20 d6

Zh2, Diff.Egy., 2023.05.24. NEPTUN:

Nev: Alairas:

1.

a) Legyen $\dot{y}(t) = -9y(t) + f(t)$, $y(0) = 13$! ahol $f(t) = \underbrace{(t^2-1)(t+2)}_{= t^3+2t^2-t-2}$ és $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

a1) Mennyi az $y(t)$ fuggveny $Y(s)$ Laplace transzformaltja?

$$sY(s) - 13 = -9Y(s) + \frac{3!}{s^4} + 2\cdot\frac{2!}{s^3} - \frac{1}{s^2} - 2\cdot\frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+9}\left(\frac{6}{s^4} + \frac{4}{s^3} - \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + 13\right) = \frac{6+4s-s^2-2s^3+13s^4}{(s+9)\cdot s^4}$$

2

a2) Hogyan nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa? (A felmerulo egyutthatokat nem kell kiszamitani.)

$$Y(s) = \frac{A}{s+9} + \frac{B}{s^4} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s^2} + \frac{E}{s}$$

1

a3) Hogyan nez ki $y(t)$?

$$y(t) = Ae^{-9t} + \frac{B}{6}t^3 + \frac{C}{2}t^2 + Dt + E$$

1

b) Legyen $\ddot{y}(t) = -9y(t) + f(t)$, $y(0) = 13$! továbbá $\dot{y}(0) = 7$ és $f(t) = (t^2-1)(t+2)$

b1) Mennyi az $y(t)$ fuggveny $Y(s)$ Laplace transzformaltja?

$$s^2Y(s) - 13s - 7 = -9Y(s) + \frac{3!}{s^4} + 2\cdot\frac{2!}{s^3} - \frac{1}{s^2} - 2\cdot\frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+9}\left(\frac{6}{s^4} + \frac{4}{s^3} - \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + 13s + 7\right) = \frac{6+4s-s^2-2s^3+13s^5+7}{(s+3i)(s-3i)\cdot s^4}$$

3

b2) Hogyan nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa? (A felmerulo egyutthatokat nem kell kiszamitani.)

$$Y(s) = \frac{A}{s+3i} + \frac{B}{s-3i} + \frac{C}{s^4} + \frac{D}{s^3} + \frac{E}{s^2} + \frac{F}{s}$$

2

b3) Hogyan nez ki $y(t)$?

$$y(t) = Ae^{-3it} + Be^{3it} + \frac{C}{6}t^3 + \frac{D}{2}t^2 + Et + F$$

1

2.

a) Legyen $x_{n+1} = 0.8x_n + 20$, $x_1 = 123$. Mennyi x_n ?

Fixpont: $x_{fix} = 0.8\, x_{fix} + 20 \longrightarrow x_{fix} = 100$ 2

$$x_n = 0.8^{n-1} \cdot (123 - 100) + 100$$

Itt a 0.8^{n-1}-ben a kitevő $n-1$, mert x_1 (nem x_0) volt megadva

b1) Legyen $f(x) = 1$, ha $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, amugy meg legyen $f(x)$ nulla (itt $k \in \mathbb{Z}$). Ha

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},$$

akkor mennyi $\hat{f}_5$?

$$\hat{f}_5 = \left(\frac{e^{5ix}}{\sqrt{2\pi}}, f(x) \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-5ix}}{\sqrt{2\pi}} f(x)\, dx = \int_0^{\pi} \frac{e^{-5ix}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-5ix}}{-5i} \right|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{-5i} \left(e^{-5i\pi} - e^{-5i\cdot 0} \right) = \frac{i}{5\sqrt{2\pi}} \left(\overset{e^{-5i\pi}}{(-1)} - 1 \right)$$

$$= \frac{-2i}{5\sqrt{2\pi}} = \frac{-\sqrt{2}\, i}{5\sqrt{\pi}}$$ 3

b2) Fejezd ki a kovetkezo hoegyenletet

$$\partial_t \phi(t,x) = 3\,\partial_x^2 \phi(t,x), \quad \phi(t,x) = \phi(t, x+2\pi), \; \phi(0,x) = f(x)$$

megoldasat $\hat{f}$ segitsegevel!

Mivel $3\partial_x^2 \left(\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right) = -3n^2 \left(\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right)$,

így ha $y(0,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, 2

akkor $y(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{-3n^2 t} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$

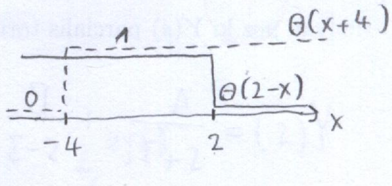
b3) Magyarazd el, hogy mi a kulonbseg a megoldas helyessegenek tekinteteben, ha $t = 1$, vagy ha $t = -1$!

Ha $t>0$, akkor az $\exp(-3n^2 t)$ szorzófaktorok nagyon gyorsan csökkennek, ahogy $n \to \infty$, így a sor konvergens lesz. 1

Viszont ha $t<0$, akkor $\exp(-3n^2 t)$ nagyon gyorsan növekszik, így a sor divergens lesz, így nem adja meg a (nemlétező) megoldást.

d) Legyen

$$f(x) = \theta(x+4)\theta(2-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(p) e^{ipx}\, dp.$$



Mennyi $\tilde{f}(77)$?

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-4}^{2} e^{-ipx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-ip} \left. e^{-ipx} \right|_{-4}^{2}$$

Vagyis $\tilde{f}(77) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-i\cdot 77} \left(e^{-i\cdot 77\cdot 2} - e^{-i\cdot 77\cdot(-4)} \right)$ 2

$$= i \frac{1}{77\sqrt{2\pi}} \left(e^{-154i} - e^{308i} \right)$$

3.

a) Legyen a variacios problema Lagrange fuggvenye $L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = \dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_1 x_2 + x_1 x_2$. Ird fel az $x_1(t)$, $x_2(t)$ fuggvenyekre vonatkozo Euler-Lagrange egyenleteket!

EL egyenlet: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1,2$

x_1: $\frac{d}{dt}(\dot{x}_2 + x_2) - x_2 = 0 \longrightarrow \ddot{x}_2 + \dot{x}_2 - x_2 = 0$ 4

x_2: $\frac{d}{dt}(\dot{x}_1) - (\dot{x}_1 + x_1) = 0 \longrightarrow \ddot{x}_1 - \dot{x}_1 + x_1 = 0$

Vagyis az EL egyenletek evolúciós alakja: $\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{x}_1 + x_1 \\ -\dot{x}_2 + x_2 \end{bmatrix}$

b) Legyen

$$\frac{d}{dt}y(t) = (y(t) - y^2(t))(t+1), \;\; y(1) = 2, \; \Delta t = 0.01.$$

b1) Mit josol Euler modszere $y(1+\Delta t)$-re?

$$y(1.01) := \underbrace{2}_{y(1)} + \underbrace{(2-2^2)(1+\underbrace{1}_{t})}_{=-4} \cdot 0.01 = 2 - 4 \cdot 0.01 = 1.96$$

1

b2) Mit josol Heun modszere $y(1+\Delta t)$-re?

$$y(1.01) := 2 + \frac{1}{2}\Big[\underbrace{-4}_{f(1,y(1)) = f(1,2)} + \underbrace{(1.96 - 1.96^2)(1.01+1)}_{f(1.01,\,1.96)}\Big] \cdot 0.01$$

Itt $f(t,y) = (y-y^2)(t+1)$, $f(1,y(1)) = f(1,2)$ → $f(1.01, 1.96)$ ← Az Euler módszer becslése $y(1.01)$-re

2

b3) Ird fel $y(1+\Delta t)$ másod ~~harmad~~rendu Taylor sorfejteset a $t=1$ pont korul!

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t,y) = (y-y^2)(t+1)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = (\partial_t + f\partial_y)f = (\partial_t + [y-y^2][t+1]\partial_y)([y-y^2][t+1])$$

$$= \underbrace{[y-y^2]}_{\partial_t f} + \underbrace{([y-y^2][t+1])}_{f}\underbrace{([1-2y][t+1])}_{\partial_y f}$$

3

$y(1) = 2$

$\dot{y}(1) = f(1,2) = (2-2^2)(1+1) = -4$

$\ddot{y}(1) = [2-2^2] + ([2-2^2][1+1])([1-2\cdot 2][1+1]) = -2 + (-4)(-6) = 22$

Vagyis $\quad y(1+\Delta t) \approx 2 - 4\Delta t + \frac{22}{2!}\Delta t^2$

4.

a1) Keresd meg a $\dot{G}(t) = -9G(t) + \delta(t)$ DE retardalt megoldasat! Indokold a valaszodat!

① G retardált Green függvény $\Longrightarrow$ $G(t)=0$, ha $t<0$

② $t \approx 0$, $G(t) \approx \Theta(t)$, ahol $\dot{\Theta}(t) = \delta(t) \Longrightarrow$ Θ-nak egységugrása van $t=0$-nál,
így, ha $\Theta(t)=0$ amikor $t<0$, akkor Θ a Heavíside theta függvény

$\Theta(0^-) = 0 = G(0^-)$

$\Theta(0^+) = 1 = G(0^+)$

③ $t>0$. Itt $G(t)$ ugyanaz, mint az $\dot{y}(t) = -9y(t)$, $y(0)=1$ DE $y(t) = e^{-9t}$ megoldása

Ez itt $G(0^+)$

Tehát $G(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t<0 \\ e^{-9t}, & \text{ha } t>0 \end{cases}$

2

a2) Ird fel az $\dot{y}(t) = -9y(t) + f(t)$ DE megoldasat, ha $y(t) = f(t) = 0$ amikor $t << 0$!

$$y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) f(\tau)\, d\tau}_{(G*f)(t)} = \int_{-\infty}^{t} e^{-9(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

1

a3) Ird fel az $\dot{y}(t) = -9y(t) + f(t)$ DE megoldasat a $t > 0$ idopontokra, ha $y(0) = 13$!

$$y(t) = 13\,G(t) + \underbrace{\int_{0}^{t} G(t-\tau) f(\tau)\, d\tau}_{(G*\tilde{f})(t),\ \text{ahol}\ \tilde{f}(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t<0 \\ f(t), & \text{ha } t>0 \end{cases}} = 13e^{-9t} + \int_{0}^{t} e^{-9(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

1

b1) Keresd meg a $\ddot{G}(t) = -9G(t) + \delta(t)$ DE retardalt megoldasat! Indokold a valaszodat!

① G retardált megoldás $\Longrightarrow$ $G(t)=0$, ha $t<0$

② $t \approx 0$. $G(t) \approx R(t)$. Itt $\ddot{R}(t) = \delta(t)$ is $R(t)=0$, ha $t<0$.
Vagyis $R(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t<0 \\ t, & \text{ha } t>0 \end{cases}$

$R(0^-) = 0 = G(0^-)$

$\dot{R}(0^-) = 0 = \dot{G}(0^-)$

$R(0^+) = 0 = G(0^+)$

$\dot{R}(0^+) = 1 = \dot{G}(0^+)$

Ez itt $\dot{G}(0^+)$

Ez itt $G(0^+)$

③ $t>0$. Itt $G(t)$ ugyanaz, mint az $\ddot{y}(t) = -9y(t)$, $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=1$ DE $y(t) = \frac{1}{3}\sin(3t)$ megoldása

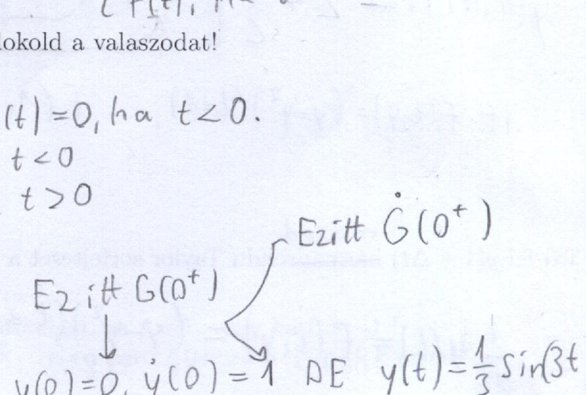
Tehát $G(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t<0 \\ \frac{1}{3}\sin(3t), & \text{ha } t>0 \end{cases}$

4

b2) Ird fel az $\ddot{y}(t) = -9y(t) + f(t)$ DE megoldasat, ha $y(t) = f(t) = 0$ amikor $t << 0$!

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = (G*f)(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{3}\sin(3[t-\tau])\, f(\tau)\, d\tau$$



2