

I. zárthelyi dolgozat - A változat

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$, és $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$.
Határozza meg az $X = [(A \cap B) \setminus C] \cup [C \setminus (A \triangle B)]$ halmazt! **(6 pont)**

2. Ha az X, Y, Z halmazok páronként diszjunkt halmazok, akkor mivel egyenlő az

$$((X \setminus Y) \cap (Y \setminus Z)) \cup (Z \setminus X)$$

halmaz? **(6 pont)**

3. Igazolja az alábbi egyenlőséget teljes indukcióval! (6 pont)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

4. Adott az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{2n-1}{n+3} \right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat. **(14 pont)**

(a) Monoton-e a sorozat? (Indoklás!)

(b) Korlátos-e a sorozat? (Indoklás!)

(c) Konvergens-e a sorozat? (Indoklás!)

(d) Ha a sorozat konvergens, adja meg a küszöbindexet $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$ esetén!

5. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(12 pont)**

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n+5} - 4 \cdot 5^{n+1}}{(-2)^{1+3n} + 9^{n+2}} =$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{3n+1}{3n-2} \right)^{2n+1} + \left(2 + \frac{5}{n} \right)^3 \right] =$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 2n - 1} - 2n) =$

6. Adjon meg olyan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 1.$$

(6 pont)

I. zárthelyi dolgozat - B változat

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$, és $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 6\}$.
Határozza meg az $X = [(C \cap A) \setminus B] \cup [A \setminus (C \triangle B)]$ halmazt! **(6 pont)**

2. Ha az X, Y, Z halmazok páronként diszjunkt halmazok, akkor mivel egyenlő az

$$((Y \setminus Z) \cap (X \setminus Z)) \cup (Y \setminus X)$$

halmaz? **(6 pont)**

3. Igazolja az alábbi egyenlőséget teljes indukcióval! **(6 pont)**

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

4. Adott az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{3n-2}{4-6n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat. **(14 pont)**

(a) Monoton-e a sorozat? (Indoklás!)

(b) Korlátos-e a sorozat? (Indoklás!)

(c) Konvergens-e a sorozat? (Indoklás!)

(d) Ha a sorozat konvergens, adja meg a küszöbindexet $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$ esetén!

5. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(12 pont)**

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{2n-3} - 4 \cdot 6^{n+2}}{2^{1+4n} + 8^{n+1}} =$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2n+5}{2n} \right)^{3n-1} + \left(1 - \frac{3}{n} \right)^4 \right] =$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 6n} - n) =$

6. Adjon meg olyan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -2.$$

(6 pont)

I. zárthelyi dolgozat - C változat

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 5\}$ és $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 7\}$.
Határozza meg a $D = [(B \cap A) \setminus C] \cup [B \setminus (C \triangle A)]$ halmazt! **(6 pont)**

2. Ha X, Y, Z halmazokra $X \subseteq Y \subseteq Z$ teljesül, akkor mivel egyenlő az

$$((X \cap Y) \cup (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)) \setminus (X \cap Y \cap Z)$$

halmaz? Válaszát indokolja! **(6 pont)**

3. Igazolja az alábbi egyenlőséget teljes indukcióval! **(6 pont)**

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$$

4. Adott az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{4n-1}{6n+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat. **(14 pont)**

(a) Monoton-e a sorozat? (Indoklás!)

(b) Korlátos-e a sorozat? (Indoklás!)

(c) Konvergens-e a sorozat? (Indoklás!)

(d) Ha a sorozat konvergens, adja meg a küszöbindexet $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$ esetén!

5. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(12 pont)**

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+3} - 4 \cdot (-6)^{2n+1}}{6^{2+2n} + 5^{n-2}} =$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{4n+7}{4n-1} \right)^{n+1} + \left(1 + \frac{6}{n} \right)^2 \right] =$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 - 3n + 1} - \sqrt{2n}) =$

6. Adjon meg olyan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2.$$

(6 pont)

I. zárthelyi dolgozat - D változat

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 3\}$ és $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\}$.
Határozza meg a $D = [(A \cap C) \setminus B] \cup [B \cap (A \Delta C)]$ halmazt! **(6 pont)**

2. Ha X, Y, Z halmazokra $X \subseteq Y \subseteq Z$ teljesül, akkor mivel egyenlő az

$$((X \cap Z) \cup (Y \cap Z)) \setminus (Y \cap Z)$$

halmaz? Válaszát indokolja! **(6 pont)**

3. Igazolja az alábbi egyenlőséget teljes indukcióval! (6 pont)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

4. Adott az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{5n-1}{2-3n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat. **(14 pont)**

(a) Monoton-e a sorozat? (Indoklás!)

(b) Korlátos-e a sorozat? (Indoklás!)

(c) Konvergens-e a sorozat? (Indoklás!)

(d) Ha a sorozat konvergens, adja meg a küszöbindexet $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$ esetén!

5. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(12 pont)**

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot 7^{n+3} - 4 \cdot 3^{n+1}}{6^{4+n} + 7^{n-2}} =$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n+3}{n-1} \right)^{2n+1} + \left(4 + \frac{2}{n} \right)^5 \right] =$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - 5n + 4} - 2n) =$

6. Adjon meg olyan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty.$$

(6 pont)