

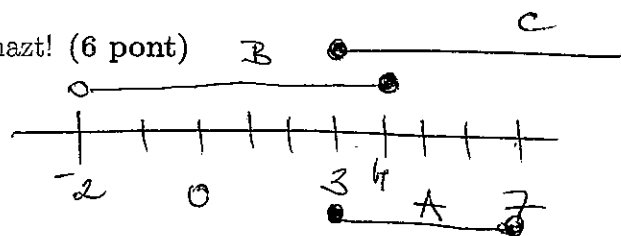
I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
A változat

A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| \leq 2\}$, $B = (-2, 4] \subset \mathbb{R}$, és $C = [3, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

$$A = [3, 7] \quad (1)$$

(a) Határozza meg az $X = [(A \cup B) \cap C] \cup [C \setminus (A \setminus B)]$ halmazt! (6 pont)



$$A \cup B = (-2, 7] \quad (1)$$

$$(A \cup B) \cap C = [3, 7] = A \quad (1)$$

$$A \setminus B = (4, 7] \quad (1)$$

$$C \setminus (A \setminus B) = [3, 4] \cup (7, +\infty) \quad (1)$$

$$X = A \cup (C \setminus (A \setminus B)) = C = [3, +\infty) \quad (1)$$

(b) Határozza meg az $A \Delta B$ halmazt! (3 pont)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (-2, 3) \cup (4, 7] \quad (1)$$

$$A \setminus B = (4, 7] \quad (1)$$

$$B \setminus A = (-2, 3) \quad (1)$$

(c) Diszjunktak-e az $\mathbb{R}^-$ és az $A \cap C$ halmazok? Válaszát indokolja! (3 pont)

$$A \cap C = A \subset \mathbb{R}^+$$

$$A \cap \mathbb{R}^- = \emptyset \Rightarrow \text{diszjunktak} \quad (3)$$

(nincs közös elem)

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n \cdot (4n^2 - 1)}{3}$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (6 pont)

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

1.) $n=1$ esetben $B.o.: 1^2=1$ $F.o.: \frac{1 \cdot 3}{3}=1$ } $B.o. = F.o.$ (1)
 $n=1$ -re igaz.

2.) Tgh. $l \in \mathbb{N}$ esetben fennáll az egyenlőség:
 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2l-1)^2 = \frac{l \cdot (4l^2 - 1)}{3}$ (1)

3.) Bizonyítsuk $(l+1) \in \mathbb{N}$ esetben (gazdálkodj, hogy $1^2 + 3^2 + \dots + (2l-1)^2 + (2l+1)^2 = \frac{(l+1)(4(l+1)^2 - 1)}{3}$)

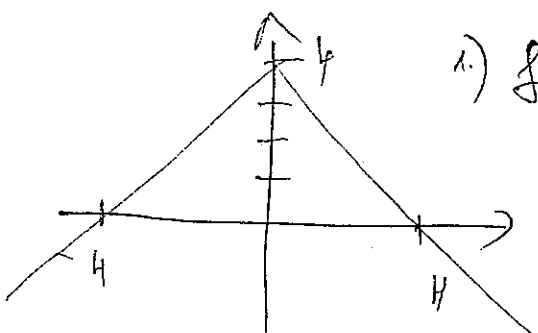
B.o. $1^2 + 3^2 + \dots + (2l-1)^2 + (2l+1)^2 =$ (4)
 $= \frac{l(4l^2 - 1)}{3} + \frac{3 \cdot (2l+1)^2}{3} = \frac{4l^3 - l + 12l^2 + 12l + 3}{3} =$
 $= \frac{4l^3 + 12l^2 + 11l + 3}{3} = \frac{(l+1) \cdot (4(l+1)^2 - 1)}{3} : f.o.$

az állítás igaz.

$\frac{(l+1) \cdot (4l^2 + 8l + 3)}{3} = \frac{4l^3 + 8l^2 + 3l + 4l^2 + 8l + 3}{3} = \frac{4l^3 + 12l^2 + 11l + 3}{3}$

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (5 pont)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 4 - |x|$$



1.) $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 4] \neq \mathbb{R}$, a fgv. nem szürjektív (2)

2.) f nem injektív, mert pl. $f(-4) = f(4) = 0$, bár $-4 \neq 4$ (2)

3.) f tehát nem bijektív. (1)

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! (15 pont)

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(4-3n)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{-3n^2 - 2n + 8} = \frac{-4}{3} = \underline{\underline{-\frac{4}{3}}} \quad (3)$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^{n+2}}{5^{n-2} + 3 \cdot 2^{3n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64 \cdot 8^n}{\frac{1}{25} \cdot 5^n + 6 \cdot 8^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64}{\frac{1}{25} \left(\frac{5}{8}\right)^n + 6} = \frac{64}{6} = \underline{\underline{\frac{32}{3}}} \quad (3)$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n} + \left(5 + \frac{1}{n}\right)^2 \right] = \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \right)^2}_{e^2} + \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{n}\right) \right)^2}_0 = e^4 + 25 = \underline{\underline{e^4 + 25}} \quad (3)$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 4n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 4n}) \cdot \frac{n + \sqrt{n^2 + 4n}}{n + \sqrt{n^2 + 4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^2 - 4n}{n + \sqrt{n^2 + 4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n}}} = \underline{\underline{-2}} \quad (3)$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{30n^4} - 3) = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{30}}_1 \cdot \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{n} \right)^4}_1 - 3 = 1 - 3 = \underline{\underline{-2}} \quad (3)$$

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! (12 pont)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+3}} = \frac{4}{27} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $-1 < q = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ konvergens
geometriai sor

$$S = \frac{4}{27} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 \right) = \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{2}{27}}}$$

(3)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(4-3n)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{4}{3} \neq 0. \quad (\text{divergencia - Értékű})$$

(3)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ $a_n = \frac{8^n}{n!} > 0$, $a_{n+1} = \frac{8^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{8^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot \cancel{8^n} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!} \cdot (n+1) \cdot \cancel{8^n}} =$$

$$= 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!} \text{ konvergens.} \quad (3)$$

(D'Alembert - feltétel helyett
 az Értékű)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{4^{2n}}$

$$a_n = \frac{n^{100}}{4^{2n}} = \frac{n^{100}}{16^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n}{16}\right)^{100}}{16} = \frac{1}{16} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergens.

I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
B változat

A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

$$A = [-8, 2]$$

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| \leq 5\}$, $B = (-3, 5] \subset \mathbb{R}$, és $C = \mathbb{R}^+$.

(a) Határozza meg az $X = [(A \cap B) \cup C] \cap [B \setminus (A \setminus C)]$ halmazt! (6 pont)

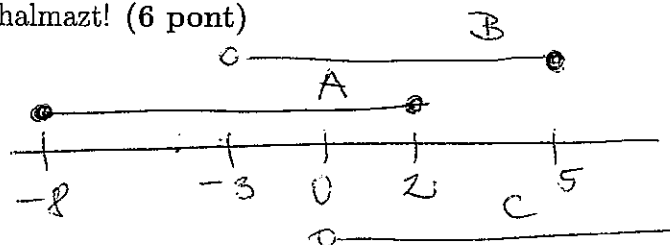
$$A \cap B = [-3, 2] \quad (1)$$

$$(A \cap B) \cup C = (-3, +\infty) \quad (1)$$

$$A \setminus C = [-8, 0] \quad (1)$$

$$B \setminus (A \setminus C) = (0, 5] \quad (1)$$

$$X = (0, 5] \quad (1)$$



(b) Határozza meg az $Y = A \Delta B$ halmazt! (3 pont)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = [-8, -3] \cup (2, 5] \quad (1)$$

$$A \setminus B = [-8, -3] \quad (1)$$

$$B \setminus A = (2, 5] \quad (1)$$

(c) Diszjunktak-e az X és az Y halmazok? Válaszát indokolja! (3 pont)

$X \cap Y \neq \emptyset$, mert pl. $5 \in (X \cap Y)$,
a két halmaz nem diszjunkt. (3)

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (6 pont)

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

1.) $n=1$ esetben:

$$\text{B.o.: } 1 \cdot 1! = 1$$

$$\text{F.o.: } 2! - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \text{B.o.} = \text{F.o.} \quad (1) \text{ igaz.}$$

2.) Tgh: $k \in \mathbb{N}$ esetben igaz az állítás:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! = (k+1)! - 1 \quad (1)$$

3.) Bizonyítsuk $(k+1) \in \mathbb{N}$ esetben igazat, hogy $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1$

$$\text{B.o.: } \underbrace{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k!}_{2.)} + (k+1)(k+1)! = \quad (4)$$

$$= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+1)! \cdot \underbrace{(1 + k+1)}_{k+2} - 1 =$$

$$= (k+2)! - 1 : \text{f.o.}$$

Az állítás tehát igaz. $\square$

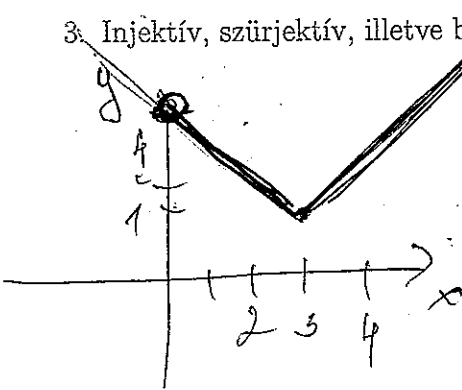
3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (5 pont)

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = |x-3| + 1$$

1.) $f(\mathbb{R}^+) = [1, +\infty) \neq \mathbb{R}^+$ így f nem szürjektív (2)

2.) f nem injektív, mert $f(2) = f(4) = 2$, de $2 \neq 4$. (2)

3.) f nem bijektív (1)



4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! (15 pont)

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(n-3)}{(1-5n)(2n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 9}{-10n^2 + 7n - 1} = -\frac{1}{10}$$

(3)

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^{n+2}}{3^{n+2} + 3 \cdot 2^{3n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{81 \cdot 9^n}{9 \cdot 3^n + 12 \cdot 8^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{81 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^n}{9 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^n + 12} = +\infty \quad (\text{divergens})$$

(3)

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{n+2} + \left(1 + \frac{3}{n}\right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3/2}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3/n}{n}\right)^2$$

$$= e^{-3/2} + 1 = \frac{1}{e\sqrt{e}} + 1$$

(3)

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} ((n+2) - \sqrt{n^2 + 4n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((n+2) - \sqrt{n^2 + 4n}) \cdot \frac{(n+2) + \sqrt{n^2 + 4n}}{(n+2) + \sqrt{n^2 + 4n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - n^2 - 4n}{(n+2) + \sqrt{n^2 + 4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n + 4 - n^2 - 4n}{(n+2) + \sqrt{n^2 + 4n}} = 0$$

(3)

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{100n^3} - 5) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{100} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \right)^3 - 5 = 10 - 5 = 5$$

(3)

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! (12 pont)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{2n+1}} = \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$, $-1 < q = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$ konvergens
geometriai sor

$$S = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 \right) = \frac{5}{2} \left(\frac{4}{3} - 1 \right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

(3)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n-3)}{(1-5n)(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{-1}{10} \neq 0.$$

(3)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}$ $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}} > 0$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+2}}$
konvergens, mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^{n+1}}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n^n \cdot n}{(n+1)^{n+2} \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{e} < 1$$

(3)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{300}}{3^{3n}}$ $a_n = \frac{n^{300}}{27^n} > 0$

Cauchy-féle
gyökérkritérium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^{300}}{27} = \frac{1}{27} < 1 \Rightarrow$$

(3)

konvergens

I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
C változat

A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \leq 4\}$, $B = (-7, 7] \subset \mathbb{R}$, és $C = \mathbb{R}^-$.

$$A = [-1, 7] \quad (1)$$

(a) Határozza meg az $X = [(A \cap B) \cup C] \cup [B \setminus (A \setminus C)]$ halmazt! (6 pont)

$$\begin{aligned} A \cap B &= A \quad (1) \\ (A \cap B) \cup C &= A \cup C = (-\infty, 7] \quad (1) \\ B \setminus (A \setminus C) &= (-7, 0) \quad (1) \\ A \setminus C &= [0, 7] \quad (1) \\ X &= A \cup C = (-\infty, 7] \quad (1) \end{aligned}$$

(b) Határozza meg az $Y = A \Delta B$ halmazt! (3 pont)

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) = B \setminus A = (-7, -1) = Y \quad (1) \\ A \cup B &= B \quad (1) \\ A \cap B &= A \quad (1) \end{aligned}$$

(c) Diszjunktak-e az X és az Y halmazok? Válaszát indokolja! (3 pont)

$$\begin{aligned} X &= (-\infty, 7] \\ Y &= (-7, -1) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} X &= (-\infty, 7] \\ Y &= (-7, -1) \end{aligned}} \right\} Y \subset X; \text{ nem diszjunktak,} \\ &\text{mert } X \cap Y \neq \emptyset. \quad (3)$$

$$1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \dots - \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{n!}$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (6 pont)

$$1 - \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{n!}$$

1.) $n=2$ esetén:

$$\text{B.o.: } 1 - \frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{J.o.: } \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

B.o. = J.o. 1
Igaz.

2.) Tgh. $l \in \mathbb{N}$ esetén igaz:

$$1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \dots - \frac{l-1}{l!} = \frac{1}{l!}$$

1

3.) Biz. $(l+1) \in \mathbb{N}$ -re. Igazoljuk, hogy

$$1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \dots - \frac{l-1}{l!} - \frac{l}{(l+1)!} = \frac{1}{(l+1)!}$$

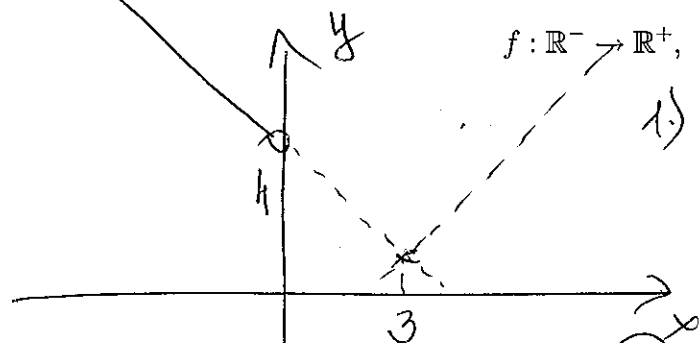
$$\text{B.o.: } \underbrace{1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \dots - \frac{l-1}{l!}}_{2.)} - \frac{l}{(l+1)!} =$$

4

$$= \frac{1}{l!} - \frac{l}{(l+1)!} = \frac{l+1-l}{(l+1)!} = \frac{1}{(l+1)!} = \text{J.o.}$$

A állítás igaz. $\square$

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (5 pont)



$$f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = |x-3| + 1$$

1.) $f(\mathbb{R}^-) = [1, +\infty) \neq \mathbb{R}^+$ így f nem szürjektív 2

2.) f injektív, mert $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$ 2

3.) f nem bijektív, mert nem szürjektív. 1

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! (15 pont)

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)(n-4)}{(1-7n)(2n+1)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^2 - 16}{14u^2 - 5u + 1} = \frac{-1}{14}$$

(3)

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+2}}{8^{n-2} + 3 \cdot 3^{3n+1}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{16 \cdot 4^u}{\frac{1}{64} \cdot 8^u + 9 \cdot 27^u} =$$

(3)

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{16 \cdot \left(\frac{4}{27}\right)^u \rightarrow 0}{\frac{1}{64} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^u + 9} = 0$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{4}{5n}\right)^{n+1} + \left(1 + \frac{5}{n}\right)^4 \right] = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-4/5)}{u}\right)^u \cdot \left(1 + \frac{5}{u}\right) +$$

$$+ \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{u}\right)^4 = e^{-4/5} + 1 = \frac{1}{\sqrt[5]{e^4}} + 1$$

(3)

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} ((n-2) - \sqrt{n^2 + 4n}) = \lim_{u \rightarrow \infty} \left((u-2) - \sqrt{u^2 + 4u} \right) \cdot \frac{(u-2) + \sqrt{u^2 + 4u}}{(u-2) + \sqrt{u^2 + 4u}} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^2 - 4u + 4 - u^2 - 4u}{(u-2) + \sqrt{u^2 + 4u}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-8 + \frac{4}{u} \rightarrow 0}{1 - \frac{2}{u} + \sqrt{1 + \frac{4}{u}}} =$$

$$= -4$$

(3)

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{400n^4} - 4) = \lim_{u \rightarrow \infty} \sqrt[n]{400 \cdot \left(\frac{4}{u}\right)^4} - 4 = -3$$

(3)

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! (12 pont)

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{5^{2n+2}} = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^n, \quad -1 < q = \frac{1}{25} < 1$$

$$S = 4 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{25}} - 1 \right) =$$

konvergens
mértani sor

$$= 4 \cdot \left(\frac{25}{24} - 1 \right) = 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)(n-4)}{(1-7n)(2n+1)} \text{ divergens, mert}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)(n-4)}{(1-7n)(2n+1)} = -\frac{1}{14} \neq 0 \quad (3)$$

(divergencia-kritérium)

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}, \quad a_n = \frac{(n+1)!}{n^n} > 0, \quad a_{n+1} = \frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}}$$

D'Alembert-féle hatványados-kritériummal:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

(3)

a sor konvergens.

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{200}}{4^n}, \quad a_n = \frac{n^{200}}{4^n} > 0$$

Cauchy-féle gyökérkritériummal:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^{200}}{4} = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow (3) \text{ a sor konvergens.}$$

I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
D változat

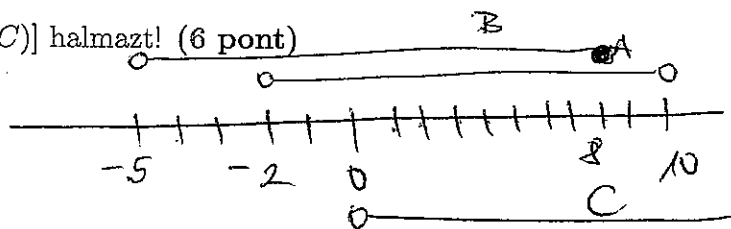
A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 4| < 6\}$, $B = (-5, 8] \subset \mathbb{R}$, és $C = \mathbb{R}^+$.

$$A = (-2, 10)$$

(a) Határozza meg az $X = [(A \cap B) \cup C] \cup [B \setminus (A \setminus C)]$ halmazt! (6 pont)

$$\begin{aligned} A \cap B &= (-2, 8] \quad (1) \\ (A \cap B) \cup C &= (-2, +\infty) \quad (1) \\ A \setminus C &= (-2, 0] \quad (1) \\ B \setminus (A \setminus C) &= (-5, -2] \cup (0, 8] \quad (1) \\ X &= (-5, +\infty) \quad (1) \end{aligned}$$



(b) Határozza meg az $Y = A \Delta B$ halmazt! (3 pont)

$$\begin{aligned} Y &= A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (-5, -2] \cup (8, 10) \\ A \setminus B &= (8, 10) \\ B \setminus A &= (-5, -2] \end{aligned}$$

(3)

(c) Diszjunktak-e az X és az Y halmazok? Válaszát indokolja! (3 pont)

$X \cap Y \neq \emptyset$, mert pl. $-2 \in X \cap Y$, így a halmazok nem diszjunktak.

(3)

$$(2+1) \cdot (2^2+1) \cdot \dots \cdot (2^{2^n}+1) = 2^{2^{n+1}} - 1$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (6 pont)

$$\prod_{k=0}^n (2^{2^k} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1$$

1.) $n=0$ esetek

$$\text{B.o.: } 2+1=3$$

$$\text{F.o.: } 2^2-1=3$$

$$\text{B.o.} = \text{F.o.} \quad (1)$$

2.) Tfl.: $l \in \mathbb{N}$ -re igaz az állítás:

$$(2+1) \cdot (2^2+1) \cdot \dots \cdot (2^{2^l}+1) = 2^{2^{l+1}} - 1 \quad (1)$$

3.) Biz. $(l+1) \in \mathbb{N}$ -re:

$$(2+1) \cdot (2^2+1) \cdot \dots \cdot (2^{2^l}+1) \cdot (2^{2^{l+1}}+1) = 2^{2^{l+2}} - 1 \quad (1)$$

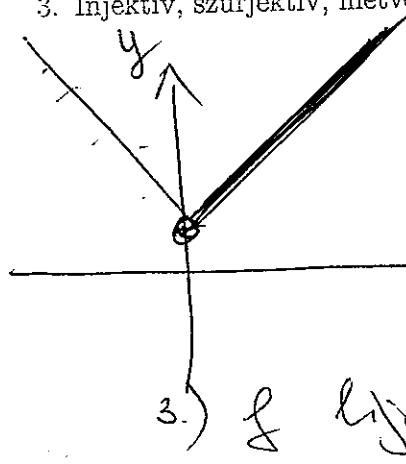
$$\text{B.o.: } \underbrace{(2+1) \cdot (2^2+1) \cdot \dots \cdot (2^{2^l}+1)}_{2.)} \cdot (2^{2^{l+1}}+1) =$$

$$= (2^{2^{l+1}} - 1) \cdot (2^{2^{l+1}} + 1) = (2^{2^{l+1}})^2 - 1 =$$

$$= 2^{2^{l+1} \cdot 2} - 1 = 2^{2^{l+2}} - 1 \quad (4) \quad (1)$$

Az állítás igaz. $\square$

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (5 pont)



$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow (1, +\infty), \quad f(x) = |x| + 1$$

1.) $f(\mathbb{R}^+) = (1, +\infty)$, így f szürjektív. (2)

2.) f injektív, mert $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$
 $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$. (2)

3.) f bijektív, mert injektív és szürjektív. (1)

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! (15 pont)

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n-1)}{(1-3n)(2n+3)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^2 - 1}{-6u^2 - 7u + 3} = \underline{\underline{-\frac{1}{6}}}$$

(3)

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+1}}{9^{n-2} + 2 \cdot 5^{2n-1}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 7^u}{\frac{1}{81} \cdot 9^u + \frac{2}{5} \cdot (25)^u} =$$

$$\textcircled{1} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot \left(\frac{7}{25}\right)^u \rightarrow 0}{\frac{1}{81} \left(\frac{9}{25}\right)^u + \frac{2}{5}} = \underline{\underline{0}} \quad (3)$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^2 \right] = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1/2}{u}\right)^u +$$

$$+ \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{u}\right)^2 = e^{1/2} + 1 = \underline{\underline{\sqrt{e} + 1}} \quad (3)$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 3n + 1}) = \lim_{u \rightarrow \infty} (u - \sqrt{u^2 - 3u + 1}) \cdot \frac{u + \sqrt{u^2 - 3u + 1}}{u + \sqrt{u^2 - 3u + 1}}$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^2 - u^2 + 3u - 1}{(u) + \sqrt{u^2 - 3u + 1}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{u} \rightarrow 0}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{u} + \frac{1}{u^2}} \rightarrow 0} = \underline{\underline{3/2}} \quad (3)$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{1000n^5} - 5) =$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \sqrt[5]{1000} \cdot (\sqrt[5]{u})^5 - 5 = 1 - 5 = \underline{\underline{-4}}$$

(3)

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus soroakat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! (12 pont)

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{5^{2n+2}} = \frac{100}{25} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^n, \quad -1 < q = \frac{1}{25} < 1$$

$$S = 4 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{25}} - 1 \right) =$$

(3)

konvergens
mértani sor

$$= 4 \cdot \frac{1}{24} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{(1-3n)(2n+3)} \text{ divergens, mert}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n-1)}{(1-3n)(2n+3)} = -\frac{1}{6} \neq 0 \quad (3)$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} \quad a_n = \frac{(2n)!}{n^n} > 0, \quad a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot 2 \cdot (n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot (2n)!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{2 \cdot (2n+1)}_{\downarrow +\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}}_{\frac{1}{e}} = +\infty > 1 \Rightarrow \text{a } (3) \text{ sor}$$

divergens
(D'Alembert-féle
kritériummal)

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{a sor}$$

konvergens

(Cauchy-féle gyökértétel)

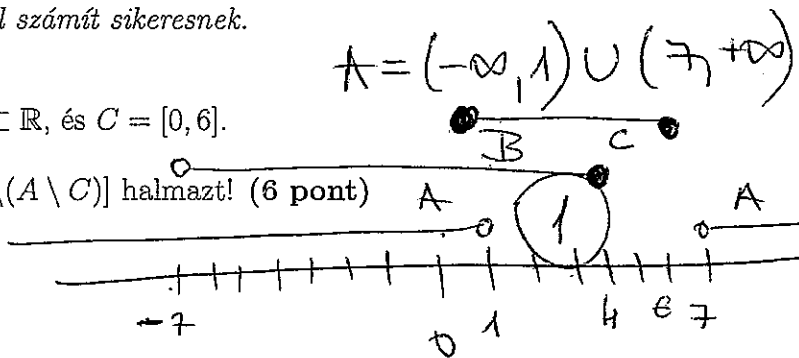
I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
E változat

A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 4| > 3\}$, $B = (-7, 4] \subset \mathbb{R}$, és $C = [0, 6]$.

(a) Határozza meg az $X = [(A \cap B) \cup C] \cup [B \setminus (A \setminus C)]$ halmazt! (6 pont)

$$\begin{aligned} A \cap B &= (-7, 1) \quad (1) \\ (A \cap B) \cup C &= (-7, 6] \quad (1) \\ A \setminus C &= (-\infty, 0) \cup (7, +\infty) \quad (1) \\ B \setminus (A \setminus C) &= [0, 4] \quad (1) \\ X &= (-7, 6] \quad (1) \end{aligned}$$



(b) Határozza meg az $Y = A \Delta B$ halmazt! (3 pont)

$$\begin{aligned} Y &= A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (-\infty, -7) \cup [1, 4] \cup (7, +\infty) \\ A \setminus B &= (-\infty, -7] \cup (7, +\infty) \quad (3) \\ B \setminus A &= [1, 4] \end{aligned}$$

(c) Diszjunktak-e az X és az Y halmazok? Válaszát indokolja! (3 pont)

$X \cap Y \neq \emptyset$, mert pl. $4 \in X \cap Y$, így a halmazok nem diszjunktak.

(3)

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (6 pont)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

1.) $n=1$ -re B.o.: $\frac{1}{5}$ I.o.: $\frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$ } B.o. = I.o. igaz. (1)

2.) Tgh: $l \in \mathbb{N}$ -re igaz:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4l-3)(4l+1)} = \frac{l}{4l+1} \quad (1)$$

3.) Biz. $(l+1) \in \mathbb{N}$ -re:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4l-3)(4l+1)} + \frac{1}{(4l+1)(4l+5)} = \frac{l+1}{4l+5}$$

B.o.: $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4l-3)(4l+1)} + \frac{1}{(4l+1)(4l+5)} =$ (4)

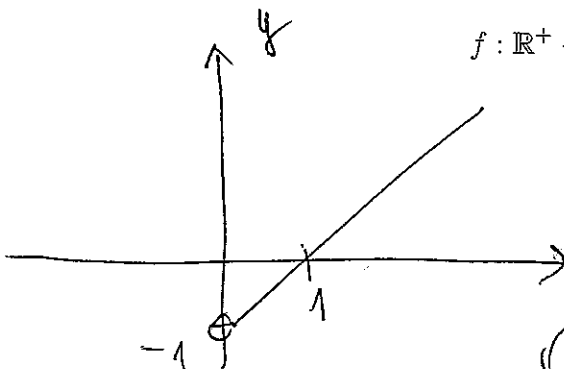
= ~~$\frac{l+1}{4l+5}$~~ = $\frac{l}{4l+1} + \frac{1}{(4l+1)(4l+5)} =$

= $\frac{l(4l+5) + 1}{(4l+1)(4l+5)} = \frac{4l^2 + 5l + 1}{(4l+1)(4l+5)} =$

= $\frac{(4l+1)(l+1)}{(4l+1)(4l+5)} = \frac{l+1}{4l+5} = \text{I.o.}$

Ar allhat igaz. $\square$

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (5 pont)



$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = |x| - 1$

1.) $f(\mathbb{R}^+) = (-1, +\infty) \neq \mathbb{R}$
f nem szürjektív

2.) f injektív (2 pont) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$
 $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$

3.) f nem bijektív, mert nem szürjektív.

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! (15 pont)

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(n-3)}{(2n-1)(4n+3)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^2 - 9}{8u^2 + 2u - 3} = \frac{1}{8}$$

(3)

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{3^{n-2} + 2 \cdot 2^{2n-1}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 5^u}{\frac{1}{9} \cdot 3^u + 4^u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^u}{\frac{1}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^u + 1} = +\infty$$

(3)

(divergens)

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n} + \left(3 - \frac{3}{n}\right)^3 \right] = \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1/3}{u}\right)^u \right)^3 +$$

$$+ \lim_{u \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{3}{u}\right)^3 = (e^{1/3})^3 + 27 = e + 27$$

(3)

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{4n^2 + 1}) = \lim_{u \rightarrow \infty} (2u - \sqrt{4u^2 + 1}) \cdot \frac{2u + \sqrt{4u^2 + 1}}{2u + \sqrt{4u^2 + 1}}$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{4u^2 - 4u^2 - 1}{2u + \sqrt{4u^2 + 1}} = 0$$

(3)

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{20n^4} - 2) = \lim_{u \rightarrow \infty} \sqrt[4]{20} \cdot (\sqrt[4]{u})^4 - 2 = -1$$

1

(3)

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! (12 pont)

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{3^{2n+1}} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} \quad 1 - 1 < q = \frac{1}{9} < 1$$

konvergens geometriai sor

$$S = 6 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} - 1 \right) = 6 \cdot \left(\frac{9}{8} - 1 \right) =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

(3)

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n-3)}{(2n-1)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{divergens, mert}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{8} \neq 0.$$

(3)
(divergencia - krit.)

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!} \quad a_n = \frac{n^n}{(2n)!} > 0, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} =$$

(3)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot (n+1)^n \cdot \cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!} \cdot (2n+1) \cdot 2(n+1) \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot (2n+1)} \right) = 0$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 0 < 1 \Rightarrow \text{A sor konvergens. } e$$

(D'Alembert-féle hatványos-teszt)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt[n]{n}} = e > 1 \Rightarrow \text{A sor}$$

(3)

divergens.

(Cauchy-féle gyökteszt)