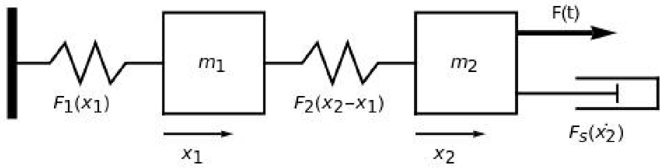
1 Beadható problémasor, kéttest probléma:



"Feladat": Keresd és vizsgáld meg a következő DE megoldásait különböző kezdeti és peremfeltételek, illetve paraméterek és függvények eseteiben!

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1}\left[-F_1(x_1(t)) + F_2(x_2(t) - x_1(t))\right] \\ \frac{1}{m_2}\left[-F_2(x_2(t) - x_1(t)) - F_s(\dot{x}_2(t)) + F(t)\right] \end{bmatrix} \tag{1}$$

1.1 Homogén lineáris rendszer, nincs súrlódás

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1(t) + [x_2(t) - x_1(t)] \\ -[x_2(t) - x_1(t)] \end{bmatrix} = \hat{A}\vec{x}(t). \tag{2}$$

1.1.1 Energiamegmaradás

Igazold az energiamegmaradás törvényét:

$$0 = \frac{d}{dt}E(t) = \frac{d}{dt}\left(E_{kinetikus} + E_{potencialis}\right) \tag{3}$$
$$E = \frac{1}{2}\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2\right) + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + (x_2 - x_1)^2\right).$$

1.1.2 Hamilton függvény

Igazold, hogy a mozgásegyenlet felírható a következő alakban

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + (x_2 - x_1)^2\right), \tag{4}$$
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_{x_1}H \\ \partial_{x_2}H \\ \partial_{p_1}H \\ \partial_{p_2}H \end{bmatrix}$$

1.1.3 Euler-Lagrange egyenletek

Igazold, hogy a mozgásegyenlet felírható a következő alakban

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2\right) - \frac{1}{2}\left(x_1^2 + (x_2 - x_1)^2\right), \tag{5}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2.$$

1.1.4 Elsőrendű alak

Írd át (2)-t egy négydimenziós elsőrendű

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = A\vec{y} \tag{6}$$

rendszerre, bevezetve $\vec{y} = (x_1, x_2, v_1, v_2)^T = (x_1, x_2, \dot{x_1}, \dot{x_2})^T$ állapotvektort!

1.1.5 Saját rendszerek

Keresd meg $\hat{A}$ saját rendszerét, és írd fel (2) általános megoldását! Próbáld ennek a segítségével felírni A saját rendszerét, illetve (6) általános megoldását!

1.1.6 Exponenciális mátrix

Számold ki, hogy mennyi

$$\exp(tA). \tag{7}$$

1.1.7 A megoldások ábrázolásának a problémája

Ábrázold a DE megoldásait minél többfelé módon!

1.1.8 Numerikus módszerek hibai

A DE egzakt megoldása segítségével tanulmányozd az Euler, illetve a Heun numerikus módszerek hibainak a függését a lepésköztől!

1.2 Csillapított lineáris rendszer

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} -x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t)+[x_2(t)-x_1(t)] \\ -[x_2(t)-x_1(t)]-\alpha\dot{x}_2(t)+F(t) \end{bmatrix}, \qquad \alpha > 0 \tag{8}$$

1.2.1 Lyapunov függvény

Legyen $F(t) = 0$. Bizonyítsd be, hogy

$$0 > \frac{d}{dt}E(t) = \frac{d}{dt}\left(E_{kinetikus} + E_{potencialis}\right) \tag{9}$$
$$E = \frac{1}{2}\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2\right) + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + (x_2 - x_1)^2\right),$$

ha $\alpha > 0$.

1.2.2 Kritikus csillapítás

Legyen $F(t) = 0$. Írd fel (8)-t elsőrendű alakban! Tanulmányozd az így kapott A együtthatómátrixnak a sajátértékeinek a függését α-tol! Milyen α_c kritikus érteknél változik meg a komplex sajátértékeknek a száma? Ábrázold a sajátértékeket mint α függvényét!

1.2.3 Exponenciális mátrix

Keresd meg A saját rendszerét és írd fel a rendszer $\exp(tA)$ evolúciós mátrixát! Végezd ezt el amikor α egy kicsit nagyobb vagy egy kicsit kisebb, mint α_c ! Ábrázold az exponenciális mátrix oszlopait!

1.2.4 Frekvenciaválasz

Legyen $\alpha = 0.2$, $F(t) = e^{i\omega t}$.

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}[F(t)], \tag{10}$$
$$[z] = [0.5\;0.5\;0\;0]\cdot[x_1\;x_2\;v_1\;v_2]^T.$$

Mennyi $\vec{H}(\omega)$, ha

$$\vec{y}(t) = e^{i\omega t}\vec{H}(\omega) \tag{11}$$

megoldja a DE-t? Ábrázold $z(\omega) =$ $[0.5\;0.5\;0\;0]\;\vec{H}(\omega)$ -t különböző módokon mint ω függvényét!

1.2.5 Impulzusválasz

Legyen $\alpha = 0.2$, illetve legyen $F(t) = \delta_\epsilon(t)$ valamelyik a következő függvényekből:

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon, & \text{ha } t\in[0,\epsilon] \\ 0, & \text{amugy.} \end{cases}, \qquad \delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon^2}t, & \text{ha } t\in[0,\epsilon] \\ \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon^2}t, & \text{ha } t\in[-\epsilon,0] \\ 0, & \text{amugy.} \end{cases}, \qquad \delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon}\exp\left(-\frac{t^2}{2\epsilon^2}\right) \tag{12}$$

Rajzold le ezeket a közelítő Dirac-delta függvényeket, ha ϵ egy kis pozitív szám. Győzd meg magad arról, hogy ezeknek a függvényeknek az értéké nagyon kicsi, ha $|t| \gg \epsilon$, és ezen felül az integráljuk a $(-\infty, \infty)$ intervallumon pontosan 1. Keresd meg (10) megoldását az

$$\vec{y}(-0.5) = [0,0,0,0]^T$$

kezdeti feltétel mellett, majd hasonlítsd össze a kapott megoldást (10) megoldásával, ha

$$F(t) = 0,\ \vec{y}(0) = [0,0,0,1]^T.$$

Készíts ábrákat a megoldások összehasonlításairól!

1.3 Nemlineáris rendszer, nincs súrlódás

$$
\begin{aligned}
m_1 = m_2 = 1, \quad -F_1(x) = F_2(x) = x + x^3, \quad F_s(\dot{x}) = 0, \\
\frac{d^2}{dt^2}\left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} F_1(x_1(t)) + F_1(x_2(t) - x_1(t)) \\ -F_1(x_2(t) - x_1(t)) + F(t) \end{array}\right].
\end{aligned} \tag{13}
$$

1.3.1 Energiamegmaradás

Igazold az energiamegmaradás törvényét, ha $F(t) = 0$.

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \\
0 = \frac{d}{dt}E(t) &= \frac{d}{dt}\left(E_{kinetikus} + E_{potencialis}\right) \\
E &= \frac{1}{2}\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2\right) + \left(V(x_1) + V(x_2 - x_1)\right).
\end{aligned} \tag{14}
$$

1.3.2 Hamilton függvény

Legyen $F(t) = 0$. Igazold, hogy a mozgásegyenlet felírható a következő alakban

$$
H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \left(V(x_1) + V(x_2 - x_1)\right), \tag{15}
$$

$$
\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \partial_{x_1}H \\ \partial_{x_2}H \\ \partial_{p_1}H \\ \partial_{p_2}H \end{array}\right]
$$

1.3.3 Euler-Lagrange egyenletek

Legyen $F(t) = 0$. Igazold, hogy a mozgásegyenlet felírható a következő alakban

$$
L = \frac{1}{2}\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2\right) - \left(V(x_1) + V(x_2 - x_1)\right), \tag{16}
$$

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2.
$$

1.3.4 Elsőrendű alak

Írd át (15)-t egy négydimenziós elsőrendű

$$
\frac{d}{dt}\vec{y} = \vec{f}(\vec{y}) \tag{17}
$$

rendszerre, bevezetve $\vec{y} = (x_1, x_2, v_1, v_2)^T = (x_1, x_2, \dot{x_1}, \dot{x_2})^T$ állapotvektort!

1.3.5 Linearizáció

Igazold, hogy (17) linearizációja $\vec{y} = \vec{0}$ korul éppen (6) !

1.3.6 A linearizáció hibája

Számold ki a linearizált egyenlet jóslatát $\vec{y}(t_{end})$-re, ha

$$
\vec{y}(0) = [1/2^n, 0, 0, 0]^T, \;\; n = 10, 9, \ldots, 0, -1, \qquad \text{es} \quad t_{end} = 2^0, 2^1, \ldots, 2^5. \tag{18}
$$

Hasonlítsd össze a $\vec{y}(t_{end})$-re kapott numerikus eredményekkel! Mikor tekinthető a lineáris közelítés használata észszerűnek?

1.4 Nemlineáris rendszer, nincs súrlódás, számítógépes kísérletek

1.4.1 Nemperiodikus jelek frekvenciaspektruma

1. Számold ki az $f(t) = \cos(t)$ függvény Fourier sorát a következő intervallumokon:

$$
[0, \pi], \; [0, 2\pi], \; [0, 13\pi], \; [0, 13\pi + 1], \tag{19}
$$

az $L^2([0, L], dt)$ Hilbert térben a

$$
v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{in2\pi x/L}, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{20}
$$

ortonormált bázisban! Ábrázold $\hat{f}_n$ együtthatókat a Hertz-ben mert $freq_n = n/L$ függvényeként is! Hasonlítsd ezt össze a Diszkrét Fourier Transzformálttal:

$$dft_n = \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon^{-n \cdot k} f(k\Delta t), \quad \Delta t = L/N, \quad \epsilon = e^{2i\pi/N}. \tag{21}$$

2. Ismételd meg az előző feladatot a csillapított rezgőmozgást leíró $f(t) = e^{-0.1t}\sin(t)$ függvényre is!
3. Ismételd meg az előző két feladatot a

$$g(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\pi t/L)\right) f(t) \tag{22}$$

függvényre is!

1.4.2 A nemlineáris DE megoldásainak a frekvenciaspektruma

Oldd meg numerikusan (17)-t a $t \in [0, 50]$ időintervallumon, a következő $\vec{y}(0)$ kezdeti feltételek mellett:

$$[0.1,\ 0,\ 0,\ 0]^T, \quad [0,\ 0.1,\ 0\ ,0]^T, \quad [2, 0, 0, 0]^T, \quad [0, 2, 0, 0]^T. \tag{23}$$

Számold ki és ábrázold a megoldások DFT-ját!

1.4.3 A megoldások érzékenysége a kezdeti feltételre

Oldd meg numerikusan (17)-t a $t \in [0, 50]$ időintervallumon, a következő $\vec{y}(0)$ kezdeti feltételek mellett:

$$[0.1, 0, 0, 0]^T, \quad [0.1 + 10^{-6},\ 0,\ 0,\ 0]^T. \tag{24}$$

1. Ábrázold az két megoldás állapotvektorainak a távolságát mint az idő függvényét!
2. Végezd el ugyanezt a távolság logaritmusara is!
3. Milyen $[0, T] \subset [0, 50]$ intervallumon belül marad a távolság 10^{-2} alatt?
4. Melyik állítás igaz a $[0, T]$ intervallumon?
   - A távolság növekedése jól leírható egy lineárisan növekvő függvénnyel,
   - A távolság növekedése jól leírható egy exponenciálisan növekvő függvénnyel.

   Próbáld megkeresni a legjobban illeszkedő ilyen görbét!

- Ismételd meg mindezt a

$$[2, 0, 0, 0]^T, \quad [2 + 10^{-6},\ 0, 0, 0]^T \tag{25}$$

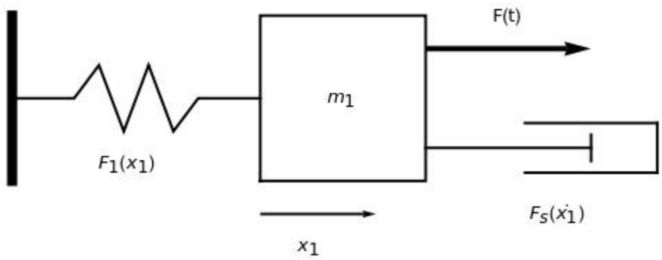
  kezdeti értékek párja esetében is!

- Ismételd meg mindezt a

$$[0.1, 0, 0, 0]^T, \quad [0.1,\ 10^{-6},\ 0,\ 0,\ 0]^T, \qquad [2, 0, 0, 0]^T, \quad [2,\ 10^{-6},\ 0, 0, 0]^T \tag{26}$$

  kezdeti értékek párjaira is!

2 Megoldasok az egytest problemahoz



"Feladat": Keresd és vizsgáld meg a következő DE megoldásait különböző kezdeti és peremfeltételek, illetve paraméterek és függvények eseteiben!

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1(t) = \frac{1}{m_1}\left[-F_1(x_1(t)) - F_s(\dot{x}_1(t)) + F(t)\right] \tag{27}$$

Szoftver: Octave

- Letoltes: `http://www.octave.org`
  Extra csomagok installációja és betöltése az Octave parancssorról:

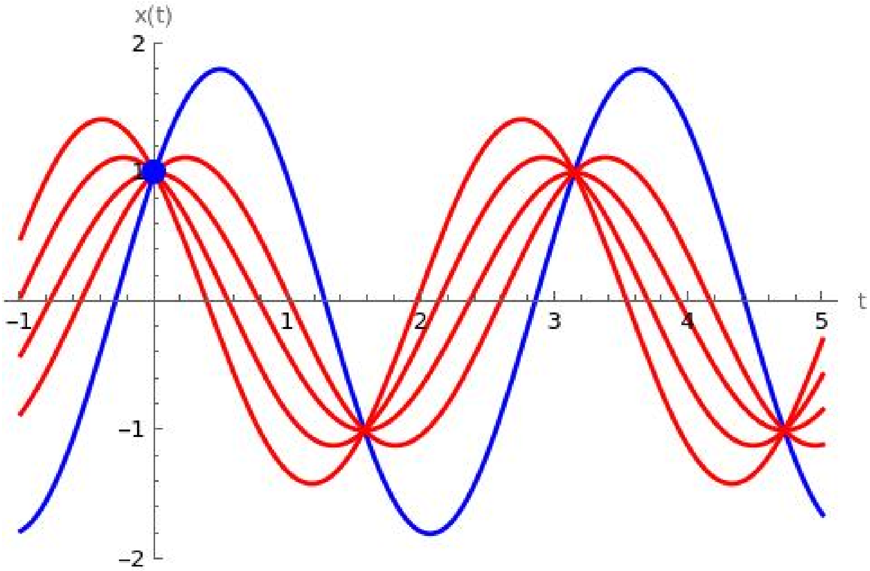
  ```
  pkg install -forge symbolic
  pkg install -forge statistics
  pkg load symbolic
  pkg load statistics
  ```

- A GNU Octave programozási nyelv: `http://nyelvek.inf.elte.hu/leirasok/Octave/`
- Bevezetes:
  1. Matlab/Octave a geoinformatikában, 5-22. oldalak.
  2. Jason Lachniet, Introduction to GNU Octave

3 $\ddot{x} = -4x$

3.1 masodrendu DE.

$$\begin{gathered}
\text{altalanos megoldas:} \\
\lambda^2 = -4 \implies \lambda_1 = 0 + 2i, \lambda_2 = 0 - 2i, \\
\implies \\
x(t) = a_1 e^{(0+2i)t} + a_2 e^{(0-2i)t} = e^{0t}(c_1 cos(2t) + c_2 \sin(2t)) \\
= c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \\
= \frac{1}{2}(c_1 - ic_2)e^{2it} + \frac{1}{2}(c_1 + ic_2)e^{-2it} \\
\text{kezdeti feltetel:} \\
\{x(0) = 1, x'(0) = 3\}, \\
\text{partikularis megoldas:} \\
x(t) = \frac{3}{2}\sin(2t) + \cos(2t), \\
= \left(\frac{1}{2} + \frac{3i}{4}\right)e^{-2it} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3i}{4}\right)e^{2it} \\
= \frac{1}{4}\sqrt{13}\left(e^{-2i\left(t-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)} + e^{2i\left(t-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)}\right) \\
= 0.901388\left(e^{-2i(t-0.491397)} + e^{2i(t-0.491397)}\right) \\
= 1.80278\cos(2(t - 0.491397))
\end{gathered}$$



Octave:

```
# pkg install -forge symbolic
# pkg load symbolic
clear all
syms t x(t)
de = diff(x,t,2)+ 4*x(t)
gensol = dsolve( de == 0 )
partsol = dsolve( de == 0 , x(0) == 1, diff(x,t)(0) == 3 )
z = 1/2 + 3/4 * i;
[ z, 2 * abs( z ), arg( z )/2 ]
fplot( partsol, [0,5] )
```

3.2 elsorendu DE.

DE:

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = A\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \vec{y}(t),$$

sajatrendszer:

$$\lambda_1 = 2i, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = -2i, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix},$$

altalanos megoldas:

$$\vec{y}(t) = c_1 e^{2it} \begin{bmatrix} -i \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2it} \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix}$$

diagonalizacio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & i \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

("valos kanonikus alak: ")

$$= [Re(\vec{v}_1),\ Im(\vec{v}_1)] \begin{bmatrix} Re(\lambda_1) & Im(\lambda_1) \\ -Im(\lambda_1) & Re(\lambda_1) \end{bmatrix} [Re(\vec{v}_1),\ Im(\vec{v}_1)]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

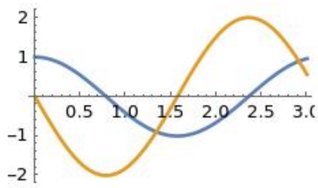
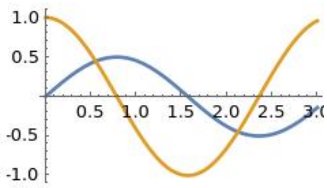
exponencialis matrix:

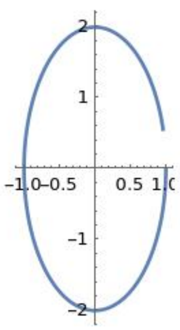
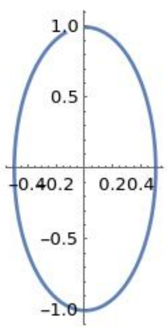
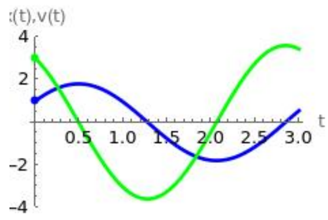
$$\exp\left(t \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -i & i \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(0+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(0-2i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

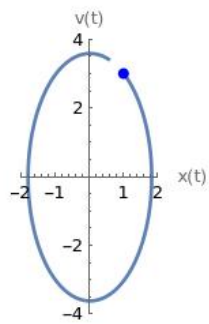
$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} e^{0 \cdot t} \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(2t) & \frac{1}{2}\sin(2t) \\ -2\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$$

partikularis megoldas:

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} \cos(2t) & \frac{1}{2}\sin(2t) \\ -2\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix}$$

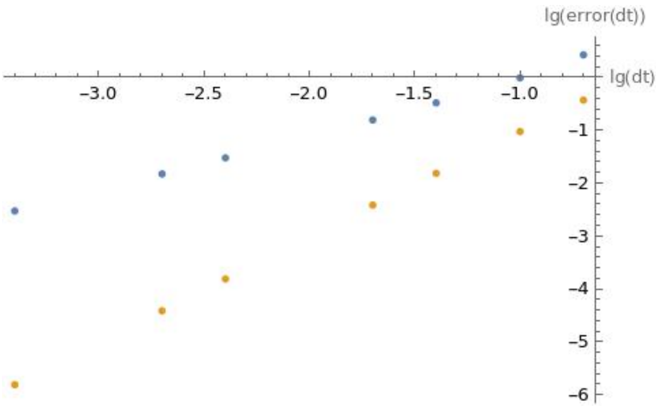


Octave:

```
A = [ 0 1; -4 0 ]
[V, D] = eig( A )
VDVinv = V * D * inv( V )
T = [ real(V(1,1)), imag(V(1,1));  real(V(2,1)), imag(V(2,1)) ]
Dreal = [ real(D(1,1)), imag(D(1,1)); -imag(D(1,1)), real(D(1,1)) ]
TDrealTinv = T * Dreal * inv( T )

function xdot = force( x, t )
  xdot = [ 0 1; -4 0 ] * x;
endfunction

n = 101;
ts = linspace( 0, 2.5, n)';
ysol1 = lsode( "force", [ 1; 0 ], ts );
ysol2 = lsode( "force", [ 0; 1 ], ts );

subplot( 2,2,1 )
plot( ts, ysol1 )
subplot( 2,2,3 )
plot( ysol1(:,1), ysol1(:,2))
subplot( 2,2,2 )
plot( ts, ysol2 )
subplot( 2,2,4 )
plot( ysol2(:,1), ysol2(:,2))
```

3.3 Euler, Heun módszerek hibái

$$\text{Euler:} \quad y(t+\Delta t) \leftarrow y(t) + f(t, y(t))\Delta t,$$
$$\text{Heun:} \quad y(t+\Delta t) \leftarrow y(t) + \frac{1}{2}\left[(f(t, y(t)) + f(t+\Delta t, y(t) + f(t, y(t))\Delta t)\right]\Delta t,$$
$$\text{DE:} \quad \ddot{x} = -4x, \quad x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 3,$$
$$\text{megoldas:} \quad x(2) = \cos(2\cdot 2) + \frac{3}{2}\sin(2\cdot 2),$$
$$\Delta t: \quad 2/10,\ 2/20,\ 2/50,\ 2/100,\ 2/500,\ 2/1000,\ 2/5000.$$



Lineáris közelítés:

$$\text{Euler:} \quad \lg(error((\Delta t)) \approx 1.07659 + 1.07638\lg(\Delta t),$$
$$\text{Heun:} \quad \lg(error((\Delta t)) \approx 0.966825 + 1.99502\lg(\Delta t).$$

Tehát pl. a Heun módszer hibája ezek szerint

$$error((\Delta t) \approx 10^{0.966825}\cdot \Delta t^{1.99502}.$$

Az egzakt exponens 2 lenne 1.99502 helyett (lásd Wikipédia: Richardson-extrapoláció).

Octave:

```
function xt = euler( x0, t, dt )
  n = t/dt;
  xold = x0;
  for i = 1:n
    xnew = xold + dt * [ 0 1; -4 0 ] * xold;
    xold = xnew;
  endfor;
  xt = xold;
endfunction

function xt = heun( x0, t, dt )
  n = t/dt;
  xold = x0;
  for i = 1:n
    xpred = xold + dt * [ 0 1; -4 0 ] * xold;
    xnew = xold + dt *  (1/2) * ( [ 0 1; -4 0 ] * xold + [ 0 1; -4 0 ] * xpred );
    xold = xnew;
  endfor;
  xt = xold;
endfunction

x2exact = [cos(2*2) + 3/2 * sin(2*2); -2*sin(2*2) + 3 * cos(2*2) ]
x2e = euler( [1;3], 2, 2/100)
x2h = heun( [1;3], 2, 2/100)

dts = [ 2/10,2/20,2/50,2/100,2/500,2/1000,2/5000 ];
for i = 1:length( dts )
  lgdts(i) = log10( dts(i ));
  lgeulererror(i) = log10(norm( euler( [1;3], 2, dts(i) ) - x2exact ));
  lgheunerror(i)  = log10(norm( heun(  [1;3], 2, dts(i) ) - x2exact ));
endfor;

eulererr = lgeulererror
eulerfit = polyfit( lgdts,  lgeulererror, 1 )
heunerr = lgheunerror
heunfit = polyfit( lgdts,  lgheunerror, 1 )
plot( lgdts,lgeulererror,'x',  lgdts,lgheunerror,'+' )
```

4 $\ddot{x} = -4x - \alpha\dot{x}$

4.1 DE

Alulcsillapitott oszcillator:

$$\ddot{x} = -4x - 0.2\dot{x},$$
$$\lambda^2 = -4 - 0.2\lambda \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = -0.1 \pm 1.997i,$$
$$x(t) = e^{-0.1}(c_1 \cos(1.997t) + c_1 \sin(1.997t)),$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -0.2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.022 + 0.446i & 0.022 - 0.446i \\ -0.894 & -0.894 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1 + 1.997i & 0 \\ 0 & -0.1 - 1.995i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0223 + 0.446i & 0.022 - 0.446i \\ -0.894 & -0.894 \end{bmatrix}^{-1},$$
$$\exp(tA) = e^{-0.1t} \begin{bmatrix} \cos(1.997t) + 0.050 \sin(1.997t) & 0.500 \sin(1.997t) \\ -2.005 \sin(1.997t) & \cos(1.997t) - 0.050 \sin(1.997t) \end{bmatrix},$$

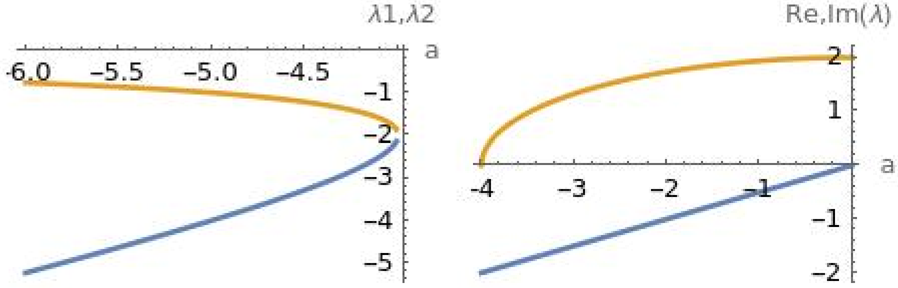


Figure 1: Bal abra: tulcsillapitott eset ($a \in (-\inf, -4)$), ket negativ valos gyok, Jobb abra: alulcsillapitott eset, ($a \in (-4, 0]$), ket konjugalt komplex gyok.

Tulcsillapitott oszcillator:

$$\ddot{x} = -4x - 5\dot{x},$$
$$\lambda^2 = -4 - 5\lambda \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -4, \;\; \lambda_2 = -1,$$
$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-1t},$$
$$A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix};$$
$$D = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -0.242 & 0.707 \\ 0.970 & -0.707 \end{bmatrix},$$
$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} \frac{4e^{-t}}{3} - \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{e^{-t}}{3} - \frac{1}{3}e^{-4t} \\ \frac{4e^{-4t}}{3} - \frac{4e^{-t}}{3} & \frac{4e^{-4t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} \end{bmatrix}$$

Kritikus csillapitas:

$$\ddot{x} = -4x - 4\dot{x},$$
$$\lambda^2 = -4 - 4\lambda \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = -2,$$
$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t},$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1},$$
$$\exp(tA) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 - 2t & t \\ -4t & 1 - 2t \end{bmatrix}.$$

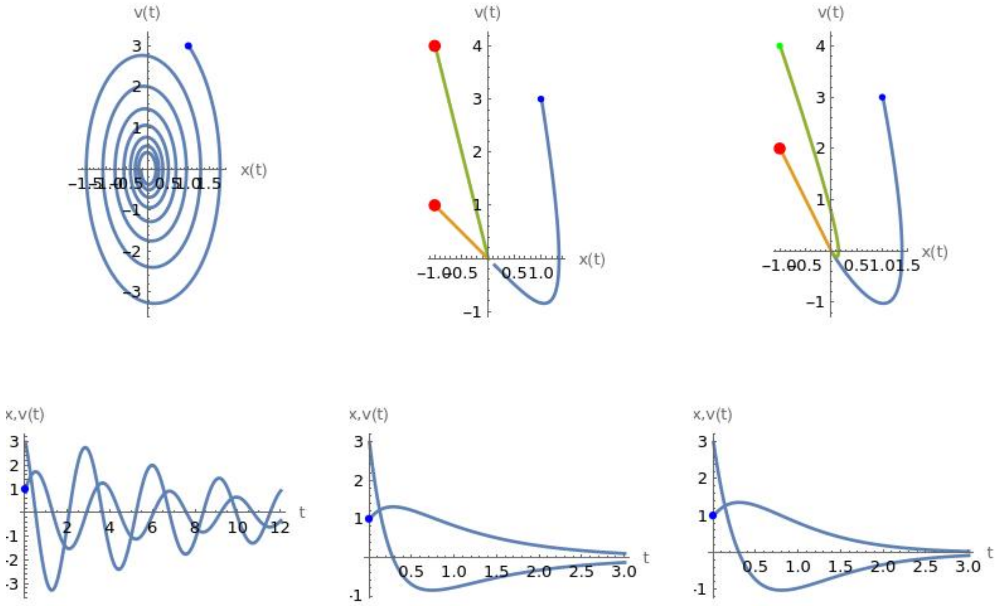


Figure 2: Felso kozepso abra: a piros pontok ket sajatvektort jelolnek, ezekben az evolucio a sajatvektorok egyenesein tortenik. Felso jobb abra: a kritikus csillapitas esetben csak egy "sajatirany" letezik.

4.2 Frekvencia valasz

$$\ddot{x} + 4x + 0.3\dot{x} = e^{i\omega t}, \quad \frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -0.3 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\omega t},$$

$$x(t) = h(\omega) e^{i\omega t} \implies h(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 0.2 i\omega + 4},$$

$$\vec{x}(t) = \vec{H}(\omega) e^{i\omega t} \implies \vec{H}(\omega) = \begin{bmatrix} i\omega & -1 \\ 4 & i\omega + 0.3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad H_1(\omega) = [1, 0]\vec{H}(\omega) = h(\omega).$$

Octave:

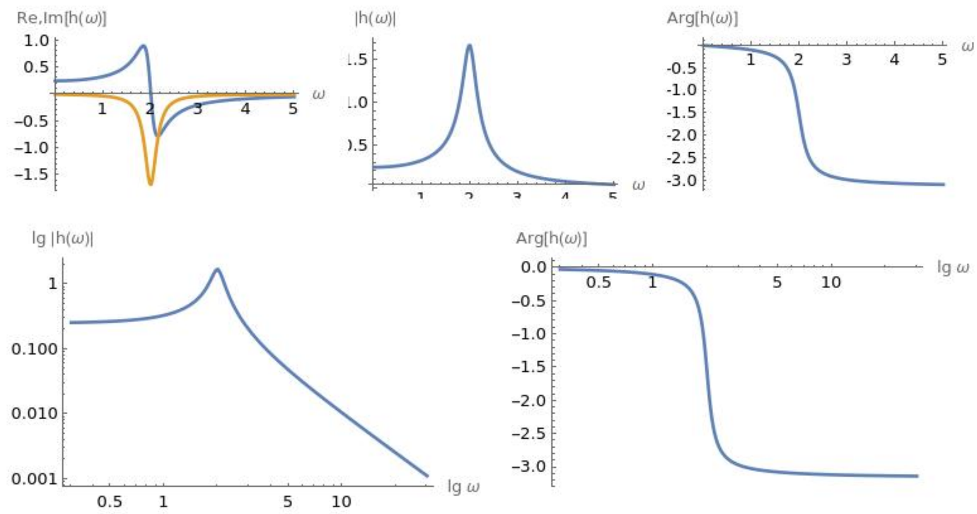


Figure 3: Frekvenciavalasz, az also ket abra a Bode diagram.

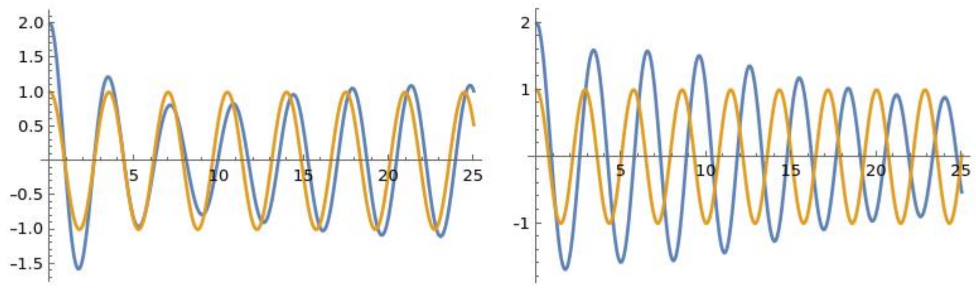


Figure 4: Kezdeti feltetel: $x(0) = 2, \dot{x}(0) = 0$, input: $F(t) = \cos(1.8t)$, illetve $F(t) = \cos(2.2t)$

```
function aoi = aomegainv ( omega )
  ao = [1i * omega, -1; 4, 1i*omega+0.3];
  aoi = [1, 0]*inv( ao)*[0;1];
endfunction

os = linspace( 0.2, 5, 100 );
for i = 1:length( os )
  aoisabs(i) = abs( aomegainv( os(i)) );
  aoisarg(i) = arg( aomegainv( os(i)) );
endfor;

function xdot = force1( x, t )
xdot = [ 0 1; -4 -0.3 ] * x + [0;1] * cos(1.8*t);
endfunction
function xdot = force2( x, t )
xdot = [ 0 1; -4 -0.3 ] * x + [0;1] *  cos(2.2*t);
endfunction

n = 501;
ts = linspace( 0, 20, n)';
ysol1 = lsode( "force1", [ 1; 0 ], ts );
ysol2 = lsode( "force2", [ 1; 0 ], ts );

subplot(2,2,1)
plot( os, aoisabs)
subplot(2,2,2)
plot( os, aoisarg)
subplot(2,2,3)
plot( ts, ysol1(:,1), ts, cos(1.8*ts))
subplot(2,2,4)
plot( ts, ysol2(:,1), ts, cos(2.2*ts))
```

4.3 Impulzus valasz

DE:

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon, & \text{ha } x \in [0,\epsilon], \\ 0, & \text{amugy.} \end{cases} \qquad \theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \qquad \delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \delta_\epsilon(t),$$

$$\ddot{x} + 4x + 0.3\dot{x} = \delta_\epsilon(t), \qquad x(t) = G_\epsilon(t)$$

$$\ddot{x} + 4x + 0.3\dot{x} = \delta(t), \qquad x(t) = G(t)$$

$$\ddot{x} + 4x + 0.3\dot{x} = \theta(t), \qquad x(t) = s(t)$$

$$\text{kezdeti feltetel:} \quad x(-4) = 0,\ \dot{x}(-4) = 0,$$

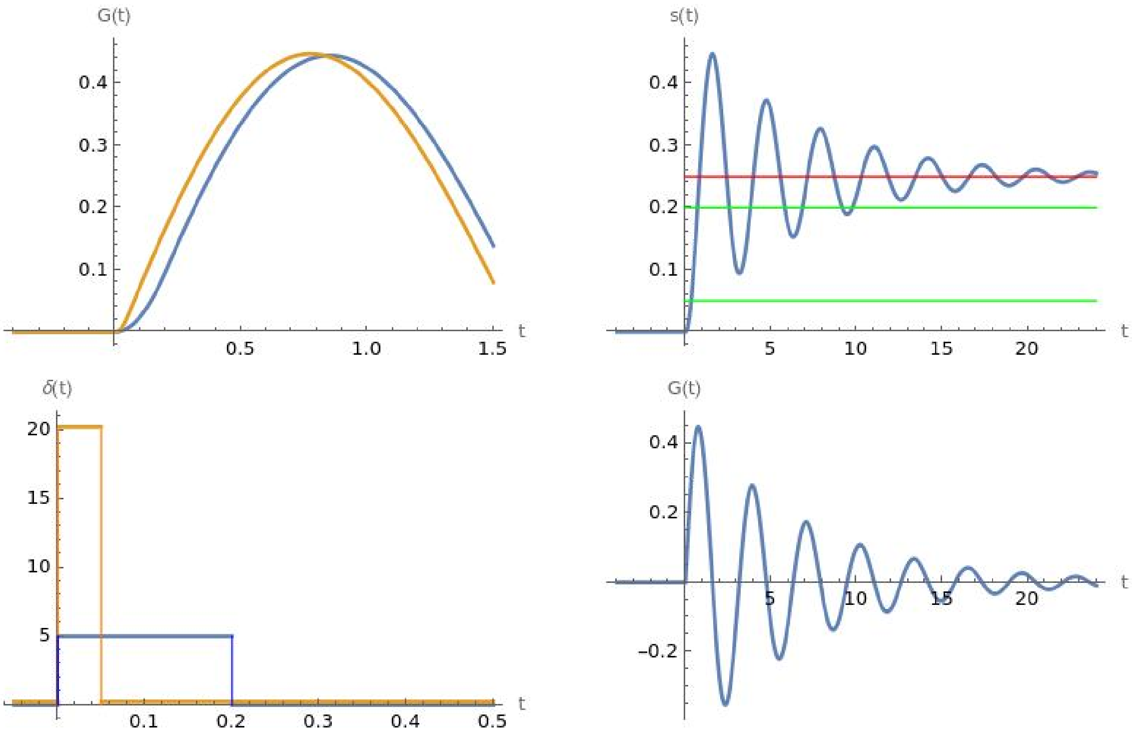


Figure 5: Impulzusvalasz. Bal felso abra (bf): G_ϵ, $\epsilon = 0.2,\ 0.05$ megoldasok a (ba): abran lathato kozelito δ_ϵ impulzusok eseteiben.
(ja): A rendszer valasza a Dirac-delta $\delta(t)$ impulzusra.
(jf): A rendszer valasza a Heaviside theta egysegugras fuggvenyre. Az uj egyensulyi helyzet a piros $s_0 = 0.25$ vonal. A ket zold vonal es a kek $s(t)$ fuggveny elso ket metszespontainak az idokulonbsege a "felallasi idő" (rise time). Mivel $\dot{\theta}(t) = \delta(t)$, igy $\dot{s}(t) = G(t)$

Octave:

```
pkg load statistics
x = -0.4:0.01:0.4;
y1 = normpdf(x, 0, 0.2);
y2 = normpdf(x, 0, 0.07);
y3 = normpdf(x, 0, 0.02);

function xdot = forced1( x, t )
xdot = [ 0 1; -4 -0.3 ] * x + [0;1] * normpdf(t,0,0.2);
endfunction
function xdot = forced2( x, t )
xdot = [ 0 1; -4 -0.3 ] * x + [0;1] * normpdf(t,0,0.07);
endfunction
function xdot = forced3( x, t )
xdot = [ 0 1; -4 -0.3 ] * x + [0;1] * normpdf(t,0,0.02);
endfunction

ts = linspace( -0.5,1.5,201);
ysol1 = lsode( "forced1", [ 0; 0 ], ts );
ysol2 = lsode( "forced2", [ 0; 0 ], ts );
ysol3 = lsode( "forced3", [ 0; 0 ], ts );

subplot(1,2,1)
plot( ts, ysol1(:,1), ts, ysol2(:,1), ts, ysol3(:,1))
subplot(1,2,2)
plot( x, y1, x, y2, x, y3)

############################################################

pkg load statistics
x = -0.4 : 0.01 : 0.4;
sigma = 0.2;
A = [ 0 1; -4 -0.3 ];
ic = [ 0; 0 ];
C = [0;1];

function xdot = forced1( x, t, A, C, sigma )
xdot = A * x + C * normpdf( t, 0, sigma );
endfunction

ts = linspace( -0.5, 1.5, 201);
ysol1 = lsode( @(x,t) forced1( x, t, A, C, sigma ), ic, ts );
plot( ts, ysol1(:,1))
```

5 $\ddot{x} = -4x - 0.5x^3$

5.1 Energia $\leftrightarrow$ Frekvencia, amplitudo

- Bizonyitsd be, hogy
$$\frac{d}{dt}E(x,\dot{x}) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \left(2x^2 + \frac{1}{8}x^4\right)\right] = 0.$$
- Mennyi $x_{max}(E)$, $\dot{x}(E,x)$?
- Fejezd ki a rezgomozgas felperiodusidejet mint egy hatarozott integralt!
- Fejezd ki $x(0) = x_{max}(E)$, $\dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltetelhez tartozo $x_E(t)$ megoldas $t_E(x)$ inverz fuggvenyet mint egy hatarozott integralt, ha $x \in [-x_{min}(E), x_{max}(E)]$!
- Szamold ki numerikusan a DE megoldasanak a Diszkret Fourier transzformaltjat!

Octave:

```
clear all
function xdot = force( x, t )
  xdot = [ x(2);  -1/2 * x(1)^3 - 4 * x(1)];
endfunction

ic1 = [ 1; 0 ];
ic2 = [ 1; 18 ];
ts = linspace( 0, 2, 401);
ysol1 = lsode( "force" , ic1, ts );
ysol2 = lsode( "force" , ic2, ts );

figure(1)
subplot(1,2,1)
hold on;
plot( ts, ysol1(:,1))
plot( ts, ysol2(:,1))
hold off;
subplot(1,2,2)
hold on;
plot( ysol1(:,1), ysol1(:,2) )
plot( ysol2(:,1), ysol2(:,2) )
hold off;

function exv = energyxv ( x, v )
  exv = v^2/2 + 2 * x^2 + 1/8 * x^4;
endfunction
energyxv118 = energyxv ( 1, 18 )

function xmax = xmaxE( e )
  xmax = fsolve( @(x) 2 * x^2 + 1/8 * x^4 - e  , 1 );
endfunction
xmaxE118 = xmaxE( energyxv118 )

function vex = velocityex( ee, x )
  vex = sqrt( 2 * ( ee - 2 * x^2 - 1/8 * x^4 ) );
endfunction
xs = linspace( -xmaxE118, xmaxE118, 100 );
for i=1:100
vs(i) = real( velocityex( energyxv118, xs(i) ) );
endfor

function per = periodE( ee )
  xmax =  xmaxE( ee );
  per = 2 * quad( @(x) real( 1/velocityex( ee, x ) ), -xmax , xmax );
endfunction
es = linspace( 0.1, energyxv118, 10 );
```

```
for i=1:10
  periodEs(i) = periodE( es(i) );
endfor

figure(2)
subplot(1,2,1)
plot( xs, vs )
subplot (1,2,2)
plot( es, periodEs )

periodE118 =  periodE( energyxv ( 1, 18 ) )
ic3 = [ xmaxE118; 0 ];
n=1024*16;
ts = linspace( 0, periodE118, n+1 );
ysol3 = lsode( "force" , ic3, ts );
figure(3)
plot( ts, ysol3(:,1))
fft118 = fft( ysol3( 1:n, 1 ) );
fft_0 = fft118(1)
fft_1_5 = fft118(2:6)
fft_n_minus_5_n_minus_1 = fft118(end-4:end)
```