24 db

Zh1, Diff.Egy., 2023.04.12. NEPTUN: :

Név: Aláírás:

(2+3+3+2 pont)

1.a. Legyen $y'(t) = t^7/(1-t^2)$, $y(4) = 5$. Fejezd ki $y(8)$-at hatarozott integralas segitsegevel!

$$y(8) = y(4) + \int_4^8 \frac{t^7}{1-t^2}\,dt = 5 + \int_4^8 \frac{t^7}{1-t^2}\,dt$$

1.b. Legyen

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) + \frac{d}{dt}y_2(t) \\ y_2(t)y_1(t) + t^2\frac{d}{dt}y_1(t) \end{pmatrix}.$$

Irj fel egy elsorendu, idofuggetlen DE-t amelyik ekvivalens ezzel az egyenlettel!

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ y_1 + v_2 \\ y_2 y_1 + s^2 v_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.c. Legyen

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = A + S + \alpha E, \quad \text{ahol} \quad A^T = -A,\ S^T = S,\ Tr(S) = 0.$$

Mennyi A, S, es α ?

$$A = \frac{B - B^T}{2} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow S + \alpha E = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$Tr(S+\alpha E) = Tr(S) + \alpha Tr(E) = 0 + \alpha \cdot 2 = 6 + 8 = 14 \longrightarrow \alpha = 7 \longrightarrow S = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vagyis} \quad \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.d. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Igaz-e, hogy e^{tA} ortogonalis matrix?

(ii) Igaz-e, hogy $\det e^{tA} = 1$? (Indokold a valaszaidat!)

(i) NEM, mert e^{tA} akkor ortogonális (bármely $t \in \mathbb{R}$-re), ha $A = -A^T$,

de $-A^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) IGEN, mert

$$Tr(A) = 1 + (-1) = 0$$

2. (4+2+4 pont) Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - 3y_2 \\ -5y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-5-\lambda) - 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -5$$

$\lambda_1 = 1: \; A-\lambda E = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\lambda_2 = -5: \; A - \lambda E = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow y = 0$ sajátaltér: $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ $\qquad$ $6x - 3y = 0 \longrightarrow 2x = y$

sajátaltér: $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} \right\}$

$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longleftarrow$ Ellenőrzés: $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \end{bmatrix} = -5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

Mivel A sajátrendszere: $\lambda_1 = 1, \; \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -5, \; \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, így

$$\vec{y}_{ált}(t) = C_1 e^{1 \cdot t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Szamold ki a DE partikularis megoldasait!

Ha $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{V}_1$, akkor $\vec{y}(t) = 1 \cdot e^{1 \cdot t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$

Ha $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \longrightarrow \begin{matrix} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_2 = 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C_1 = -1/2 \\ C_2 = 1/2 \end{matrix}$,

így $\vec{y}(t) = -\frac{1}{2} e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix}$

Mennyi e^{tA} ?

$\vec{V}_1 \quad \vec{V}_2 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2$

1 $\quad e^{tA} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\boxed{1} \cdot t} & 0 \\ 0 & e^{\boxed{-5} \cdot t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$

VAGY: Mivel $e^{tA} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{y}(t)$ egyrészt e^{tA} első oszlopa, másrészt a DE megoldása az $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ kezdeti feltétel mellett,

ÉS HASONLÓKÉPPEN $e^{tA} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ az e^{tA} mátrix második oszlopa és a DE megoldása az $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ kezdeti feltétel mellett,

ÍGY $\quad e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & -\frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-5t} \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$

((2+2)+(1+2+3) pont)

3a. Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_1 - 3y_2 \\ -2y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Mivel $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ kommutálnak

Mennyi e^{tA} ?

$$\exp\left(t\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \exp\left(t\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \exp\left(t\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) \cdot \exp\left(t\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= e^{-2t}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \dots}_{\text{zero mátrix}}\right) =$$

$$= e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & -3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & -3te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Mi az elozo DE partikularis megoldasa az $(y_1(0), y_2(0))^T = (4, 5)$ kezdeti feltetel mellett?

$$\vec{y}(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & -3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 4 - 15t \\ 5 \end{bmatrix}$$

3.b. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mennyi $AP - PA$?

$$AP - PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ird fel P sajatertekeit es sajatvektorait! (Hasznald az $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$ jelolest!)

Mivel a P ciklikus permutáció mátrix köbe az egységmátrix, vagyis $P^3 = E$, így sajátértékei a komplex $\sqrt[3]{1}$ egységgyökök lehetnek: $1 = \varepsilon^0$, $\varepsilon = \varepsilon^1$, ε^2.

A sajátvektorok:

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \varepsilon^{0\cdot 0} \\ \varepsilon^{0\cdot 1} \\ \varepsilon^{0\cdot 2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \varepsilon^{1\cdot 0} \\ \varepsilon^{1\cdot 1} \\ \varepsilon^{1\cdot 2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \varepsilon^{2\cdot 0} \\ \varepsilon^{2\cdot 1} \\ \varepsilon^{2\cdot 2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

"tetszőleges" normalizáció

$\varepsilon^4 = \varepsilon^3 \cdot \varepsilon = 1 \cdot \varepsilon$

Ird fel A sajatertekeit!

A kifejezhető P-vel: $A = -2E + P + P^T = P - 2E + P^{-1}$ ⟵ mivel P ortogonális mátrix, így $P^T = P^{-1}$

Így a $\vec{v}_k$, $k = 0, 1, 2$ vektorok A sajátvektorai lesznek:

$$A\vec{v}_0 = (P - 2E + P^{-1})\vec{v}_0 = (1 - 2\cdot 1 + 1^{-1})\vec{v}_0 = 0 \cdot \vec{v}_0$$

$$A\vec{v}_1 = (P - 2E + P^{-1})\vec{v}_1 = (\varepsilon - 2\cdot 1 + \varepsilon^{-1})\vec{v}_1$$

$$A\vec{v}_2 = (P - 2E + P^{-1})\vec{v}_2 = (\varepsilon^2 - 2\cdot 1 + (\varepsilon^2)^{-1})\vec{v}_2$$

$$= (\varepsilon^2 - 2 + \varepsilon^{-2})\, v_2$$

A sajátértékei: 0, $\varepsilon + \varepsilon^{-1} - 2$, $\varepsilon^2 - \varepsilon^{-2} - 2$.

Megjegyzés: pl. $\varepsilon + \varepsilon^{-1} - 2$ megkapható $A\vec{v}_1$ kiszámításával is:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \\ * \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \end{bmatrix},$$

vagyis $(1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2) = \lambda_1 \varepsilon$,

így $\lambda_1 = \varepsilon^{-1} - 2 + \varepsilon$

4a. (5 pont)
$y' = (y^4 - 16)$.
Keresd meg a DE fixpontjait!

$y^4 - 16 = 0 \longrightarrow \quad y_1 = -2, \quad y_2 = 2$

Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!

$\frac{d}{dy}(y^4 - 16) = 4y^3 = f'(y)$

$y_1 = -2:$ $\quad f'(-2) = 4\cdot(-2)^3 = -32$

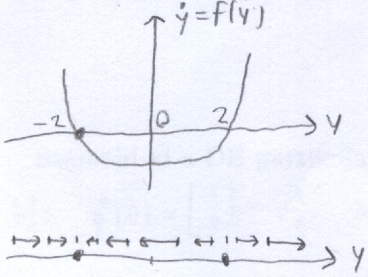
$\frac{d}{dx}\left(y - (-2)\right) = \frac{d}{dx}\Delta y = -32\cdot\Delta y$

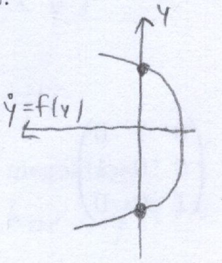
$y_2 = 2:$ $\quad f'(2) = 4\cdot 2^3 = 32$

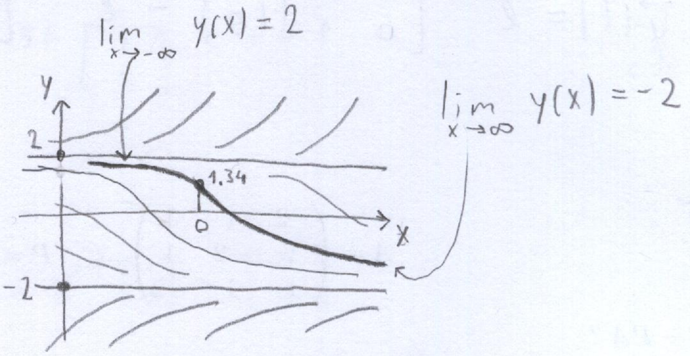
$\frac{d}{dx}(y - 2) = \frac{d}{dx}\Delta y = 32\cdot\Delta y$

Ha $y(0) = 1.34$, mennyi
$\lim_{x\to\infty} y(x) = -2 \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 2$

Vazold a DE megoldasgorbeit!







4b. (5 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_2 + 2)y_1 \\ (y_1 - 4)(5 - y_2). \end{pmatrix}$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

$(y_2 + 2)y_1 = 0 \longrightarrow y_2 = -2 \quad \text{VAGY} \quad y_1 = 0$

$5 - y_2 = 5 - (-2) \neq 0$, így
$y_1 - 4 = 0 \longrightarrow y_1 = 4$

$(y_1 - 4) = 0 - 4 \neq 0$, így
$5 - y_2 = 0 \longrightarrow y_2 = 5$

Fixpontok:
$\vec{Z}_A = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \vec{Z}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$Jac = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}\left[(y_2+2)y_1\right] & \frac{\partial}{\partial y_2}\left[(y_2+2)y_1\right] \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\left[(y_1-4)(5-y_2)\right] & \frac{\partial}{\partial y_2}\left[(y_1-4)(5-y_2)\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2+2 & y_1 \\ 5-y_2 & -y_1+4 \end{bmatrix}$$

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

$Jac(\vec{Z}_A) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

$Jac(\vec{Z}_B) = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

$\vec{Z}_A:$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 - 4 \\ y_2 - (-2) \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix}$$

$\vec{Z}_B:$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 - 0 \\ y_2 - 5 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +7 & 0 \\ 0 & +4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix}$$