

Versenyfeladatok
Valós számsorozatok

1. Egység sugarú körbe szabályos nyolcszöget írunk. Kiválasztjuk a nyolcszög egyik csúcsát, ebből a szomszédos csúcsba húzott sugárra merőlegest állítunk. A merőleges talppontjából ismét merőlegest állítunk a következő csúcsba húzott sugárra. Az eljárást így folytatjuk, mindig azonos irányban haladva. Határozzuk meg az n -edik és az $n+1$ -edik lépésben kapott talppontokat összekötő szakaszok hosszát! Jelölje S_n az első n lépésben kapott szakaszok hosszának összegét! Számítsuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ határértéket!

2. Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatokat az alábbi módon definiáljuk:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

és

$$b_n = na_n - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1}.$$

Határozzuk meg b_{2020} értékét! /OKTV feladat alapján/

3. Számítsuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ határértéket, ha

$$a_n = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right).$$

4. Definiáljuk az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot a következő rekurzióval:

$$a_0 = 2 \quad \text{és} \quad a_n = a_{n-1} - \frac{n}{(n+1)!}, \text{ ha } n > 0.$$

Határozzuk meg a_{2020} -at! /OKTV feladat alapján/

5. Számítsuk ki az

$$S_{2020} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2020}$$

összeget, ha

$$a_n = \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt{n} + n \cdot \sqrt{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

/NMMV feladat alapján/

6. Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatban

$$a_{n+1} = 4a_n - a_n^2.$$

Milyen a_1 egész szám esetén lesz a sorozat egy bizonyos tagtól kezdve állandó? /OKTV feladat/

7. Bizonyítsuk be, hogy az $a_1 = 1$,

$$a_n = \frac{4a_{n-1} + \sqrt{7a_{n-1}^2 - 3}}{3}, \quad n \geq 2$$

sorozat minden eleme racionális! /KÖMAL feladat/

8. Legyen $a > 0$ rögzített valós szám. Definiáljuk az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sortozatot a következő rekurzióval:

$$a_1 > 0 \quad \text{tetszőleges valós szám}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right).$$

Igazoljuk, hogy:

- $a_n \geq \sqrt{a}$, ha $n \geq 2$;
- $a_n \geq a_{n+1}$, ha $n \geq 2$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{a}$.

9. Legyen $a > 0$ rögzített valós szám. Definiáljuk az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sortozatot a következő rekurzióval:

$$a_1 > 0 \quad \text{tetszőleges valós szám}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2a_n + \frac{a}{a_n^2} \right).$$

Igazoljuk, hogy az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens és számítsuk ki a határértékét!

10. Legyen $a > 0$ tetszőleges valós szám. Vizsgáljuk konvergencia szempontjából az

$$a_1 = \sqrt{a}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$$

rekurzív definícióval megadott sortozatot! Ha a sorozat konvergens, keressük meg a határértékét!

11. Vizsgáljuk meg a következő sortozatot konvergencia szempontjából!

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}, \quad \dots$$

/HGYOMV feladat/

12. Melyek azok a p pozitív valós számok, amelyekre az

$$x^4 - (3p + 5)x^2 + (p + 1)^2 = 0$$

egyenlet valós gyökei egy számtani sorozat közvetlenül egymás utáni elemei?

13. Határozzuk meg az

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + (n-2) \cdot 3 + \dots + 1 \cdot n}{n^3} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

sorozat határértékét! /HGYOMV feladat/

14. Az $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\log_2 1, \quad \log_2(-\cos 2x), \quad \log_2 \cos^2 x$$

egy számtani sorozat három, közvetlenül egymás után következő eleme. Számítsuk ki az összes ilyen sorozat különbségét!

15. Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n^2 + a_n.$$

Határozzuk meg az

$$S_{2020} = \frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + \dots + \frac{1}{a_{2020} + 1}$$

összeg egészrészét! /NMMV feladat alapján/

16. Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{3} \quad \text{és} \quad a_{n+2} = \frac{a_n a_{n+1}}{3a_n - 2a_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Adjuk meg a sorozat n -edik tagját az n változó függvényében! /NMMV feladat/

17. Legyen az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat első három eleme:

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1.$$

A sorozat további elemeit az

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{vmatrix} = n!, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

szabály alapján képezzük. Adjuk meg a sorozat a_n általános elemét n függvényeként! /HGYOMV feladat/

18. Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat a következő feltételeket teljesíti:

$$a_0 = a_1 = \frac{2}{3}$$

és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{4} (1 + 2a_{n+1} + a_n^2) \leq a_{n+2} \leq \frac{1}{3} (1 + a_{n+1} + a_n^2).$$

Igazoljuk, hogy a sorozat konvergens és adjuk meg a határértékét! /NMMV feladat/

19. Adott az

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{2}{n+1}$$

rekurziót teljesítő sorozat, ahol

$$\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2.$$

Igazoljuk, hogy

$$1 < a_n < 1 + \frac{1}{n-1}, \quad \text{ha} \quad n \geq 2.$$

/NMMV feladat/