

Többváltozós függvények

Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia

ME, Analízis Tanszék

2010. április 7.

2.1. Definíció

A $H_1, H_2, \dots, H_n \subset \mathbb{R}$ (ahol $n \geq 2$ egész szám) nemüres valós számhalmazok $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ Descartes-szorzatán a következő halmazt értjük:

$$H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n = \{(h_1, h_2, \dots, h_n) \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2, \dots, h_n \in H_n\}.$$

Ezen halmaz $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ elemét **rendezett valós szám n -esnek** nevezzük.

A definícióban szereplő H_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nemüres halmazok nem feltétlenül különbözöek. Ha $H_1 = H_2 = \dots = H_n$, akkor a Descartes-szorzat jelölése:

$$H \times H \times \dots \times H = H^n.$$

Ha $H = \mathbb{R}$, akkor az $\mathbb{R}^n$ halmazhoz, a rendezett valós szám n -esek halmazához jutunk, amelyet **valós n -dimenziós térnek** nevezzük.

Az $\mathbb{R}^n$ tér egy tetszőleges P pontját a koordinátaival együtt

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

jelöli.

2.2. Definíció

Az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges A és B pontjának **távolságán** a

$$\varrho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$$

valós számot értjük.

2.3. Definíció

Az $\mathbb{R}^n$ térben egy tetszőleges P_0 pont körüli r sugarú nyílt gömbön értjük az összes olyan P pontból álló halmazt, amelyre a

$$\varrho(P, P_0) < r$$

reláció teljesül.

2.4. Definíció

Legyen $A(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ és $B(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tetszőlegesek, de

$$a_i < b_i$$

minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén. Ekkor azon $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontok halmazát, amelyekre

$$a_i < x_i < b_i$$

reláció teljesül minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén, **nyílt n -téglának** nevezzük.

2.5. Definíció

A nyílt gömböt és a nyílt n -téglát **környezet**nek nevezzük.

2.6. Definíció

Az $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ leképezések közül azokat, amelyek az $\mathbb{R}^n$ tér egy nemüres részhalmazának minden eleméhez pontosan egy valós számot rendelnek, **n -változós valós függvények**nek nevezzük.

Jelölése:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

A többváltozós függvények megadhatók:

- 1 táblázattal;
- 2 grafikusan (legfeljebb kétváltozós függvényekig);
- 3 képlettel (ebben az esetben a függvény értelmezési tartománya mindazon pontok halmaza, amelyek koordinátáira a függvényt megadó kifejezésnek van értelme). Kétváltozós esetben a $z = f(x, y)$ megadást használjuk.

2.7. Példák

- 1 Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ kétváltozós függvény értelmezési tartománya az egész $\mathbb{R}^2$ sík.
- 2 A $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ kétváltozós függvény értelmezési tartománya azon $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontok halmaza, amelyekre:

$$r^2 - x^2 - y^2 \geq 0,$$

azaz

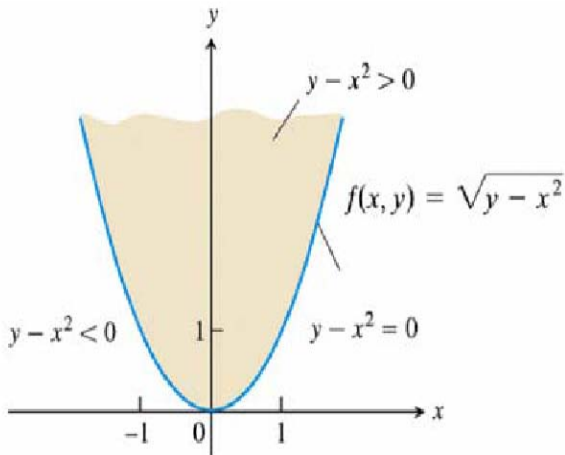
$$x^2 + y^2 \leq r^2.$$

A függvény tehát az r sugarú kör belsejében és határán értelmezett.

- 3 Határozzuk meg az $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ értelmezési tartományát!

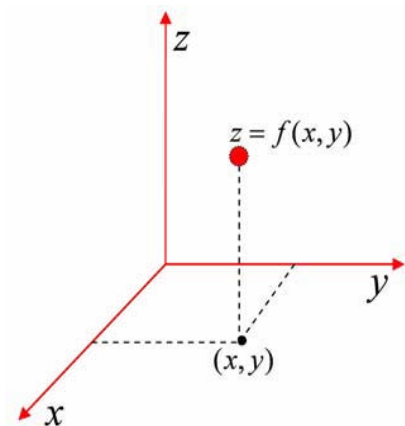
A többváltozós függvények értelmezési tartománya

Megoldás: Az $f(x, y)$ értelmezési tartománya az a tartomány, ahol $y - x^2 \geq 0$, azaz:



A kétváltozós függvények geometriai interpretációja

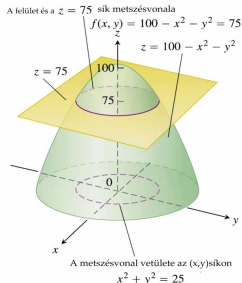
A $z = f(x, y)$ függvény geometriai interpretációját, hasonlóan az egyváltozós függvények grafikonjához, a háromdimenziós Descartes-féle koordinátarendszerben úgy kapjuk, hogy az (x, y) koordinátájú síkbeli ponthoz az f által hozzárendelt z értéket mérjük fel merőlegesen, így bizonyos esetekben **felületeket** kapunk.



A felületek ábrázolását megkönnyítik a főmetszetek. A felületet a koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal elmetszük, és az így keletkezett metszetgörbéket a megfelelő koordinátasíkra vetítjük. A $z = c$, ahol c konstans főmetszeteket **szintvonalak**nak nevezzük.

2.8. Példa

Vázoljuk a $z = 100 - x^2 - y^2$ felületet és határozzuk meg a $z = 75$ síkkal való metszésvonalát (szintvonalát)!

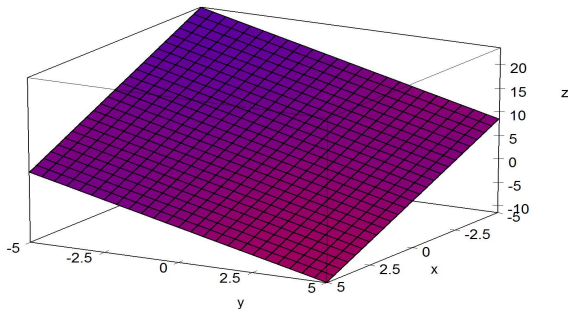


I. A sík

Általános egyenlete: $Ax + By + Cz = D$, ahol A, B, C a sík normálvektorának skalár komponenseivel arányos mennyiségek.

2.9. Példa

Vázoljuk a $4x + 3y + 2z = 12$ síkot!

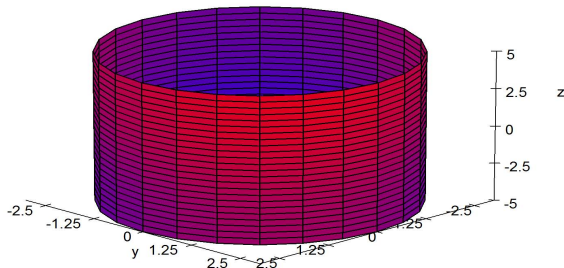


II. Hengerfelület

Hengerfelület keletkezik, ha egy görbe mentén egy egyenest az ún. alkotó egyenest önmagával párhuzamosan elmozdítunk. A görbét vezérgörbének nevezzük.

2.10. Példa

Vázoljuk az $x^2 + y^2 = 9$ hengert!



IV. Forgásfelületek

Ha egy síkgörbét egy egyenes körül forgatunk, forgásfelület keletkezik.

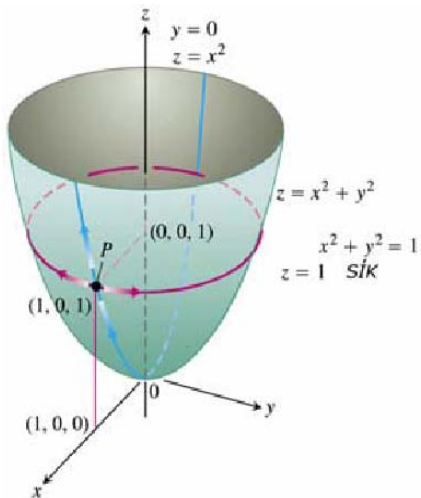
Forgassuk az xy -síkbeli $z = f(x)$ görbét a z -tengely körül! A keletkező forgásfelület egyenlete:

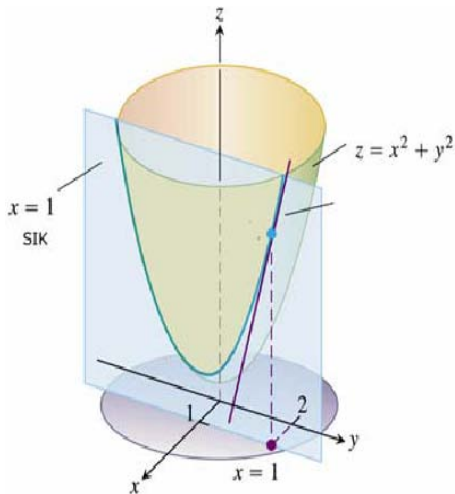
$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

2.11. Példa

A $z = x^2$ parabolát a z -tengely körül forgatva, a keletkező forgásfelület egyenlete:

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{forgási paraboloid}$$





V. Másodrendű felületek

Azokat a térbeli alakzatokat, amelyeknek egyenlete derékszögű koordinátákkal megadva másodfokú, másodrendű felületeknek nevezzük.

Nevezetes másodrendű felületek és egyenleteik:

❶ a gömb, egyenlete: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (R a gömb sugara);

❷ az ellipszoid, egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

❸ az egyköpenyű hiperboloid, egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

❹ a kétköpenyű hiperboloid, egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

❺ a nyeregfelület (hiperbolikus paraboloid), egyenlete:
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$

