

## Szigorlati szóbeli kérdések - Analízis

*Matematika szigorlat GEMAN138B*

1. Írja fel a *Bernoulli-egyenlőtlenséget* és igazolja!
2. Fogalmazza meg a *teljes indukció* elvét!
3. Mikor *felülről ill. alulról korlátos* egy nem üres  $A \subset \mathbb{R}$ -beli halmaz? Ismertesse az *infimum* és a *supremum* fogalmát!
4. Definiálja a következő fogalmakat: *reláció, reláció értelmezési tartománya, értékkészlete, függvény!*
5. Definiálja a *relációk kompozícióját*! Ismertesse a relációk kompozíciójának inverzéről szóló tételt és bizonyítsa! Mit tud mondani a relációk kompozíciójának asszociativitásáról?
6. Definiálja a *parciális rendezés, rendezési reláció* és *ekvivalenciareláció* fogalmát! Mutasson példát a felsorolt relációkra!
7. Mikor nevezünk egy függvényt *invertálhatónak*?
8. Mikor nevezünk egy függvényt *injektívnek, szürjektívnek, bijektívnek*? Adjon példát a felsorolt típusokra!
9. Írja fel a valós számok közötti *rendezés és műveletek* kapcsolatára vonatkozó axiómákat!
10. Mit mond ki a *teljességi axióma*?
11. Adja meg a *valós számsorozat* definícióját! Mit jelent az, hogy egy valós számsorozat *korlátos*?
12. Mit ért egy sorozat *részsorozatán*? Adja meg a *torlódási pont* definícióját!
13. Mikor nevezünk egy valós számsorozatot *konvergensnek*? Mit ért nullsorozat alatt? Adjon példát konvergens sorozatra!
14. Mikor nevezünk egy valós számsorozatot *divergensnek*? Adjon példát divergens sorozatra! Divergens sorozat lehet-e korlátos?
15. Adjon szükséges feltételt egy valós számsorozat konvergenciájára! Igazolja az állítást!
16. Írja fel a valós számsorozatokra vonatkozó *rendőr-tételt*!
17. Milyen állításokat ismer *monoton sorozatok konvergenciájáról*? Mondja ki és igazolja a *monoton sorozatok konvergenciájára* vonatkozó tételeket!
18. Írja fel a konvergens *sorozatok műveleti tulajdonságait* kimondó tételt és igazolja!
19. Igaz-e, hogy két divergens sorozat összege is divergens? Válaszát indokolja!
20. Fogalmazza meg a *Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tételt*!

21. Mikor nevezzük egy valós számsorozatot *Cauchy-sorozatnak*?
22. Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó *Cauchy-féle konvergencia-kritériumot*!
23. Milyen *nevezetes sorozatokat* ismer? Adja meg ezen sorozatok határértékét!
24. Adja meg a *végtelen valós számsor* definícióját!
25. Mikor nevezzük egy végtelen valós számsort *konvergensnek* ill. *divergensnek*?
26. Definiálja a mértani sort! Milyen tételt ismer a *mértani sorok* konvergenciájáról?
27. Fogalmazza meg a sorokra vonatkozó *Cauchy-féle konvergencia kritériumot* és vázolja a bizonyítás lépéseit!
28. Adjon szükséges feltételt a numerikus sorok konvergenciájára! Bizonyítsa az állítást!
29. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *összehasonlító kritériumokat*! Mutassa be példákon keresztül a kritériumok felhasználását!
30. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *Cauchy-féle gyökkritériumot*! Mutassa be példákon keresztül a kritérium felhasználását!
31. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *D'Alembert-féle hányadoskritériumot*! Mutassa be példákon keresztül a kritérium felhasználását!
32. Melyek a *Leibniz-féle sorok* és milyen kritériumot ismer a konvergenciájukra vonatkozóan! Adjon példát *Leibniz-sorra*!
33. Mikor nevezzük egy végtelen valós számsort *abszolút konvergensnek*, ill. *feltételesen konvergensnek*? Adjon példát a felsorolt típusokra!
34. Definiálja a harmonikus sort! Vizsgálja a sort konvergencia szempontjából!
35. Adja meg a *hatványsor* definícióját!
36. Fogalmazza meg a *Cauchy-Hadamard tételt*!
37. Definiálja hatványsorral az  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{sh} x$  és  $\operatorname{ch} x$  függvényeket! Milyen összefüggéseket ismer a felsorolt függvények között?
38. Definiálja az alábbi fogalmakat: *egyváltozós valós függvény*, *korlátos függvény*, *függvény adott pontbeli határértéke*.
39. Milyen függvényt nevezzük *párosnak* ill. *páratlannak*? Adja meg a *periodikus függvény* fogalmát!
40. Mikor mondjuk, hogy az  $f$  valós függvény  $x_0$  helyen felvett *határértéke* egy  $A \in \mathbb{R}$  szám? Adjon szükséges és elégséges feltételt a határérték létezésére!
41. Definiálja egy  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  *függvény pontbeli folytonosságát*! Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?

42. Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát! Adjon példát olyan valós változós függvényre, amelynek van megszüntethető szakadási helye!
43. Definiálja az *elsőfajú szakadási hely* fogalmát! Adjon példát olyan valós változós függvényre, amelynek van elsőfajú szakadása!
44. Definiálja a *másodfajú szakadási hely* fogalmát! Adjon példát olyan valós változós függvényre, amelynek van másodfajú szakadási helye!
45. Sorolja fel a *szignum függvény*, az *egészrész függvény* és a *tötrész függvény* fontosabb tulajdonságait!
46. Jellemezze a *racióális egész függvények* fontosabb tulajdonságait! Mutasson be néhány konkrét példát!
47. Jellemezze a *valódi racionális törtfüggvények* fontosabb tulajdonságait! Mutasson be néhány konkrét példát!
48. Mutassa be és jellemezze a *trigonometrikus függvényeket*!
49. Mutassa be és jellemezze a trigonometrikus függvények inverzeit!
50. Mutassa be és jellemezze a *hiperbolikus függvényeket*! Milyen kapcsolat van a hiperbolikus függvények és az exponenciális függvények között?
51. Mutassa be és jellemezze a hiperbolikus függvények inverzeit!
52. Írja fel és igazolja az *Euler-azonosságot*!
53. Mit értünk egy pont poláris koordinátáin? Milyen összefüggés van a Descartes-féle és a poláris koordináták között? Adja meg néhány nevezetes görbe *polárkoordinátás egyenletét*!
54. Mit értünk a síkgörbék *paraméteres megadásán*? Írja fel a kör és az ellipszis (egyik) paraméteres egyenletrendszerét!
55. Mit értünk az  $f$  függvény *differenciálhányadosán*? Adja meg a *differenciálhányados* geometriai jelentését!
56. Differenciálható-e az  $f$  függvény az  $x_0$  helyen, ha ott folytonos?
57. Folytonos-e a függvény az  $x_0$  helyen, ha ott differenciálható?
58. Mit értünk a függvény *nulladik deriváltján*, *első deriváltján* és *második deriváltján*? Az  $n$ -ed fokú polinom hányadik deriváltja lesz elsőfokú?
59. Mondja ki a *Rolle-féle középértéktételt*! Mit jelent a tétel geometriailag?
60. Mondja ki a *Lagrange-féle középértéktételt*! Bizonyítsa a tételt! Mit jelent a tétel geometriailag? Miért nem érvényes a Lagrange-féle középértéktétel sem az  $f(x) = |x|$ , sem a  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  függvényre a  $[-1, 2]$  intervallum esetén?

61. Mondja ki a *Cauchy-féle közéértéktételt*! Bizonyítsa a tételt!
62. Definiálja az  $f$  differenciálható függvény  $P(x_0, f(x_0))$  pontjához tartozó *érintőjének és normálisának* egyenletét!
63. Mondja ki a L'Hospital-szabályt! Mutassa be, hogy milyen típusú határértékek esetén használható a tétel!
64. Adja meg a *Taylor-polinom* és a *Maclaurin polinom* fogalmát  $n$ -szer differenciálható függvények esetén!
65. Milyen összefüggés van az  $f$  függvény monotonitása és első deriváltja között valamely  $I \subset D_f$  intervallumon?
66. Mi a szükséges feltétele annak, hogy az  $f$  függvénynek az  $x_0$  helyen *lokális szélsőértéke* legyen? Bizonyítsa az állítást!
67. Mi az elegendő feltétele annak, hogy az  $f$  függvénynek az  $x_0$  helyen *lokális szélsőértéke* legyen? Milyen feltételek esetén van az  $f$  függvénynek az  $x_0$  helyen maximuma, ill. minimuma?
68. Mit értünk azon, hogy a  $g$  görbe az  $I$  intervallumon *konvex*, ill. *konkáv*?
69. Adja meg az *inflexiós pont* és az *inflexiós érintő* definícióját! Milyen geometriai tulajdonsággal rendelkezik az inflexiós érintő? Hol lehet az  $y = f(x)$  egyenletű görbének inflexiós pontja?
70. Hogyan értelmezzük egy függvény *Taylor-sorát*, ill. *Maclaurin-sorát*?
71. Mit értünk az  $f$  függvény *primitív függvényén*, ill. *határozatlan integrálján*?
72. Írjon fel és bizonyítson legalább három *integrálási szabályt*!
73. Írja fel és bizonyítsa a *parciális integrálásról* szóló tételt! Mi a parciális integrálás lényege? Mutassa be, hogy milyen esetekben alkalmazható a módszer!
74. Ismertesse a *helyettesítéses integrálásról* szóló tételt! Mi a lényege a helyettesítéses integrálásnak? Mutasson be néhány példát, ahol célszerű helyettesítéses integrálást alkalmazni!
75. Mikor alkalmazható a  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  helyettesítés? Mutasson be néhány konkrét példát, ahol célszerű ezt a helyettesítéses integrálást alkalmazni!
76. Milyen típusú integrálok esetében célszerű alkalmazni a *linearizáló formulákat*? Mutasson be néhány konkrét példát!
77. Definiálja az  $f$  függvény  $[a, b]$  intervallumra vonatkozó *határozott integrálját*! Mit értük azon, hogy egy függvény egy intervallum felett integrálható?
78. Ismertesse a határozott integrál fontosabb tulajdonságait!
79. Mondja ki és bizonyítsa a *Newton-Leibniz-formulát*! Ha a primitív függvényt helyettesítéses integrálással keressük, akkor hogyan célszerű a határozott integrál kiszámításánál eljárni?

80. Mondja ki az *integrálszámítás középértéktételét*! Mit jelent a tétel geometriailag?
81. Adja meg a trigonometrikus sor definícióját! Mit értünk *Fourier-soron*? Milyen alakú a páros, ill. a páratlan függvények Fourier-sora?
82. Mit értünk az  $f$  függvény  $[a, +\infty)$  intervallumon vett *improprius integrálján*? Miben különbözik az improprius integrál a Riemann-integráltól?
83. Mit értünk az  $a$  hely környezetében nemkorlátos  $f$  függvény  $[a, b]$  intervallumra vonatkozó *improprius integrálján*?
84. Definiálja a *kétváltozós valós függvény* fogalmát!
85. Mit értünk az  $f$  kétváltozós függvény  $(x_0, y_0)$  pontbeli *határértékén*, ill. *folytonosságán*?
86. Hogyan értelmezzük az  $f$  kétváltozós függvény parciális deriváltjait? Mit ért a kétváltozós függvény adott pontbeli gradiensén?
87. Adja meg a kétváltozós függvény *iránymenti deriváltjának* definícióját! Hogyan határozható meg az iránymenti derivált?
88. Adja meg a  $z = f(x, y)$  felület *érintősíkjának* definícióját! Hogyan határozható meg az érintősík egyenlete?
89. Definiálja a lokális szélsőérték fogalmát kétváltozós függvény esetén! Fogalmazzon meg szükséges és elégséges feltételt kétváltozós függvény lokális szélsőértékének létezésére!
90. Adja meg a *differenciálegyenlet*, ill. a *közönséges differenciálegyenlet* definícióját! Miben különbözik egymástól a közönséges és a parciális differenciálegyenlet? Mikor nevezünk egy differenciálegyenletet  $n$ -ed rendűnek?
91. Adja meg a *lineáris differenciálegyenlet* fogalmát! Mutasson példát lineáris differenciálegyenletekre! Írja fel az  $n$ -ed rendű lineáris differenciálegyenlet általános alakját! Mikor homogén, ill. inhomogén a lineáris differenciálegyenlet?
92. Mit értünk a differenciálegyenlet megoldásán?
93. Mit értünk síkbeli  $n$ -paraméteres *görbeseregen*, ill. a görbesereg differenciálegyenletén? Hogyan állítható elő egy  $n$ -paraméteres *görbesereg differenciálegyenlete*?
94. Mit értünk egy adott görbesereg izogonális-, ill. ortogonális trajektóriáin? Hogyan írható fel az *ortogonális trajektória* differenciálegyenlete?
95. Mikor nevezünk egy elsőrendű differenciálegyenletet *szétválasztható változójúnak*? Ismertesse a megoldás lépéseit!
96. Adja meg a *változóiban homogén differenciálegyenlet* definícióját, majd ismertesse a megoldás lépéseit!
97. Definiálja az *elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletet*! Mutassa be a megoldását!

98. Definiálja az *elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletet*! Mutassa be a megoldását!
99. Írja fel a *Bernoulli-féle differenciálegyenlet* általános alakját, majd ismertesse a megoldás lépéseit!
100. Jellemezze a *közönséges másodrendű állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenletek* megoldásait!