30 Nappali
2 Lev.

Zh2, Diff.Egy., 2025.05.15. NEPTUN:

Nev: Alairas:

1.
a) Legyen $\dot{y}(t) = 9y(t) + f(t)$, $y(0) = 13$! $f(t) = e^{-3t} + 2$

a1) Mennyi az $y(t)$ fuggveny $Y(s)$ Laplace transzformaltja?

$$Y(s) = \frac{1}{s-9}\left(13 + \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s}\right)$$

a2) Hogyan nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa? (A felmerulo egyutthatokat nem kell kiszamitani.)

$$Y(s) = \frac{A}{s-9} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s}$$

a3) Hogyan nez ki $y(t)$?

$$y(t) = Ae^{9t} + Be^{-3t} + C$$

b) Legyen $\ddot{y}(t) = 9y(t) + f(t)$, $y(0) = 13$! $f(t) = e^{-3t} + 2$ $\dot{y}(0) = 77$

b1) Mennyi az $y(t)$ fuggveny $Y(s)$ Laplace transzformaltja?

$$(s^2 Y(s) - 13s - 77) = 9 \cdot Y(s) + \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{\underbrace{s^2-9}_{(s+3)(s-3)}}\left(13s + 77 + \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s}\right) = \frac{13s(s\cdot(s+3)) + 77\cdot(s\cdot(s+3)) + 1\cdot s + 2\cdot(s+3)}{(s+3)^2\cdot(s-3)\, s}$$

b2) Hogyan nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa? (A felmerulo egyutthatokat nem kell kiszamitani.)

$$Y(s) = \frac{A}{(s+3)^2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s}$$

b3) Hogyan nez ki $y(t)$?

$$y(t) = Ate^{-3t} + Be^{-3t} + Ce^{3t} + D$$

Mivel $\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}(t) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t \, dt$, $\mathcal{L}(t \cdot e^{-3t}) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t \cdot e^{-3t} dt = \int_0^\infty e^{-(s+3)t} \cdot t = \frac{1}{(s+3)^2}$

Általánosan: $\mathcal{L}(f(t)) = F(s) \longrightarrow \mathcal{L}(f(t) \cdot e^{at}) = F(s-a)$

4.

a1) Keresd meg a $\dot{G}(t) = 9G(t) + \delta(t)$ DE retardalt megoldasat! Indokold a valaszodat!

$t<0$: $G(t)=0$ mivel G retardált

$t\approx 0$: $G(t)\approx \Theta(t)$, ahol $\dot{\Theta}(t)=\delta(t)$, (ahol $\Theta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$)

tehát $G(0^-)=\Theta(0^-)=0$

$G(0^+)=\Theta(0^+)=1$

$t>0$: $\dot{u}(t)=9u(t)$, $u(0)=G(0^+)=1$

$\longrightarrow u(t)=e^{9t}$

Tehát $G(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{9t}, & t>0\end{cases}$

a2) Ird fel az $\dot{y}(t) = 9y(t) + f(t)$ DE megoldasat, ha $y(t) = f(t) = 0$ amikor $t << 0$!

$$y(t)=(G*f)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)f(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{t} e^{9(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau$$

a3) Ird fel az $\dot{y}(t) = 9y(t) + f(t)$ DE megoldasat a $t > 0$ idopontokra, ha $y(0) = 13$!

$$y(t)=13e^{9t}+\int_0^t e^{9(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau$$

b1) Keresd meg a $\ddot{G}(t) = 9G(t) + \delta(t)$ DE retardalt megoldasat! Indokold a valaszodat!

$t<0$: $G(t)=0$ mivel G retardált

$t\simeq 0$: $G(t)\approx R(t)$, ahol $\ddot{R}(t)=\delta(t)$, (ahol $R(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t>0\end{cases}$)

tehát $G(0^-)=R(0^-)=0$

$\dot{G}(0^-)=\dot{R}(0^-)=0$

$G(0^+)=R(0^+)=0$

$\dot{G}(0^+)=\dot{R}(0^+)=1$

$t>0$: $\ddot{u}(t)=9u(t)$, $u(0)=G(0^+)=0$

$\dot{u}(0)=\dot{G}(0^+)=1$

$\longrightarrow u(t)=\frac{1}{6}\left(e^{3t}-e^{-3t}\right)$

Tehát $G(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{1}{6}\left(e^{3t}-e^{-3t}\right), & t>0\end{cases}$

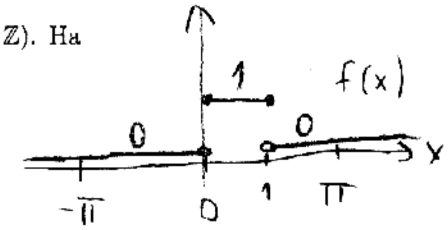
b2) Ird fel az $\ddot{y}(t) = 9y(t) + f(t)$ DE megoldasat, ha $y(t) = f(t) = 0$ amikor $t << 0$!

$$y(t)=(G*f)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)f(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{6}\left(e^{3(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)}\right)f(\tau)\,d\tau$$

2.

a1) Legyen $f(x) = 1$, ha $x \in [2k\pi, 2k\pi + 1]$, amugy meg legyen $f(x)$ nulla (itt $k \in \mathbb{Z}$). Ha



$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},$$

akkor mennyi $\hat{f}_n$?

$$\hat{f}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, f(x)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-inx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-in}}{-in} - \frac{1}{-in}\right], \text{ ha } n \neq 0$$

Ha $n = 0$, $\hat{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \underbrace{1}_{e^{-i\cdot 0\cdot x}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

a2) Fejezd ki a kovetkezo differencialegyenletet

$$\partial_t \phi(t,x) = -\partial_x^2 \phi(t,x), \quad \phi(t,x) = \phi(t, x+2\pi), \ \phi(0,x) = f(x)$$

megoldasat $\hat{f}$ segitsegevel!

Mivel $-\partial_x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\right) = n^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\right)$, így

$$\varphi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{n^2 t} \hat{f}_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

nagyon gyorsan növekvő sorozat, ahogy $n \to \infty$

a3) Magyarazd el, hogy mi a kulonbseg a megoldas helyessegenek tekinteteben, ha $t = 1$, vagy ha $t = -1$!

$t=1$: $e^{n^2\cdot 1} \hat{f}_n \to$ "általában" $\to \infty$, a sor nem konvergens, $\varphi(1,x)$ nem létezik

$t=-1$: $\left|e^{-n^2} \hat{f}_n\right|$ gyorsabban tart nullához, mint $|\hat{f}_n|$, így valószínű, hogy ha az eredeti $f(x)$ fourier sora konvergens, akkor a módosított is ilyen lesz.

b) Szamold ki a kovetkezo konvoluciokat!

i) $2 * 3$ Megoldás I:

$$(2*3)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\cdot 3\, dt =$$

ii) $2 * t$

= divergens impropius integrál,

ii) $t * t$

kissé értelmetlen feladat (elnézésüket kérem, V.P.)

Megoldás II: A Laplace-tr.-nél használt konvolúció esetén:

$$(2*3)(t) = \int_0^t 2\cdot 3\, d\tau = 6t$$

$$(2*t)(t) = \int_0^t 2\cdot\tau\, d\tau = t^2$$

$$(t*t)(t) = \int_0^t (t-\tau)\tau\, d\tau = \frac{1}{6} t^3$$

$t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2}$, $t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2}$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3!}{s^4} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^4}$$

$t^3 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{3!}{s^4}$

3.
a1) Legyen a variacios problema Lagrange fuggvenye $L(t, x, \dot{x}) = x\dot{x}^4 + \dot{x}x + t\cos(x)$. Ird fel az $x(t)$ fuggvenyre vonatkozo Euler-Lagrange egyenletet!

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \dot{x}^4 + \dot{x} + t(-\sin(x)), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = x4\dot{x}^3 + x$$

EL:
$$\frac{d}{dt}\left(4x\dot{x}^3 + x\right) - \left(\dot{x}^4 + \dot{x} - t \cdot \sin(x)\right) = 0$$

a2) Legyen a variacios problema Lagrange fuggvenye $L(t, x, \dot{x}) = x^4\dot{x} - t\cos(x)$. Ird fel az $x(t)$ fuggvenyre vonatkozo Euler-Lagrange egyenletet! Hanyadrendű differenciálegyenlet az eredmény?

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x^3 \cdot \dot{x} + t \cdot \sin(x), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = x^4$$

EL:
$$\frac{d}{dt}\left(x^4\right) - \left(4x^3\dot{x} + t \cdot \sin(x)\right) = 0, \qquad \text{elsőrendű}$$

b) Legyen
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ird fel $\vec{y}(t)$ Laplace transzformaltjat! (A felmerulo matrixinvertalast nem kell elvegezni.)

$$\begin{bmatrix} sY_1(s) - 6 \\ sY_2(s) - 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} \\ \frac{2}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-0 & -1 \\ -3 & s-5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} + 6 \\ \frac{2}{s^2} + 7 \end{bmatrix}$$