Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Miskolc, 2018. október 16.

Név:..

Neptun kód:..

Gyakorlatvezető neve:.............................

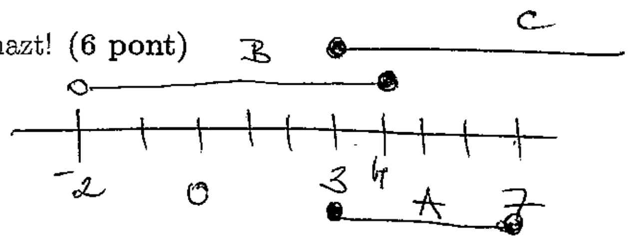
I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
A változat

A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

$A = [3,7]$ 1

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-5| \leq 2\}$, $B = (-2, 4] \subset \mathbb{R}$, és $C = [3, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

   (a) Határozza meg az $X = [\underbrace{(A \cup B) \cap C}_{A}] \cup [C \setminus (A \setminus B)]$ halmazt! **(6 pont)**



$A \cup B = (-2, 7]$ 1

$(A \cup B) \cap C = [3, 7] = A$ 1

$A \setminus B = (4, 7]$ 1

$C \setminus (A \setminus B) = [3, 4] \cup (7, +\infty)$ 1

$X = A \cup (C \setminus (A \setminus B)) = C = [3, +\infty)$ 1

   (b) Határozza meg az $A \triangle B$ halmazt! **(3 pont)**

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (-2, 3) \cup (4, 7]$ 1

$A \setminus B = (4, 7]$ 1

$B \setminus A = (-2, 3)$ 1

   (c) Diszjunktak-e az $\mathbb{R}^-$ és az $A \cap C$ halmazok? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

$A \cap C = A \subset \mathbb{R}^+$

$A \cap \mathbb{R}^- = \emptyset \Rightarrow$ diszjunktak 3

(nincs közös elem)

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n\cdot(4n^2-1)}{3}$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (**6 pont**)

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

1.) $n=1$ esetén B.o.: $1^2=1$, J.o.: $\frac{1\cdot 3}{3}=1$ } B.o. = J.o. (1)
$n=1$-re igaz.

2.) Tfh. $l\in\mathbb{N}$ esetén fennáll az egyenlőség:

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2l-1)^2=\frac{l\cdot(4l^2-1)}{3}$$ (1)

3.) Bizonyítsuk $(l+1)\in\mathbb{N}$ esetén (igazoljuk), hogy

$$1^2+3^2+\ldots+(2l-1)^2+(2l+1)^2=\frac{(l+1)(4(l+1)^2-1)}{3}$$

B.o.: $\underbrace{1^2+3^2+\ldots+(2l-1)^2}_{2.)}+(2l+1)^2=$ (4)

$$=\frac{l(4l^2-1)}{3}+\frac{3\cdot\overbrace{(2l+1)^2}^{4l^2+4l+1}}{3}=\frac{4l^3-l+12l^2+12l+3}{3}=$$

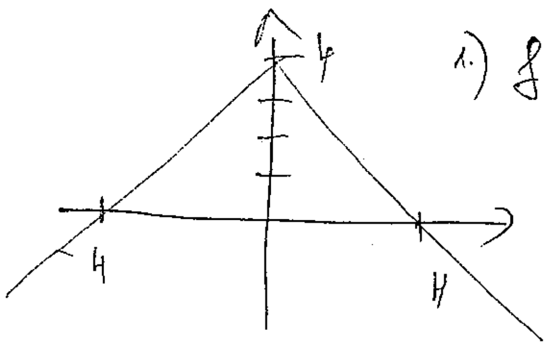
$$=\frac{4l^3+12l^2+11l+3}{3}=\frac{(l+1)\cdot(4(l+1)^2-1)}{3}$$: J.o.

Az állítás igaz.

$$\frac{(l+1)\cdot(4l^2+8l+3)}{3}=\frac{4l^3+8l^2+3l+4l^2+8l+3}{3}=\frac{4l^3+12l^2+11l+3}{3}$$

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (**5 pont**)

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=4-|x|$$



1.) $f(\mathbb{R})=(-\infty,4]\neq\mathbb{R}$, a fgv. nem szürjektív (2)

2.) f nem injektív, mert pl. $f(-4)=f(4)=0$, bár $-4\neq 4$ (2)

3.) f tehát nem bijektív. (1)

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(15 pont)**

(a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{(2n+1)(2n-1)}{(4-3n)(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-1}{-3n^2-2n+8} = \dfrac{-4}{3}$

3

(b) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{8^{n+2}}{5^{n-2}+3\cdot 2^{3n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{64\cdot 8^n}{\frac{1}{25}\cdot 5^n + 6\cdot 8^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{64}{\frac{1}{25}\underbrace{\left(\frac{5}{8}\right)^n}_{\to 0}+6} =$

$= \dfrac{64}{6} = \dfrac{32}{3}$

3

(c) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left[\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{2n} + \left(5+\dfrac{1}{n}\right)^2\right] = \Big(\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n}_{e^2}\Big)^2 + \Big(\lim\limits_{n\to\infty}\big(5+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{0}\big)\Big)^2$

$= e^4 + 25$

3

(d) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(n-\sqrt{n^2+4n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n-\sqrt{n^2+4n}\right)\cdot\dfrac{n+\sqrt{n^2+4n}}{n+\sqrt{n^2+4n}} =$

3

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}-4n}{n+\sqrt{n^2+4n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-4}{1+\sqrt{1+\underbrace{\frac{4}{n}}_{\to 0}}} = -2$

(e) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(\sqrt[n]{30n^4}-3\right) = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{30}}_{1}\cdot\Big(\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}_{1}\Big)^4 - 3 =$

$= 1-3 = -2$

3

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! **(12 pont)**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+3}} = \frac{4}{27} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $-1 < q = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ konvergens mértani sor

$$S = \frac{4}{27} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 \right) = \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{2}{27}}}$$

3

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(4-3n)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, mert

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{-4}{3} \neq 0.$ (divergencia-kritérium)

3

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ $\quad a_n = \frac{8^n}{n!} > 0$, $\quad a_{n+1} = \frac{8^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{8^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8 \cdot \cancel{8^n} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1) \cdot \cancel{8^n}} =$$

$= 0 < 1 \Rightarrow$ A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ konvergens.

3

(D'Alembert-féle hányados kritérium)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{4^{2n}}$ $\quad a_n = \frac{n^{100}}{4^{2n}} = \frac{n^{100}}{16^n}$

3

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{100}}{16} = \frac{1}{16} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergens.

Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Miskolc, 2018. október 16.

Név:..

Neptun kód:..

Gyakorlatvezető neve:..............................

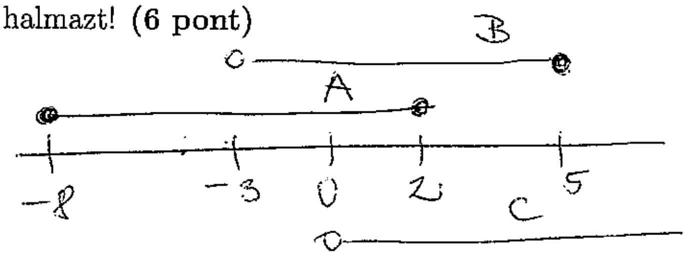
I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
B változat

A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

$A = [-8, 2]$ 1

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| \leq 5\}$, $B = (-3, 5] \subset \mathbb{R}$, és $C = \mathbb{R}^+$.

(a) Határozza meg az $X = [(A \cap B) \cup C] \cap [B \setminus (A \setminus C)]$ halmazt! **(6 pont)**



$A \cap B = (-3, 2]$ 1

$(A \cap B) \cup C = (-3, +\infty)$ 1

$A \setminus C = [-8, 0]$ 1

$B \setminus (A \setminus C) = (0, 5]$ 1

$X = (0, 5]$ 1

(b) Határozza meg az $Y = A \triangle B$ halmazt! **(3 pont)**

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = [-8, -3] \cup (2, 5]$ 1

$A \setminus B = [-8, -3]$ 1

$B \setminus A = (2, 5]$ 1

(c) Diszjunktak-e az X és az Y halmazok? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

$X \cap Y \neq \emptyset$, mert pl. $5 \in (X \cap Y)$,

a két halmaz nem diszjunkt. 3

$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (**6 pont**)

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1$$

1.) $n=1$ esetén: B.o.: $1\cdot 1! = 1$

J.o.: $2! - 1 = 2 - 1 = 1$ } B.o. = J.o. igaz. 1

2.) Tfh: $l \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás:

$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + l\cdot l! = (l+1)! - 1$ 1

3.) Bizonyítsuk $(l+1) \in \mathbb{N}$ esetén. Igazoljuk, hogy $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + l\cdot l! + (l+1)(l+1)! = (l+2)! - 1$

B.o.: $\underbrace{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + l\cdot l!}_{2.)} + (l+1)(l+1)! =$ 4

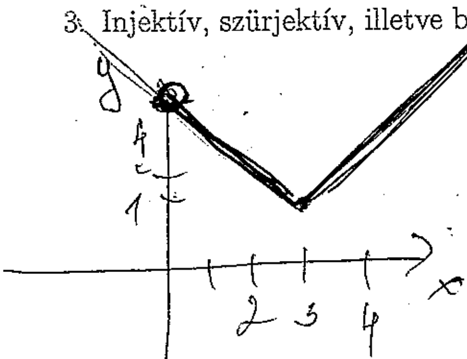
$= (l+1)! - 1 + (l+1)(l+1)! = (l+1)!\,(\underbrace{1 + l + 1}_{l+2}) - 1 =$

$= (l+2)! - 1$: J.o.

Az állítás tehát igaz. □

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (**5 pont**)

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad f(x) = |x-3| + 1$



2

1.) $f(\mathbb{R}^+) = [1, +\infty) \neq \mathbb{R}^+$ így f nem szürjektív

2.) f nem ~~bijektív~~ injektív, mert 2 $f(2) = f(4) = 2$, de $2 \neq 4$.

3.) f nem bijektív 1

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(15 pont)**

(a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+3)(n-3)}{(1-5n)(2n-1)} =$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-9}{-10n^2+7n-1} = -\frac{1}{10}$

3

(b) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{9^{n+2}}{3^{n+2}+3\cdot 2^{3n+2}} =$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{81\cdot 9^n}{9\cdot 3^n+12\cdot 8^n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{81\cdot \overbrace{\left(\frac{9}{8}\right)^n}^{\to +\infty}}{9\cdot \underbrace{\left(\frac{3}{8}\right)^n}_{\to 0}+12} = +\infty$ (divergens)

3

(c) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left[\left(1-\frac{3}{2n}\right)^{n+2}+\left(1+\frac{3}{n}\right)^2\right] =$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3/2}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3/2}{n}\right)^2}_{1}$

$+ \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}_{1} = e^{-3/2}+1 = \frac{1}{e\sqrt{e}}+1$

3

(d) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left((n+2)-\sqrt{n^2+4n}\right) =$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+2)-\sqrt{n^2+4n}\right)\cdot\frac{(n+2)+\sqrt{n^2+4n}}{(n+2)+\sqrt{n^2+4n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2-n^2-4n}{(n+2)+\sqrt{n^2+4n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}+\cancel{4n}+4-\cancel{n^2}-\cancel{4n}}{(n+2)+\sqrt{n^2+4n}}$

$= 0$

3

(e) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(\sqrt[n]{100n^3}-5\right) =$

$= \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{100}}_{1}\cdot\left(\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}_{1}\right)^3 - 5 = 1-5 = -4$

3

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! **(12 pont)**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{2n+1}}$ $= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$, $-1 < q = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$ konvergens mértani sor

$$S = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 \right) = \frac{5}{2}\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

3

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n-3)}{(1-5n)(2n-1)}$ $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, mert

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{-1}{10} \neq 0.$ 3

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}$ $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}} > 0$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+2}}$

konvergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^{n+1}}{n!} =$$

3

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)} \cdot n^n \cdot n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^{n+1} \cdot \cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$$

$\frac{1}{e} < 1$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{300}}{3^{3n}}$ $a_n = \frac{n^{300}}{27^n} > 0$, Cauchy-féle gyökkritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{300}}{27} = \frac{1}{27} < 1 \Rightarrow$$ a sor konvergens

3

Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Miskolc, 2018. október 16.

Név:...

Neptun kód:...

Gyakorlatvezető neve:.............................

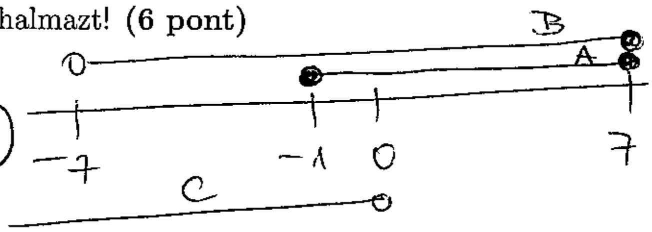
I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
C változat

A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

$A = [-1, 7]$ 1

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \leq 4\}$, $B = (-7, 7] \subset \mathbb{R}$, és $C = \mathbb{R}^-$.

(a) Határozza meg az $X = [(A \cap B) \cup C] \cup [B \setminus (A \setminus C)]$ halmazt! **(6 pont)**



$A \cap B = A$ 1

$(A \cap B) \cup C = A \cup C = (-\infty, 7]$ 1

$B \setminus (A \setminus C) = (-7, 0)$ 1

$A \setminus C = [0, 7]$ 1

$X = A \cup C = (-\infty, 7]$ 1

(b) Határozza meg az $Y = A \triangle B$ halmazt! **(3 pont)**

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = B \setminus A = (-7, -1) = Y$ 1

$A \cup B = B$ 1

$A \cap B = A$ 1

(c) Diszjunktak-e az X és az Y halmazok? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

$X = (-\infty, 7]$, $Y = (-7, -1)$ $\Big\}$ $Y \subset X$, nem diszjunktak, 3

mert $X \cap Y \neq \emptyset$.

$$1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\dots-\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{n!}$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (**6 pont**)

$$1-\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k!}=\frac{1}{n!}$$

1.) $n=2$ esetén:

$$\left.\begin{aligned} &\text{B.o.}: 1-\frac{1}{2!}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\ &\text{J.o.}: \frac{1}{2!}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \quad \text{B.o.} = \text{J.o.}$$

Igaz. 1

2.) Tfh. $l \in \mathbb{N}$ esetén igaz:

$$1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\dots-\frac{l-1}{l!}=\frac{1}{l!}$$

1

3.) Biz. $(l+1)\in\mathbb{N}$-re. Igazoljuk, hogy

$$1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\dots-\frac{l-1}{l!}-\frac{l}{(l+1)!}=\frac{1}{(l+1)!}$$

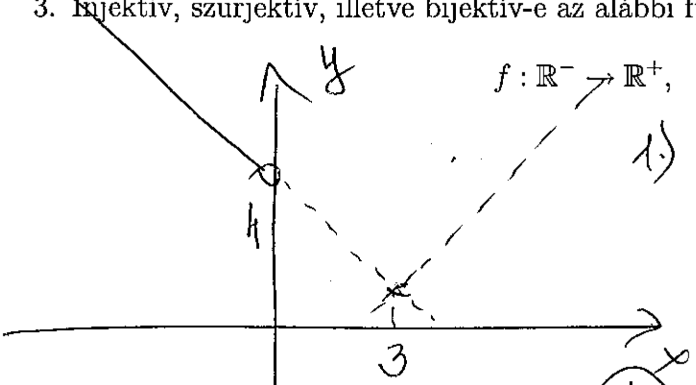
$$\underline{\text{B.o.}}: \underbrace{1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\dots-\frac{l-1}{l!}}_{2.)}-\frac{l}{(l+1)!}=$$

4

$$=\frac{1}{l!}-\frac{l}{(l+1)!}=\frac{l+1-l}{(l+1)!}=\frac{1}{(l+1)!}=\underline{\text{J.o.}}$$

~~A~~ állítás igaz. $\square$

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (**5 pont**)



$f:\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}^+,\qquad f(x)=|x-3|+1$

1.) $f(\mathbb{R}^-)=(4,+\infty)\neq\mathbb{R}^+$, így f nem szürjektív. 2

2.) f injektív, mert $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^+$, $x_1\neq x_2$ ~~esetén~~ $f(x_1)\neq f(x_2)$ 2

3.) f nem bijektív, mert nem szürjektív. 1

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(15 pont)**

(a) $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+4)(n-4)}{(1-7n)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-16}{-14n^2-5n+1} = \underline{\underline{-\frac{1}{14}}}$$

3

(b) $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{4^{n+2}}{8^{n-2}+3\cdot 3^{3n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{16\cdot 4^n}{\frac{1}{64}\cdot 8^n+9\cdot 27^n} =$$

3

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{16\cdot \underbrace{\left(\frac{4}{27}\right)^n}_{\to 0}}{\frac{1}{64}\cdot\underbrace{\left(\frac{8}{27}\right)^n}_{\to 0}+9} = \underline{\underline{0}}$$

(c) $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left[\left(1-\frac{4}{5n}\right)^{n+1}+\left(1+\frac{5}{n}\right)^4\right] = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{(-4/5)}{n}\right)^n\cdot\left(1+\underbrace{\frac{(-4/5)}{n}}_{\to 0}\right) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{5}{n}}_{0}\right)^4 = e^{-4/5}+1 = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt[5]{e^4}}+1}}$$

3

(d) $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left((n-2)-\sqrt{n^2+4n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left((n-2)-\sqrt{n^2+4n}\right)\cdot\frac{(n-2)+\sqrt{n^2+4n}}{(n-2)+\sqrt{n^2+4n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}-4n+4-\cancel{n^2}-4n}{n-2+\sqrt{n^2+4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-8+\overbrace{\frac{4}{n}}^{\to 0}}{1-\frac{2}{n}+\sqrt{1+\underbrace{\frac{4}{n}}_{\to 0}}} =$$

$$= \underline{\underline{-4}}$$

3

(e) $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\sqrt[n]{400n^4}-4\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{400}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^4}_{1} - 4 = -3$$

3

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! **(12 pont)**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{5^{2n+2}} = 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{25}\right)^n$, $-1 < q = \frac{1}{25} < 1$

konvergens mértani sor

$$S = 4\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{25}} - 1\right) = 4\cdot\left(\frac{25}{24}-1\right) = 4\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{6}$$

3

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)(n-4)}{(1-7n)(2n+1)}$ divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)(n-4)}{(1-7n)(2n+1)} = \frac{-1}{14} \neq 0$$

3

(divergencia-kritérium)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$, $a_n = \frac{(n+1)!}{n^n} > 0$, $a_{n+1} = \frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}}$

D'Alembert-féle hányados-kritériummal:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n+1)!}\cdot(n+2)\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)\cancel{(n+1)!}}$$

3

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Downarrow$

a sor konvergens.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{200}}{2^{2n}}$, $a_n = \frac{n^{200}}{4^n} > 0$

Cauchy-féle gyökkritériummal:

3

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{200}}{4} = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$$ a sor konvergens.

Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Miskolc, 2018. október 16.

Név:..

Neptun kód:..

Gyakorlatvezető neve:..............................

I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
D változat

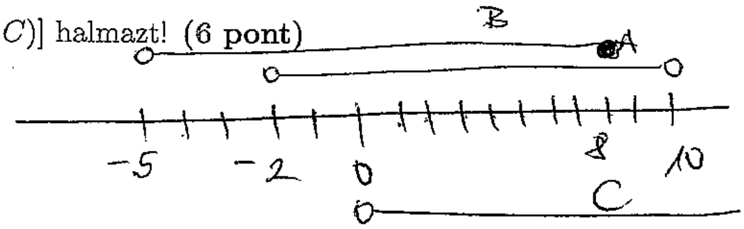
A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

1

$A = (-2, 10)$

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-4| < 6\}$, $B = (-5, 8] \subset \mathbb{R}$, és $C = \mathbb{R}^+$.

(a) Határozza meg az $X = [(A \cap B) \cup C] \cup [B \backslash (A \setminus C)]$ halmazt! **(6 pont)**



$A \cap B = (-2, 8]$ 1

$(A \cap B) \cup C = (-2, +\infty)$ 1

$A \setminus C = (-2, 0]$ 1

$B \setminus (A \setminus C) = (-5, -2] \cup (0, 8]$ 1

$X = (-5, +\infty)$ 1

(b) Határozza meg az $Y = A \triangle B$ halmazt! **(3 pont)**

$Y = A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (-5, -2] \cup (8, 10)$

$A \setminus B = (8, 10)$

3

$B \setminus A = (-5, -2]$

(c) Diszjunktak-e az X és az Y halmazok? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

$X \cap Y \neq \emptyset$, mert pl. $-2 \in X \cap Y$, így a halmazok nem diszjunktak.

3

$$(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (**6 pont**)

$$\prod_{k=0}^{n}(2^{2^k}+1)=2^{2^{n+1}}-1$$

1.) n = 0 esetén

B.o.: $2+1=3$

J.o.: $2^2-1=3$

B.o. = J.o. 1

2.) Tfh. $l\in\mathbb{N}$-re igaz az állítás:

$$(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^l}+1)=2^{2^{l+1}}-1$$ 1

3.) Biz. $(l+1)\in\mathbb{N}$-re:

$$(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^l}+1)\cdot(2^{2^{l+1}}+1)=2^{2^{l+2}}-1$$

$$\text{B.o.: }\underbrace{(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^l}+1)}_{2.)}\cdot(2^{2^{l+1}}+1)=$$

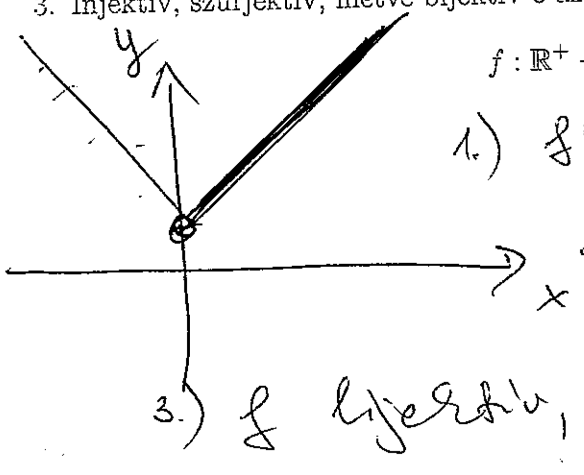
$$=(2^{2^{l+1}}-1)\cdot(2^{2^{l+1}}+1)=(2^{2^{l+1}})^2-1=$$

$$=2^{2^{l+1}\cdot 2}-1=2^{2^{l+2}}-1$$ 4

Az állítás igaz. □

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (**5 pont**)

$$f:\mathbb{R}^+\to(1,+\infty);\qquad f(x)=|x|+1$$



2

1.) $f(\mathbb{R}^+)=(1,+\infty)$, így f szürjektív

2.) f injektív, mert $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^+$ $x_1\neq x_2$ esetén $f(x_1)\neq f(x_2)$. 2

3.) f bijektív, mert injektív és szürjektív 1

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(15 pont)**

(a) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{(1-3n)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{-6n^2-7n+3} = -\frac{1}{6}$

3

(b) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{7^{n+1}}{9^{n-2}+2\cdot 5^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 7^n}{\frac{1}{81}\cdot 9^n+\frac{2}{5}\cdot 25^n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot\left(\frac{7}{25}\right)^n}{\frac{1}{81}\left(\frac{9}{25}\right)^n+\frac{2}{5}} = 0$

$\left(\frac{7}{25}\right)^n \to 0$, $\left(\frac{9}{25}\right)^n \to 0$

3

(c) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n+\left(1-\frac{2}{n}\right)^2\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1/2}{n}\right)^n +$

$+ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^2 = e^{1/2}+1 = \sqrt{e}+1$

$\frac{2}{n}\to 0$

3

(d) $\lim_{n\longrightarrow\infty} (n-\sqrt{n^2-3n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-3n+1}\right)\cdot\frac{n+\sqrt{n^2-3n+1}}{n+\sqrt{n^2-3n+1}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}+3n-1}{n+\sqrt{n^2-3n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}$

$\frac{1}{n}\to 0$, $\frac{3}{n}\to 0$, $\frac{1}{n^2}\to 0$

$= 3/2$

3

(e) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\sqrt[n]{1000n^5}-5\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1000}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^5 - 5 = 1-5 = -4$

3

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! **(12 pont)**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{5^{2n+2}} = \frac{100}{25} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^n$, $-1 < q = \frac{1}{25} < 1$

konvergens mértani sor

$$S = 4 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{25}} - 1 \right) = 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$$

3

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{(1-3n)(2n+3)}$ divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{(1-3n)(2n+3)} = -\frac{1}{6} \neq 0$$

3

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$ $\quad a_n = \frac{(2n)!}{n^n} > 0$, $a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(2n)!}\,(2n+1)\,2\cdot\cancel{(n+1)}\cdot n^n}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{(2n)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{2\cdot(2n+1)}_{\downarrow\, +\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}_{\downarrow\, 1/e} = +\infty > 1 \Rightarrow$$ a ~~sor~~ divergens (D'Alembert-féle hányadoskr.)

3

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

3

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$$ a sor konvergens

(Cauchy-féle gyökkritérium)

Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Miskolc, 2018. október 16.

Név:...

Neptun kód:...

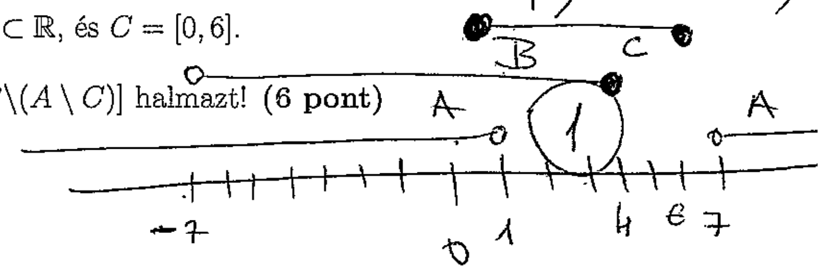
Gyakorlatvezető neve:.............................

I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
E változat

A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

$A = (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-4| > 3\}$, $B = (-7, 4] \subset \mathbb{R}$, és $C = [0, 6]$.



(a) Határozza meg az $X = [(A \cap B) \cup C] \cup [B \setminus (A \setminus C)]$ halmazt! **(6 pont)**

$A \cap B = (-7, 1)$ 1

$(A \cap B) \cup C = (-7, 6]$ 1

$A \setminus C = (-\infty, 0) \cup (7, +\infty)$ 1

$B \setminus (A \setminus C) = [0, 4]$ 1

$X = (-7, 6]$ 1

(b) Határozza meg az $Y = A \triangle B$ halmazt! **(3 pont)**

$Y = A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (-\infty, -7) \cup [1, 4] \cup (7, +\infty)$

$A \setminus B = (-\infty, -7] \cup (7, +\infty)$

$B \setminus A = [1, 4]$

3

(c) Diszjunktak-e az X és az Y halmazok? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

$X \cap Y \neq \emptyset$, mert pl. $4 \in X \cap Y$, így a halmazok nem diszjunktak.

3

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\dots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (**6 pont**)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

1.) $n=1$-re B.o.: $\frac{1}{5}$; J.o.: $\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}$ } B.o. = J.o. igaz. 1

2.) Tfh: $l\in\mathbb{N}$-re igaz:

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\dots+\frac{1}{(4l-3)(4l+1)}=\frac{l}{4l+1}$$ 1

3.) Biz. $(l+1)\in\mathbb{N}$-re:

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\dots+\frac{1}{(4l-3)(4l+1)}+\frac{1}{(4l+1)(4l+5)}=\frac{l+1}{4l+5}$$

B.o.: $$\underbrace{\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\dots+\frac{1}{(4l-3)(4l+1)}}_{2)}+\frac{1}{(4l+1)(4l+5)}=$$ 4

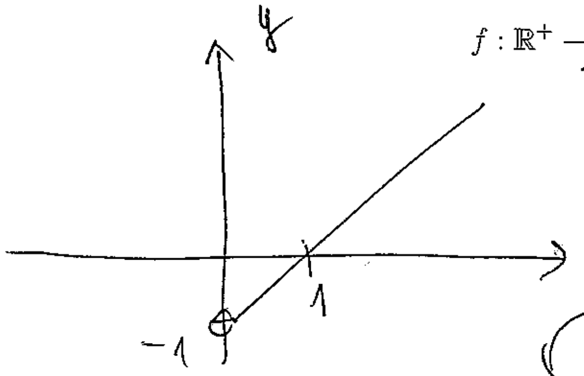
$$=\cancel{\frac{l+1}{4l+}}=\frac{l}{4l+1}+\frac{1}{(4l+1)(4l+5)}=$$

$$=\frac{l(4l+5)+1}{(4l+1)(4l+5)}=\frac{4l^2+5l+1}{(4l+1)(4l+5)}=$$

$$=\frac{\cancel{(4l+1)}(l+1)}{\cancel{(4l+1)}(4l+5)}=\frac{l+1}{4l+5}$$: J.o. Az állítás igaz.

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (**5 pont**)

$f:\mathbb{R}^+\to$ [illegible] $\mathbb{R}$, $\quad f(x)=|x|-1$



2

1.) $f(\mathbb{R}^+)=(-1,+\infty)\neq\mathbb{R}$

f nem szürjektív

2.) f injektív, mert $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ $x_1\neq x_2$ esetén $f(x_1)\neq f(x_2)$ 2

1

3.) f nem bijektív, mert nem szürjektív.

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(15 pont)**

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)(n-3)}{(2n-1)(4n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-9}{8n^2+2n-3} = \underline{\underline{\dfrac{1}{8}}}$

3

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n+1}}{3^{n-2}+2\cdot 2^{2n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 5^n}{\frac{1}{9}\cdot 3^n + 4^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot \overbrace{\left(\frac{5}{4}\right)^n}^{\to +\infty}}{\frac{1}{9}\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\to 0}+1} = \underline{\underline{+\infty}}$

3

(divergens)

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{3n} + \left(3-\dfrac{3}{n}\right)^3\right] = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1/3}{n}\right)^n\right)^3 +$

3

$+ \lim\limits_{n\to\infty} \left(3-\underbrace{\dfrac{3}{n}}_{\to 0}\right)^3 = \left(e^{1/3}\right)^3 + 27 = \underline{\underline{e+27}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n-\sqrt{4n^2+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)\cdot \dfrac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{2n+\sqrt{4n^2+1}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{4n^2}-\cancel{4n^2}-1}{2n+\sqrt{4n^2+1}} = \underline{\underline{0}}$

3

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{20n^4}-2\right) = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{20}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^4}_{1} - 2 = \underline{\underline{-1}}$

3

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! **(12 pont)**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{3^{2n+1}} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$, $-1 < q = \frac{1}{9} < 1$

konvergens mértani sor

$$S = 6 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 \right) = 6 \cdot \left(\frac{9}{8} - 1 \right) =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

3

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n-3)}{(2n-1)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, mert

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{8} \neq 0.$

3

(divergencia-krit.)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ $\quad a_n = \frac{n^n}{(2n)!} > 0$, $\quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} =$$

3

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n \cdot \cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}\,(2n+1) \cdot 2\,\cancel{(n+1)} \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\to e} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\cdot(2n+1)}}_{\to 0} = 0$$

$0 < 1 \Rightarrow$ A sor konvergens.

(D'Alembert-féle hányadoskr.)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} = e > 1 \Rightarrow \text{A sor}$$

3 divergens.

(Cauchy-féle gyökkr.)