8$$

$$\boxed{\lambda_1 = 2} \quad A - 2 \cdot E = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3x + 3y = 0 \rightarrow y = -x$$

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 8} \quad A - 8E = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-3x + 3y = 0, \quad 3x - 3y = 0 \rightarrow x = y$$

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ird fel a DE általános megoldását!

$$\vec{y}_{\text{alt}}(t) = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{8t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Számold ki a DE partikularis megoldását!

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 + C_2 \\ 1 = -C_1 + C_2 \end{cases} \rightarrow C_2 = 2, \quad C_1 = 1$$

$$\vec{y}_{\text{part}} = 1 \cdot e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot e^{8t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} + 2e^{8t} \\ -e^{2t} + 2e^{8t} \end{bmatrix}$$

Vagy

$$\vec{y}_{\text{part}}(t) = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{8t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

B) Ird fel a következő DE megoldását!

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y_1 \\ 3y_1 + 5y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

mivel ezek felcserélhetőek

$$\exp(tA) = \exp\left(\begin{bmatrix} 5t & 0 \\ 3t & 5t \end{bmatrix}\right) = \exp\begin{bmatrix} 5t & 0 \\ 0 & 5t \end{bmatrix} \cdot \exp\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3t & 0 \end{bmatrix}$$

$$= e^{5t} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3t & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3t & 0 \end{bmatrix}^2 + \dots \right)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3t & 0 \end{bmatrix}^2}_{= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$= e^{5t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tehát } \vec{y}(t) = e^{tA} \vec{y}(0) = e^{5t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{5t} \begin{bmatrix} 3 \\ 9t+1 \end{bmatrix}$$

3. (5 × 2 pont)

$$y' + 5y = (t+1)^3, \quad y(0) = 2. \quad \text{Mennyi } Y(s)? \quad (\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}})$$

$$\underbrace{(t+1)^3}_{\rightarrow t^3 + 3t^2 + 3t + 1}$$

$$(sY(s) - 2) + 5Y(s) = \frac{3!}{s^4} + 3 \cdot \frac{2!}{s^3} + 3 \cdot \frac{1!}{s^2} + \frac{1}{s} = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+5} \left(2 + \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

Oldd meg a $G' + 5G = \delta(t)$ egyenletet, ahol $G(t) = 0$, ha $t < 0$!

$$\boxed{t < 0}$$

$G(t) = 0$, mivel retardált megoldást keresünk

$$\boxed{t \approx 0}$$

$G(t) \approx \theta(t)$, mivel $\theta(t)$ megoldja a $\theta'(t) = \delta(t)$ egyenletet (és $\theta(t) = G(t) = 0$, ha $t < 0$)

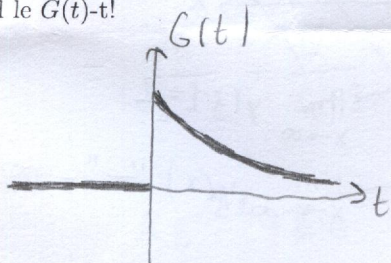
$$\boxed{t > 0}$$

Oldd meg: $y' + 5y = 0$, $y(0) = G(0^+) = \theta(0^+) = 1$

$$\rightarrow y(t) = e^{-5t}$$

$$\text{Tehát } G(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ e^{-5t}, & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

Rajzold le $G(t)$ -t!



Mennyi $G(t)$ Laplace transzformáltja?

$$\mathcal{L}(G(t)) = \frac{1}{s+5} \quad \left(\text{a feladat első részében } Y(s) = \frac{1}{s+5} \cdot (\dots) \right)$$

$$\text{vagy } \mathcal{L}(G(t)) = \mathcal{L}(e^{-5t}) = \frac{1}{s - (-5)} = \frac{1}{s+5}$$

Írd fel a $y' + 5y = f(t)$ egyenlet megoldását, ha $y(t) = f(t) = 0$ amikor $t < 0$!

$$y(t) = (G * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-5(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

4. (5+5 pont)

$$y' = -y^3 + 8.$$

Keressd meg a DE fixpontjait!

$$-y^3 + 8 = 0 \rightarrow y_1 = 2$$

Írd fel a fixpontok körüli linearizált közelítő DE-t!

$$\frac{d}{dy}(-y^3 + 8) = -3y^2$$

$$\frac{d}{dx}(y-2) = \frac{d}{dx} \Delta y = (-3 \cdot 2^2) \Delta y = -12 \Delta y$$

Ha $y(0) = -0.5$, mennyi $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) =$ 2

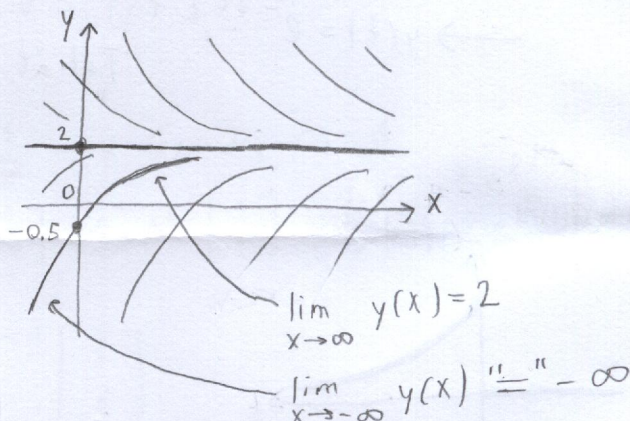
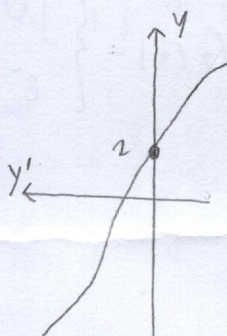
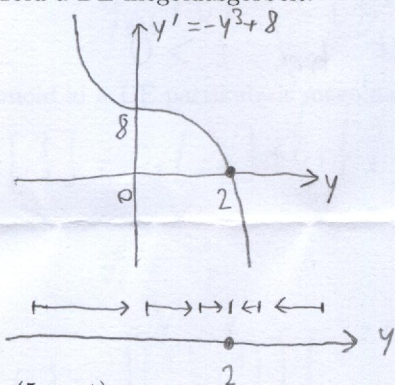
Megjegyzés:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$$

Igazából $y(x)$ nem létezik túl nagy negatív x -re,

$y(x) \rightarrow -\infty$, ha $x \rightarrow x_{\infty}^+$, ahol x_{∞} valamely 0-nál kisebb szám

Vázold a DE megoldásgörbeit!



3b. (5 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 - 6 \\ (y_1 - 3)(y_2 + 4) \end{pmatrix}$$

Keressd meg a DE fixpontait!

$$y_2 - 6 = 0$$

$$\rightarrow y_2 = 6 \rightarrow (y_1 - 3)(6 + 4) = 0 \rightarrow y_1 = 3$$

$$(y_1 - 3)(y_2 + 4) = 0$$

$$\text{vagyis a fixpont } \vec{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Írd fel a fixpont körüli linearizált közelítő DE-t!

$$J_{ac} = \begin{bmatrix} \partial_{y_1}[y_2 - 6] & \partial_{y_2}[y_2 - 6] \\ \partial_{y_1}[(y_1 - 3)(y_2 + 4)] & \partial_{y_2}[(y_1 - 3)(y_2 + 4)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ y_2 + 4 & y_1 - 3 \end{bmatrix}$$

$$J_{ac}(\vec{z}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 + 4 & 3 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

linearizált DE:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 - 3 \\ y_2 - 6 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta y_2 \\ 10 \cdot \Delta y_1 \end{bmatrix}$$