Miskolci Egyetem

GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

Polárkoordinátás és paraméteres megadású görbék

oktatási segédanyag

Összeállította:
Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia

Miskolc, 2013.

Köszönetnyilvánítás

Az **Polárkoordinátás és paraméteres megadású görbék** című oktatási segédanyag a **TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001** jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Tartalomjegyzék

1 Paraméteres megadású görbék

1.1 Görbék paraméteres megadása

1.1.1 . Írja fel annak a körnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely átmegy az origón és középpontja az $M(3,0)$ pont!

1.1.2. Adja meg az

$$\begin{cases} x(t) = t+1, \\ y(t) = t^2 - 5, \end{cases} \qquad t \in [-1, +\infty)$$

paraméteresen adott függvény Descartes-koordinátás egyenletét, majd vázolja a függvény grafikonját!

1.1.3. Adja meg az

$$\begin{cases} x(t) = 1+\cos t, \\ y(t) = 3+\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

paraméteresen adott görbe Descartes-koordinátás egyenletét, majd vázolja és nevezze meg a görbét!

1.1.4. Adja meg az

$$\begin{cases} x(t) = -4+\cos t, \\ y(t) = 5+\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

paraméteresen adott görbe Descartes-koordinátás egyenletét, majd vázolja és nevezze meg a görbét!

1.1.5. Köszöbölje ki az

$$\begin{cases} x(t) = 2+4\cos t, \\ y(t) = 1+4\sin t, \end{cases} \qquad t \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

paraméteresen adott görbe egyenletrendszeréből a t paramétert! Nevezze meg a görbét!

1.1.6. Határozza meg az

$$\begin{cases} x(t) = 2+4\cos t, \\ y(t) = 5+3\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

ellipszis középpontjának koordinátáit és tengelyeinek hosszát! Adja meg az ellipszis Descartes-koordinátás egyenletét! Határozza meg az ellipszis lineáris és numerikus excentricitását, valamint a fókuszpontok koordinátáit! Vázolja a görbét!

1.1.7. Adja meg paraméteresen az $x^2 + y^2 - 4y = 0$ egyenletű kört!

1.1.8. Adja meg paraméteresen az $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ egyenletű ellipszist! Vázolja a görbét!

1.1.9. Vázolja az

$$\begin{cases} x(t) = \sin t, \\ y(t) = \cos 2t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbét! Adja meg a görbe Descartes-koordinátás egyenletét!

1.1.10. Vázolja az

$$\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{t}, \\ y(t) = t - \dfrac{1}{t}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbét! Írja fel a görbe Descartes-koordinátás egyenletét! Adja meg a görbe nevezetes adatait!

1.1.11. Vázolja az

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\cos t}, \\ y(t) = \operatorname{tg} t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbét! Írja fel a görbe Descartes-koordinátás egyenletét! Adja meg a görbe nevezetes adatait!

1.1.12. Írja fel annak a hiperbolának a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek aszimptotái az $y = \pm 2x$ egyenesek és egyik fókusza az $F_1(5, 0)$ pont!

1.1.13. Mekkora az $x^2 - 2y^2 = 8$ hiperbola valós féltengelye, képzetes féltengelye, lineáris és numerikus excenrticitása? Írja fel a $x^2 - 2y^2 = 8$ hiperbola paraméteres egyenletrendszerét!

1.1.14. Vázolja az

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{ch} t, \\ y(t) = \operatorname{sh} t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbét! Adja meg a görbe Descartes-koordinátás egyenletét!

1.1.15. Vázolja az

$$\begin{cases} x(t) = -2 \operatorname{ch} t, \\ y(t) = 3 \operatorname{sh} t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbét! Adja meg a görbe Descartes-koordinátás egyenletét!

1.1.16. Vázolja az

$$\begin{cases} x(t) = 2 \pm 4 \operatorname{ch} t, \\ y(t) = 5 + 3 \operatorname{sh} t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott hiperbolát! Adja meg a hiperbola Descartes-koordinátás egyenletét, fókuszpontjait, lineáris és numerikus excentricitását!

1.1.17. Küszöbölje ki az asztroida paraméteres egyenletrendszeréből a paramétert! Vázolja a görbét!

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t, \\ y(t) = \sin^3 t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.1.18. Küszöbölje ki az alábbi paraméteres egyenletrendszerből a paramétert! Nevezze meg a görbét!

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t, \\ y(t) = 1 - t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.1.19. Vázolja az alábbi paraméteresen adott görbéket! Küszöbölje ki a paramétert! Milyen határok között változik x és y?

(a) $$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = t^2, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R};$$

(b) $$\begin{cases} x(t) = \sin t, \\ y(t) = \sin^2 t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R};$$

(c) $$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sgn} t, \\ y(t) = \operatorname{sgn}^2 t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R};$$

(d) $$\begin{cases} x(t) = 1 + t^2, \\ y(t) = 3 - t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.1.20. Vázolja az

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos\left(\dfrac{\pi}{3} \cdot \sin t\right), \\ y(t) = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{3} \cdot \sin t\right), \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbét! Adja meg a görbe Descartes-koordinátás egyenletét!

1.2 Paraméteres alakban adott függvény deriváltja

1.2.1. Határozza meg $y' = \dfrac{dy}{dx}$ értékét az

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + t, \\ y(t) = t^7 + t + 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

paraméteres alakban adott görbére!

1.2.2. Határozza meg $y' = \dfrac{dy}{dx}$ értékét az

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t, \\ y(t) = 2\sin t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

paraméteres alakban adott görbére, ha $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$!

1.2.3. Határozza meg $y' = \dfrac{dy}{dx}$ értékét az alábbi paraméteres alakban adott görbére!

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cdot \sin t, \\ y(t) = e^t \cdot \cos t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.2.4. Határozza meg $y' = \dfrac{dy}{dx}$ értékét az

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t, \\ y(t) = \sin^3 t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

paraméteres alakban adott görbére, ha $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$!

1.2.5. Határozza meg az

$$\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

paraméteres alakban adott ellipszisnek a $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ paraméterértékhez tartozó pontjához húzott érintő iránytangensét! Vázolja a görbét!

1.2.6. Határozza meg $y' = \dfrac{dy}{dx}$ értékét az alábbi paraméteres alakban adott görbére, ha $t_0 = 1$!

$$\begin{cases} x(t) = t^5 + \sin(2\pi t), \\ y(t) = t + e^t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.2.7. Határozza meg $y' = \dfrac{dy}{dx}$ értékét az alábbi paraméteres alakban adott görbére a $P(1,1)$ pontban!

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + e^t, \\ y(t) = t + e^t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.2.8. Határozza meg $y' = \dfrac{dy}{dx}$ értékét az alábbi paraméteres alakban adott görbére a $P(1,0)$ pontban!

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\cos 2t}{e^t}, \\ y(t) = \dfrac{\sin 2t}{e^t}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.2.9. Adja meg az alábbi paraméteres alakban adott görbe $t_0 = 0$ paramétrértékű pontjában az érintőegyenes egyenletét!

$$\begin{cases} x(t) = 3e^t, \\ y(t) = 5e^{-t}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1.2.10. Mikor merőleges az

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 - 5, \\ y(t) = t^3 + 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

görbe érintője az $x + y + 3 = 0$ egyenesre?

1.2.11. Határozza meg a $9x^2 + 16y^2 = 52$ egyenletű ellipszis azon érintőit, amelyek párhuzamosak a $4y + 3\sqrt{3}x = 4$ egyenessel!

1.2.12. Határozza meg az

$$\begin{cases} x(t) = 8\cos^3 t, \\ y(t) = 8\sin^3 t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

paraméteres alakban adott asztroida azon pontjait, amelyekhez húzott érintők párhuzamosak az $y = x$ egyenessel!

2 Görbék polárkoordinátás megadása

2.1 Polárkoordinátás megadású görbék

2.1.1 . Adja meg az alábbi, Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben adott pontok polárkoordináta-rendszerbeli megfelelőjét!

(a) $P_1(-2, 2)$; (b) $P_2(5, 5\sqrt{3})$;

(c) $P_3(0, 1)$; (d) $P_4(-1, -\sqrt{3})$.

2.1.2. Adja meg az alábbi, polárkoordináta-rendszerben adott pontokat Descartes-féle derékszögű koordinátákkal!

(a) $Q_1\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$; (b) $Q_2\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$;

(c) $Q_3\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$; (d) $Q_4\left(-4, \frac{\pi}{3}\right)$.

2.1.3. Nevezze meg a $\varphi = \frac{\pi}{4}$ polárkoordinátás megadású görbét! Adja meg Descartes-koordinátás egyenletét!

2.1.4. Nevezze meg a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ polárkoordinátás megadású görbét! Adja meg Descartes-koordinátás egyenletét!

2.1.5 . Vázolja az alábbi, polárkoordinátás megadású köröket! Írja fel a Descartes-koordinátás egyenletet! Adja meg a körök paraméteres egyenletrendszerét is!

(a) $r = 4$; (b) $r = 2\cos\varphi$;

(c) $r = 6\sin\varphi$; (d) $r = 6(\sin\varphi + \cos\varphi)$.

2.1.6. Adja meg az alábbi körök polárkoordinátás egyenletét!

(a) $x^2 + y^2 = 100$;

(b) $x^2 + (y-4)^2 = 16$;

(c) $(x-6)^2 + y^2 = 36$;

(d) $x^2 + y^2 = 8x$;

(e) $x^2 + y^2 = 2y$;

(f) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 32$.

2.1.7. Vázolja és nevezze meg az alábbi, polárkoordinátás megadású görbéket! Írja fel a Descartes-koordinátás egyenletet! Adja meg a paraméteres egyenletrendszert is!

(a) $r = -10\cos\varphi$;

(b) $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$;

(c) $r = \dfrac{4}{\sin\varphi}$;

(d) $r = -\dfrac{3}{\cos\varphi}$;

(e) $r = -\dfrac{1}{\sin\varphi}$;

(f) $r = \dfrac{5}{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)}$;

(g) $r = \dfrac{2}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$;

(h) $r = 8\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

2.1.8 . Vázolja az alábbi polárkoordinátás egyenlettel adott görbéket! Írja fel a Descartes-koordinátás egyenleteket is!

(a) $r = 8\sin^2\varphi$;

(b) $r = 3\sin 2\varphi$;

(c) $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$;

(d) $r = 2\sin 3\varphi$;

(e) $r = 2\cos 3\varphi$;

(f) $r = 1 + 2\cos\varphi$;

(g) $r = 4 + 2\cos\varphi$;

(h) $r^2 = \sin 2\varphi$;

(i) $r = \sin 4\varphi$;

(j) $r = 2 + \cos 2\varphi$.

2.1.9 . Vázolja az alábbi polárkoordinátás egyenlettel adott kardioidokat! Írja fel a Descartes-koordinátás egyenleteket is!

(a) $r = 1 + \cos\varphi$;

(b) $r = 1 - \cos\varphi$;

(c) $r = 1 + \sin\varphi$;

(d) $r = 1 - \sin\varphi$.

2.1.10. Vázolja az $r = \cos^2\dfrac{\varphi}{2}$ polárkoordinátás megadású görbe grafikonját! Milyen kapcsolat van az $r = \cos^2\dfrac{\varphi}{2}$ és az $r = 1 + \cos\varphi$ görbék grafikonjai között?

2.1.11. Vázolja az $r = \sin\dfrac{\varphi}{2}$ polárkoordinátás megadású görbe grafikonját! Adja meg a görbe Descartes-koordinátás egyenletét!

2.1.12. Vázolja az $r = \sin^2\dfrac{\varphi}{2}$ polárkoordinátás megadású görbe grafikonját! Milyen kapcsolat van az $r = \sin^2\dfrac{\varphi}{2}$ és az $r = 1 - \cos\varphi$ görbék grafikonjai között?

2.1.13. Vázolja az $r = 3 - 2\sin\varphi$ és az $r = 3 + 2\cos\varphi$ limakonok grafikonját! Milyen kapcsolat van a görbék grafikonjai között?

2.1.14. Írja fel az alábbi kúpszeletek egyenletét poláris koordinátákkal!

(a) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(b) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$;

(c) $x^2 = y$;

(d) $y^2 = 16x$;

(e) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$;

(f) $xy = 4$.

2.1.15. Vázolja az $r = \dfrac{6}{\sqrt{9 - 5\sin^2\varphi}}$ polárkoordinátás megadású görbét és adja meg a Descartes-koordinátás egyenletét!

2.1.16. Vázolja az alábbi spirálisokat!

(a) $r = 4\varphi$;

(b) $r = 3\varphi^2$;

(c) $r = \dfrac{2}{\varphi}$;

(d) $r = \dfrac{6}{\varphi} + 3$;

(e) $r = \pm 2\sqrt{\varphi}$;

(f) $r = 3 \pm \sqrt{\varphi}$;

(g) $r = e^{\varphi}$;

(h) $r = -\dfrac{1}{4}e^{\varphi}$.

2.1.17. Írja fel az alábbi görbe polárkoordinátás egyenletét és vázolja a görbét!

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - y^2 = x^2 + 2xy$$

2.1.18. Határozza meg a $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ egyenes és az $r = 5\varphi$ archimedesi spirális metszéspontjait!

2.1.19. Számítsa ki az $r = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}(1 - \cos\varphi)$ kardioid és az $r = 4\sin\varphi$ kör metszéspontjait!

2.1.20. Vázolja az $r = 4\sqrt{3}\sin\varphi$ és az $r = 4\cos\varphi$ görbéket közös koordináta-rendszerben, majd határozza meg a metszéspontjaikat!

2.1.21. Keresse meg az $r^2 = 4\cos 2\varphi$ és az $r^2 = 4\sin 2\varphi$ görbék metszéspontjait!

2.2 Polárkoordinátás alakban adott függvény differenciálása

2.2.1. Legyen $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$. Számítsa ki az alábbi kifejezéseket!

(a) $\dfrac{dr}{d\varphi}$;

(b) $\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}$;

(c) $\dfrac{d^3r}{d\varphi^3}$;

(d) $\dfrac{dr}{d\varphi}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$;

(e) $\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(f) $\dfrac{d^3r}{d\varphi^3}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

2.2.2. Határozza meg az $r = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)$ polárkoordinátás megadású függvény esetén a $\dfrac{dr}{d\varphi}$ derivált értékét, ha

(a) $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$;

(b) $\varphi = 2\pi$.

2.2.3. Határozza meg az $r = 1 + \cos\varphi$, $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ polárkoordinátákkal adott függvény $\dfrac{dy}{dx}$ deriváltjának értékét a $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$ helyen!

2.2.4. Határozza meg az $r = \dfrac{4}{1 - \cos\varphi}$ parabola érintőjének meredekségét a $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{3}$ pontban!

2.2.5. Adja meg az $r = \dfrac{4}{1 - \cos\varphi}$ parabolának azt a pontját, ahol az érintő meredeksége 1!

2.2.6. Írja fel az $r = 3\varphi$ archimedesi spirálishoz húzott érintő egyenletét a $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$ pontban!

2.2.7. Írja fel az $r = e^{3\varphi}$ logaritmikus spirálishoz húzott érintő egyenletét a $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$ pontban!

2.2.8. Írja fel az $r = \dfrac{4}{4 - \cos\varphi}$ ellipszis érintőjének polárkoordinátás egyenletét a $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{3}$ pontban!

2.2.9. Írja fel az $r = \dfrac{1}{\varphi}$ hiperbolikus spirális normálisának polárkoordinátás egyenletét a $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ pontban!

2.2.10. Hol metszi a $\varphi = 0$ egyenest az $r = \sin 2\varphi$ görbéhez a $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$ pontba húzott érintő?

2.2.11. Írja fel az $r = 1 - \cos\varphi$ kardioid $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ pontjában az érintőegyenes egyenletét!

2.2.12. Keresse meg az $r = 1 + \sin\varphi$ kardioid vízszintes és függőleges érintőit!

3 Útmutatások és megoldások

3.1 Görbék paraméteres megadása

1.1.1. Az $(x-3)^2+y^2=9$ kör paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x(t)=3+3\cos t, \\ y(t)=3\sin t, \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi).$$

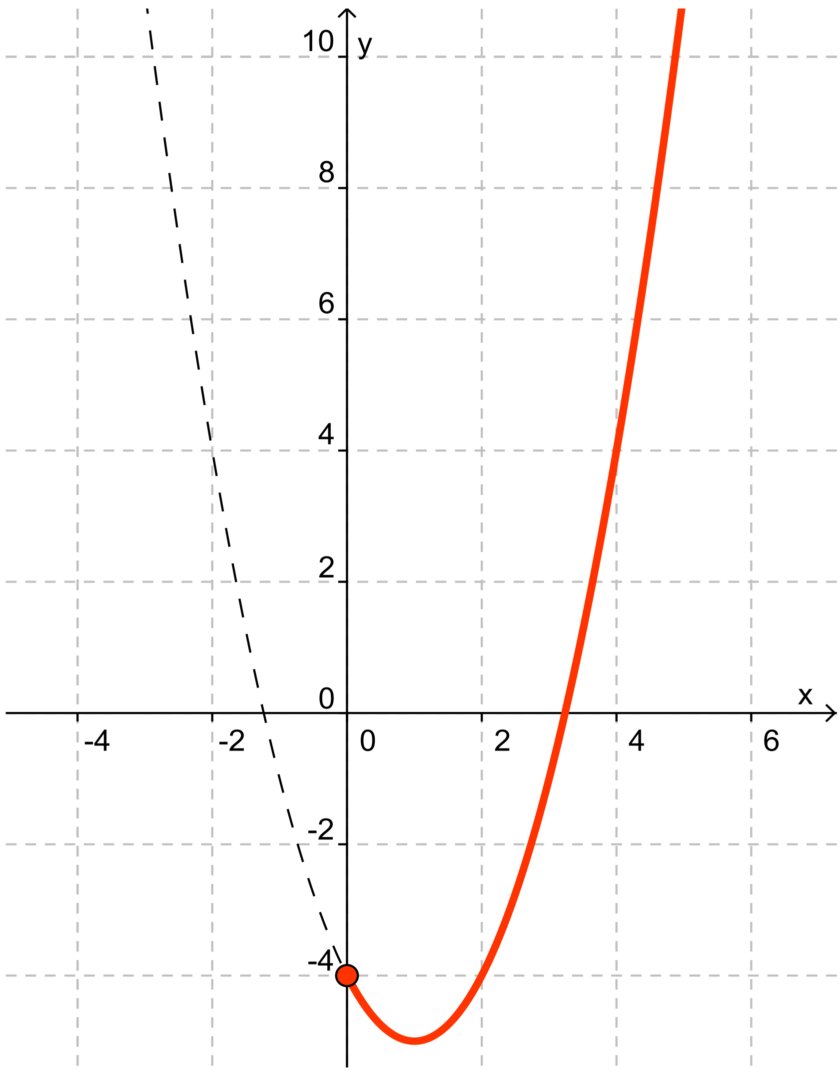
1.1.2. A paraméteres egyenletredszerből:

$$t=x-1$$

adódik, ha $t\in[-1,+\infty)$. A paraméteres egyenletrendszer másik összefüggését felhasználva az

$$y=(x-1)^2-5$$

Descartes-koordinátás egyenlethez jutunk, ha $x\in[0,+\infty)$. A függvény grafikonja:



1.1.3. A paraméteres egyenletrendszerből:

$$0 \leq x \leq 2 \qquad \text{és} \qquad 2 \leq y \leq 4,$$

továbbá:

$$\cos t = x - 1 \qquad \text{és} \qquad \sin t = y - 3,$$

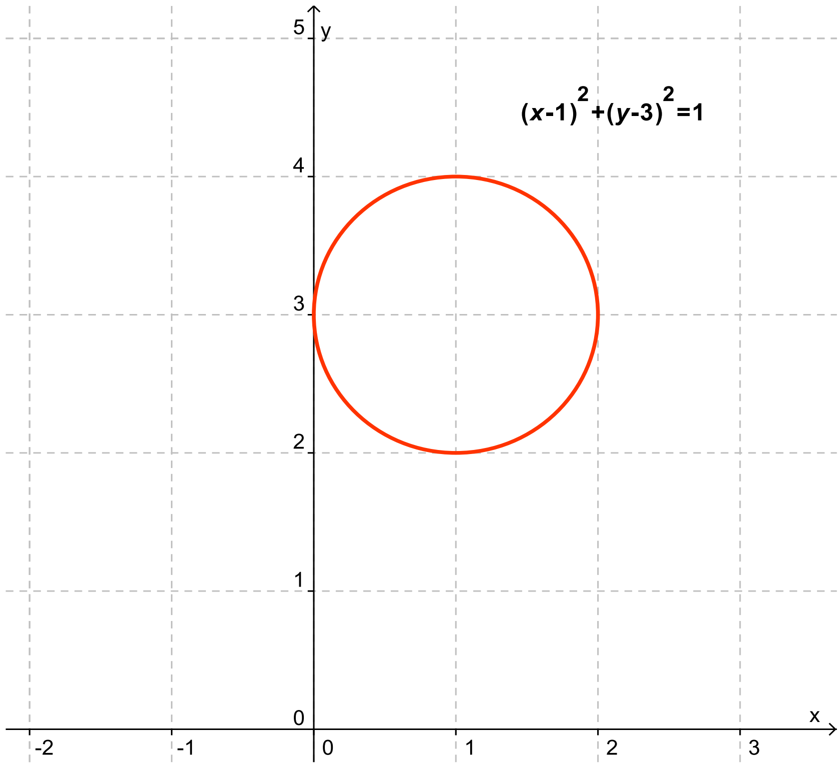
azaz felhasználva, hogy $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

adódik, hogy

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1,$$

amely egy $K(1,3)$ középpontú $r_k = 1$ sugarú kör Descartes-koordinátás egyenlete. A görbe grafikonja:



1.1.4. A paraméteres egyenletrendszerből:

$$-5 \leq x \leq -3 \qquad \text{és} \qquad 5 \leq y \leq 6,$$

továbbá:

$$\cos t = x + 4 \qquad \text{és} \qquad \sin t = y - 5.$$

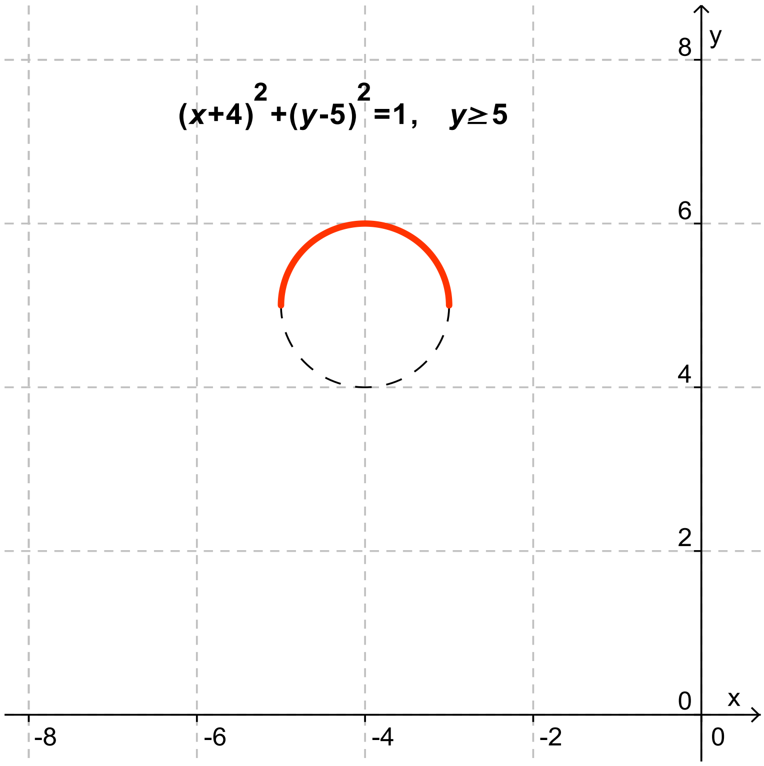
Felhasználva, hogy $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

adódik, hogy

$$(x+4)^2+(y-5)^2=1, \quad y \geq 5,$$

amely egy $K(-4,5)$ középpontú $r_k=1$ sugarú félkör Descartes-koordinátás egyenlete. A görbe grafikonja:



1.1.5. A paraméteres egyenletrendszerből:

$$-2 \leq x \leq 2 \qquad \text{és} \qquad -3 \leq y \leq 1,$$

továbbá:

$$4\cos t = x-2 \qquad \text{és} \qquad 4\sin t = y-1.$$

Felhasználva, hogy $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén

$$(4\cos t)^2+(4\sin t)^2=16,$$

adódik, hogy

$$(x-2)^2+(y-1)^2=16, \quad x \leq 2, \quad y \leq 1,$$

amely egy $K(2,1)$ középpontú $r_k=4$ sugarú negyedkör Descartes-koordinátás egyenlete.

1.1.6. A paraméteres egyenletrendszerből:

$$-2 \leq x \leq 6 \qquad \text{és} \qquad 2 \leq y \leq 8,$$

továbbá:

$$\cos t = \frac{x-2}{4} \qquad \text{és} \qquad \sin t = \frac{y-5}{3}.$$

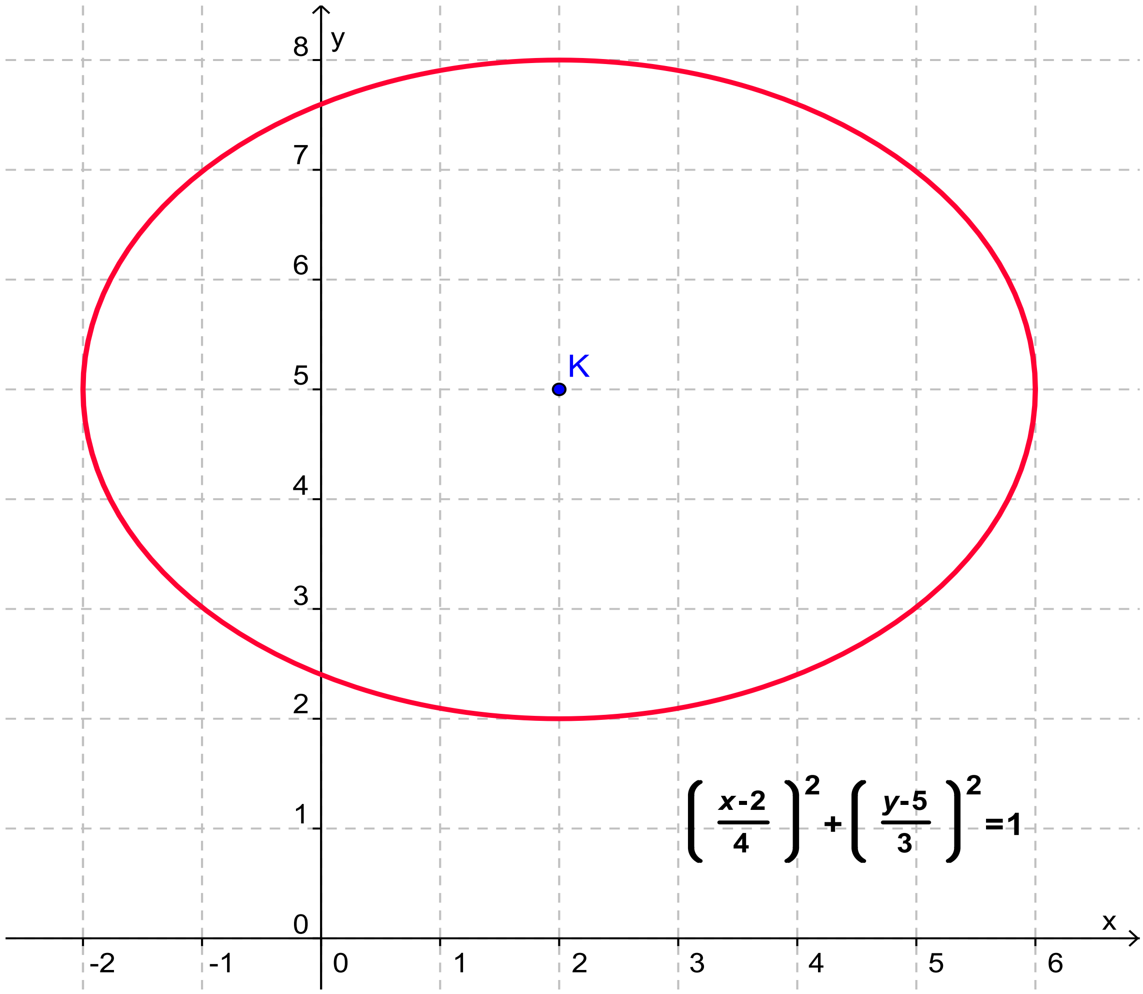
Felhasználva, hogy $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

adódik, hogy

$$\left(\frac{x-2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-5}{3}\right)^2 = 1,$$

amely egy $K(2,5)$ középpontú ellipszis Descartes-koordinátás egyenlete. A görbe grafikonja:



Az ellipszis vízszintes féltengelyhossza:

$$a = 4,$$

a függőleges féltengelyhossza:

$$b = 3.$$

A vízszintes tengelyhossz tehát $2a = 8$, a függőleges tengelyhossz pedig $2b = 6$ egység. A két fókusz távolságának fele az ellipszis lineáris excentricitása:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad \text{ha} \quad a > b,$$

azaz

$$c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}.$$

A fókuszpontok:

$$F_1(2-\sqrt{7}, 5) \qquad \text{és} \qquad F_2(2+\sqrt{7}, 5).$$

Az ellipszis numerikus excentricitása:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

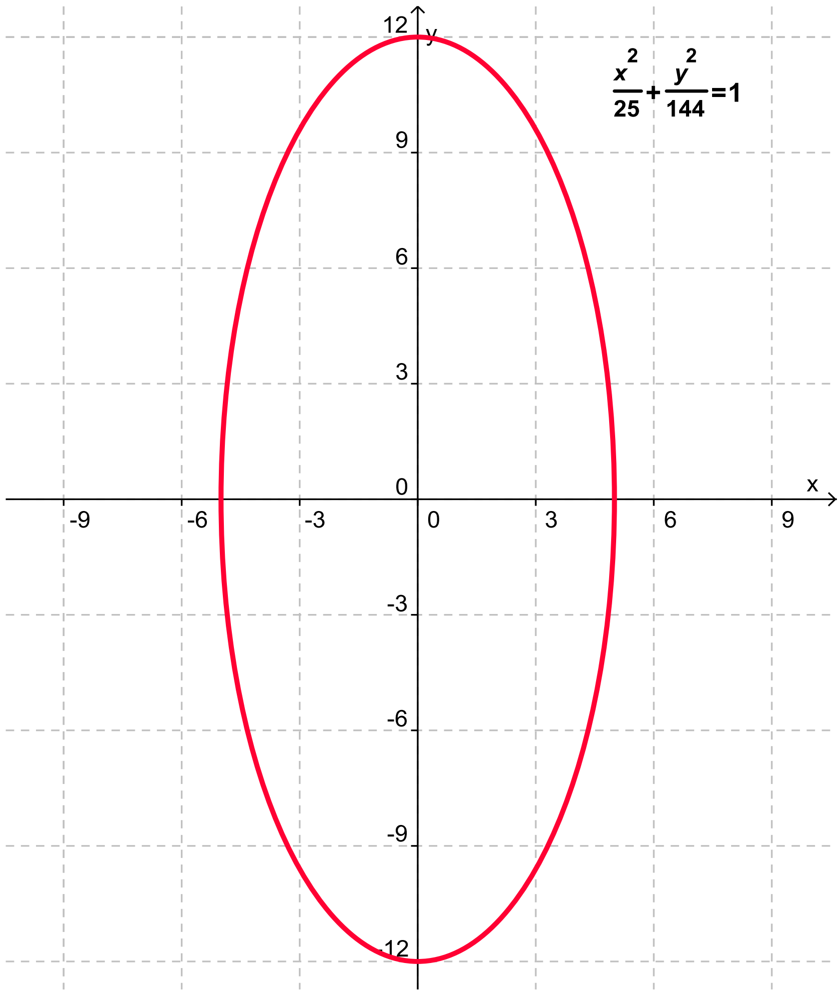
1.1.7. Az $x^2 + y^2 - 4y = 0$ kör paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t, \\ y(t) = 2 + 2\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi).$$

1.1.8. Az ellipszis paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x(t) = 5\cos t, \\ y(t) = 12\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi).$$

Grafikonja:



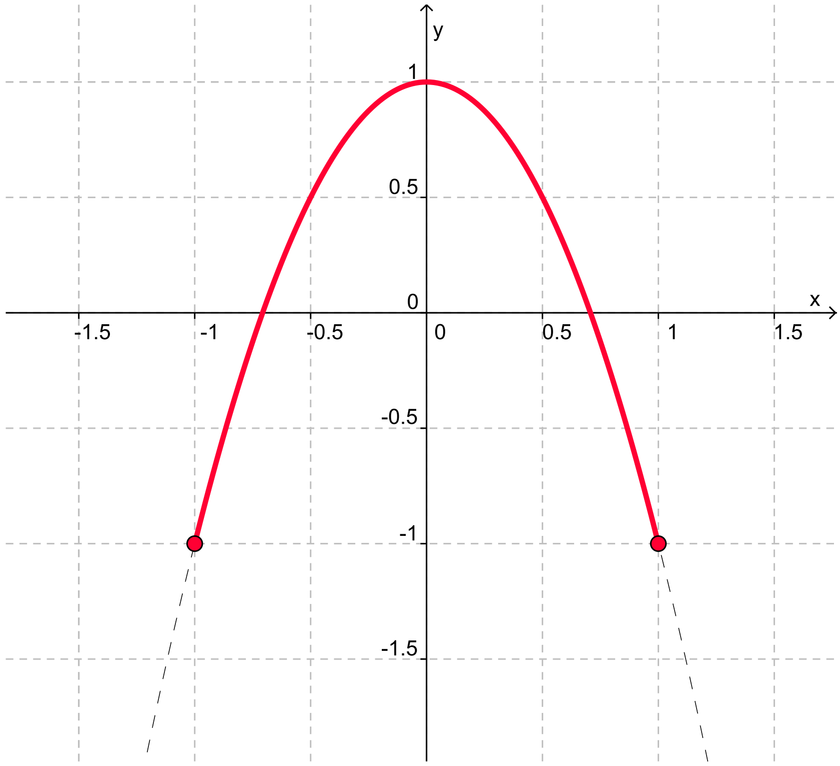
1.1.9. A paraméteres egyenletrendszerből:

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad \text{és} \qquad -1 \leq y \leq 1,$$

továbbá:

$$y = \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2x^2,$$

ahol $-1 \leq x \leq 1$. A görbe tehát egy alulról nyitott parabolaív. A parabola csúcsa a $C(0,1)$ pont, szimmetriatengelye az y-tengely. A görbe grafikonja:



1.1.10. A paraméteres egyenletrendszerből:

$$x^2 = t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \qquad \text{és} \qquad y^2 = t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}.$$

Az első egyenletből kivonva a másodikat az

$$x^2 - y^2 = 4$$

hiperbolát kapjuk, amelynek egymásra merőleges aszimptotái az $y = \pm x$ egyenesek. A valós és képzetes féltengelyhossz:

$$a = b = 2.$$

A hiperbola lineáris excentricitása:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2},$$

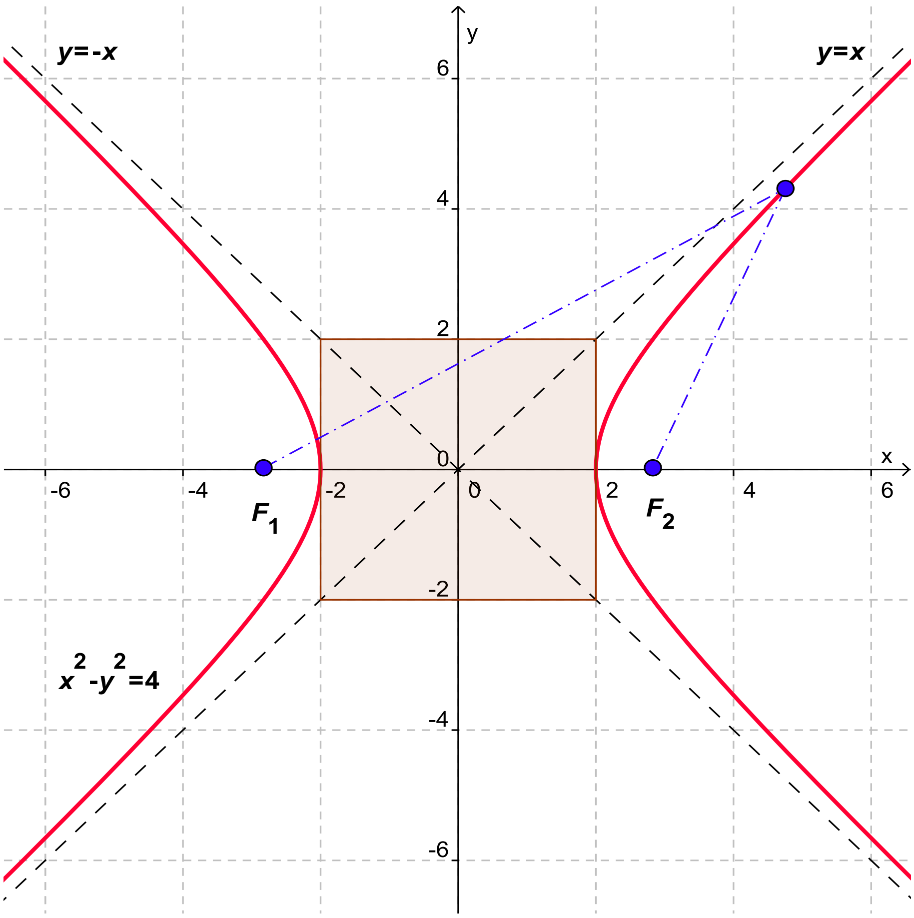
A fókuszpontok koordinátái:

$$F_1(-2\sqrt{2}, 0) \qquad \text{és} \qquad F_2(2\sqrt{2}, 0).$$

A hiperbola numerikus excentricitása:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 1.$$

Grafikonja:



1.1.11. A paraméteres egyenletrendszerből:

$$x^2 = \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t} = \operatorname{tg}^2 t + 1 = y^2 + 1,$$

vagyis az

$$x^2 - y^2 = 1$$

hiperbolát kapjuk, ahol $a = b = 1$. A hiperbola lineáris excentricitása:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}.$$

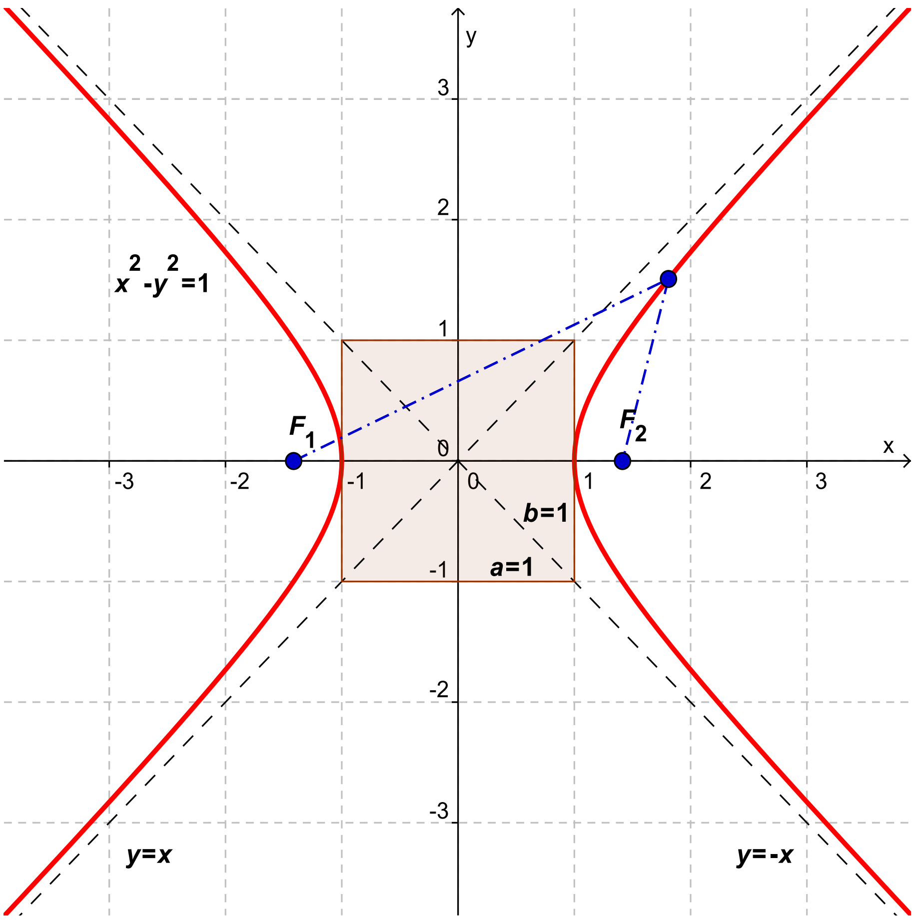
A fókuszpontok koordinátái:

$$F_1(-\sqrt{2}, 0) \qquad \text{és} \qquad F_2(\sqrt{2}, 0).$$

A hiperbola numerikus excentricitása:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2} > 1.$$

Egymásra merőleges aszimptotái az $y = \pm x$ egyenesek. Grafikonja:



1.1.12. Ha az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbola két azimptotája

$$y = 2x \qquad \text{és} \qquad y = -2x,$$

akkor

$$\frac{b}{a} = 2,$$

tehát

$$b = 2a.$$

Ha az egyik fókusz az $F_1(5, 0)$ pontban van, akkor $c = 5$, vagyis a

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

összefüggésből adódik, hogy
$$a^2 + b^2 = 25.$$
Felhasználva, hogy $b = 2a$ adódik, hogy
$$5a^2 = 25,$$
azaz
$$a = \sqrt{5} \qquad \text{és} \qquad b = 2\sqrt{5}.$$
A hiperbola Descartes-koordinátás egyenlete:
$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1.$$
A fenti hiperbola paraméteres egyenletrendszere:
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sqrt{5}}{\cos t}, \\ y(t) = 2\sqrt{5}\operatorname{tg} t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$
Egy másik lehetőség:
$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{5}t + \dfrac{\sqrt{5}}{4t}, \\ y(t) = 2\sqrt{5}t - \dfrac{2\sqrt{5}}{4t}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1.1.13. Az $x^2 - 2y^2 = 8$ egyenletből a hiperbola középponti egyenlete:
$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1,$$
vagyis a hiperbola valós féltengelye $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, képzetes féltengelye $b = \sqrt{4} = 2$. Lineáris excentricitása:
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8 + 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$
Numerikus excenrticitása:
$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$
A fenti hiperbola paraméteres egyenletrendszere:
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\cos t}, \\ y(t) = 2\operatorname{tg} t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$
Egy másik lehetőség:
$$\begin{cases} x(t) = 2\sqrt{2}t + \dfrac{\sqrt{2}}{2t}, \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{2t}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1.1.14. A paraméteres egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$x \geq 1 \qquad \text{és} \qquad y \in \mathbb{R},$$

továbbá

$$x^2 = \operatorname{ch}^2 t \qquad \text{és} \qquad y^2 = \operatorname{sh}^2 t.$$

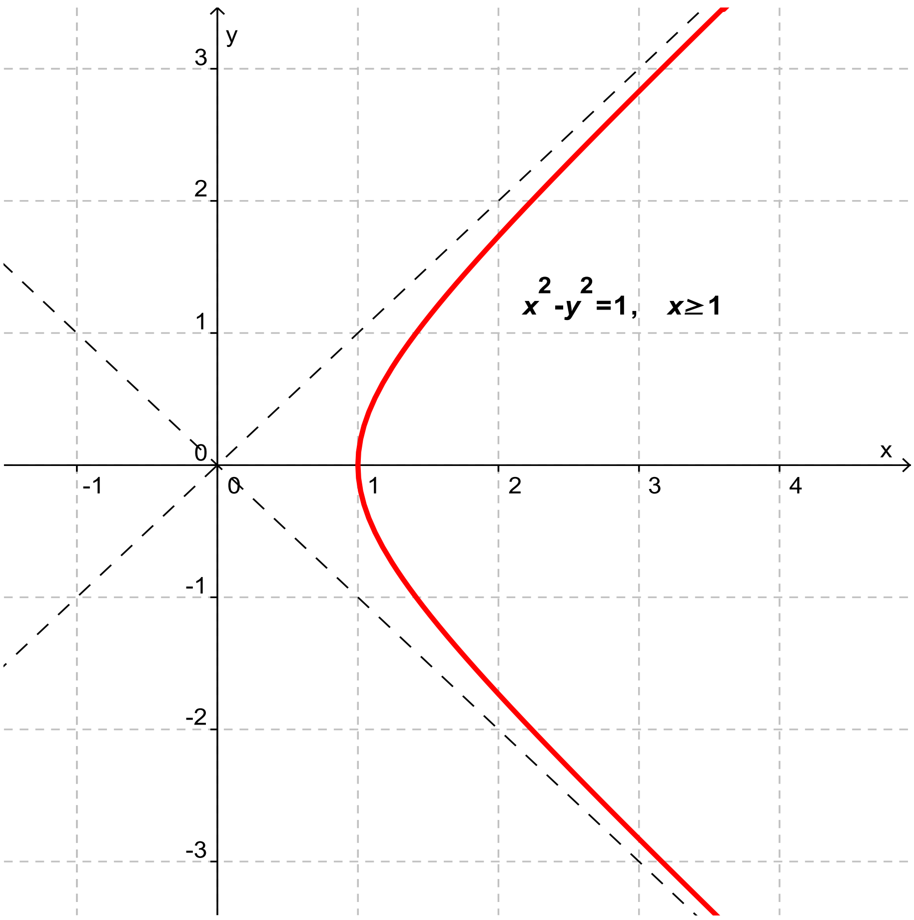
Felhasználva, hogy $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

adódik, hogy a görbe Descartes-koordinátás egyenlete:

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x \geq 1.$$

Tehát az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola jobb oldali ágáról van szó. Grafikonja:



1.1.15. A paraméteres egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$x \leq -2 \qquad \text{és} \qquad y \in \mathbb{R},$$

továbbá

$$x^2 = 4\operatorname{ch}^2 t \qquad \text{és} \qquad y^2 = 9\operatorname{sh}^2 t.$$

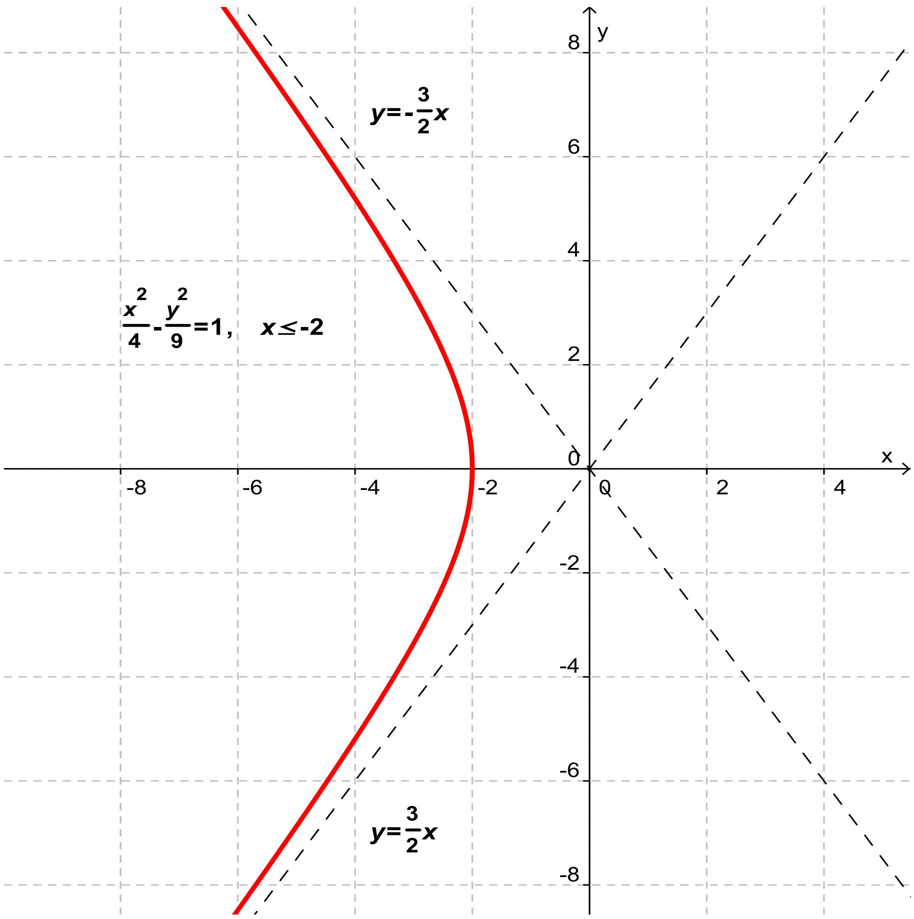
Felhasználva, hogy $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

adódik, hogy a görbe Descartes-koordinátás egyenlete:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, \quad x \leq -2.$$

Tehát az $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbola bal oldali ágáról van szó. Grafikonja:



1.1.16. A paraméteres egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$x \in \mathbb{R} \setminus (-2, 6) \qquad \text{és} \qquad y \in \mathbb{R},$$

továbbá

$$(x-2)^2 = 16 \operatorname{ch}^2 t \qquad \text{és} \qquad (y-5)^2 = 9 \operatorname{sh}^2 t.$$

Felhasználva, hogy $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

adódik, hogy a hiperbola Descartes-koordinátás egyenlete:

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-5)^2}{9} = 1.$$

A hiperbola aszimptotái a $K(2,5)$ pontban metszik egymást, valós féltengelyének hossza

$$a = \sqrt{16} = 4,$$

képzetes féltengelyének hossza pedig

$$b = \sqrt{9} = 3.$$

Lineáris excentricitása:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Numerikus excenrticitása:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}.$$

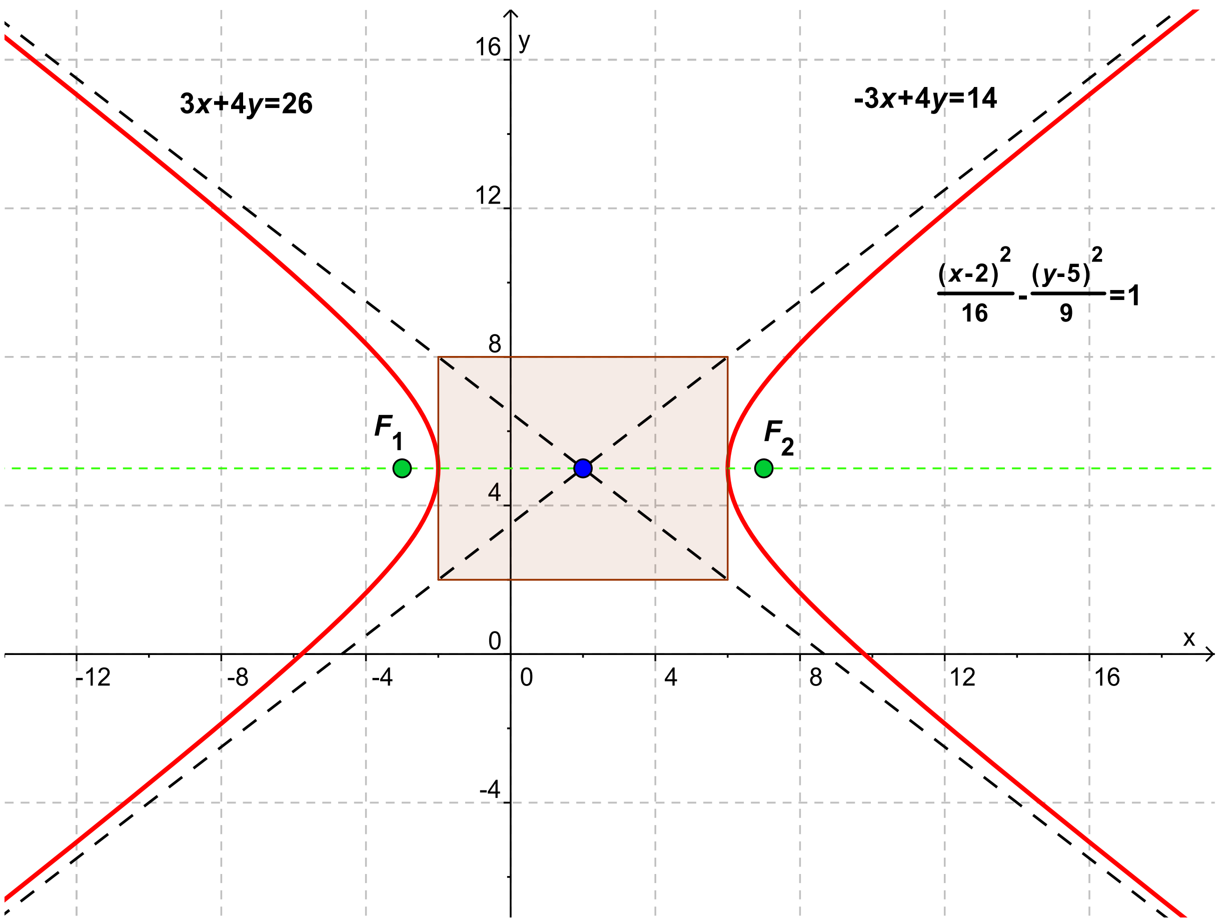
Fókuszpontjai:

$$F_1(-3,5) \qquad \text{és} \qquad F_2(7,5).$$

A hiperbola aszimptotái a

$$-3x + 4y = 14 \qquad \text{és} \qquad 3x + 4y = 26$$

egyenesek. Grafikonja:



1.1.17. A paraméteres egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$\sqrt[3]{x} = \cos t \qquad \text{és} \qquad \sqrt[3]{y} = \sin t.$$

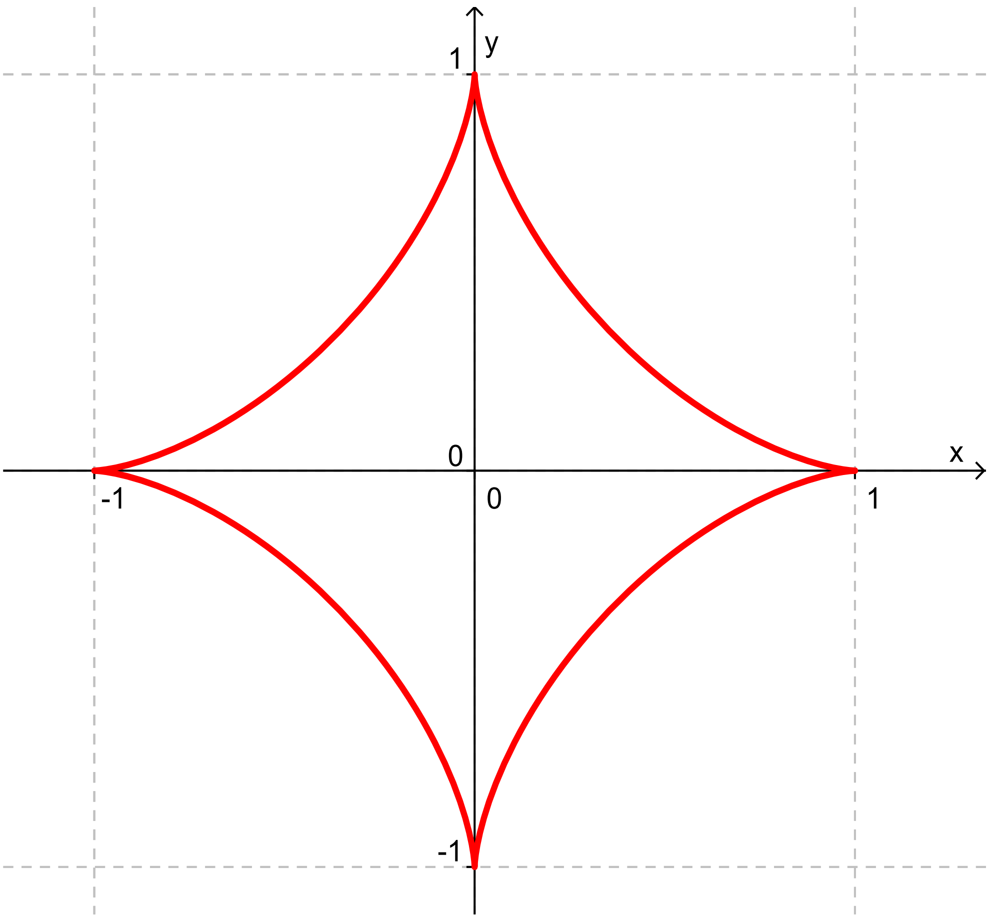
Felhasználjuk, hogy $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

azaz

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1,$$

amely az asztroida Descartes-koordinátás egyenlete. Grafikonja:



1.1.18. A paraméteres egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$t = x - 1,$$

így

$$y = 1 - (x - 1) = 2 - x.$$

A görbe tehát az $x + y = 2$ egyenes.

1.1.19.

(a) A paraméteres egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$x \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

továbbá

$$x^2 = t^2,$$

vagyis a függvény az

$$y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

parabola.

(b) A paraméteres egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad \text{és} \qquad 0 \leq y \leq 1,$$

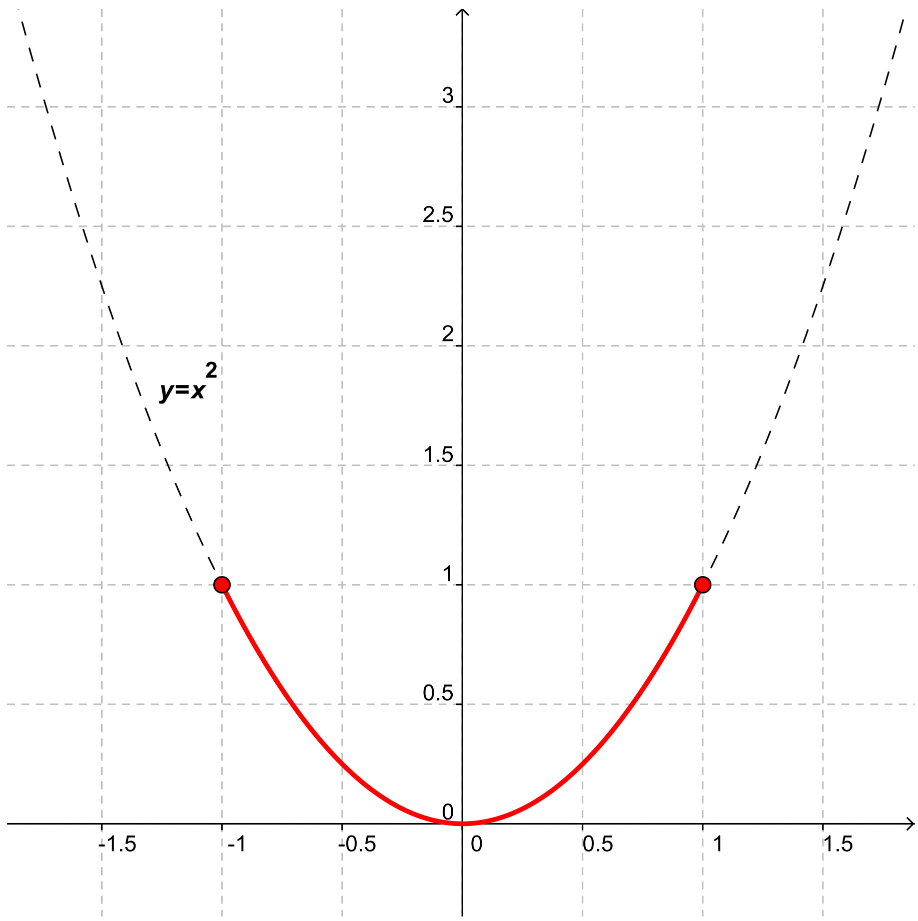
továbbá

$$x^2 = \sin^2 t,$$

vagyis a függvény az

$$y = x^2$$

parabola $[-1, 1]$ intervallum feletti íve. Grafikonja:



(c) A paraméteres egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$x \in \{-1, 0, 1\} \qquad \text{és} \qquad y \in \{0, 1\},$$

továbbá

$$x^2 = \operatorname{sgn}^2 t,$$

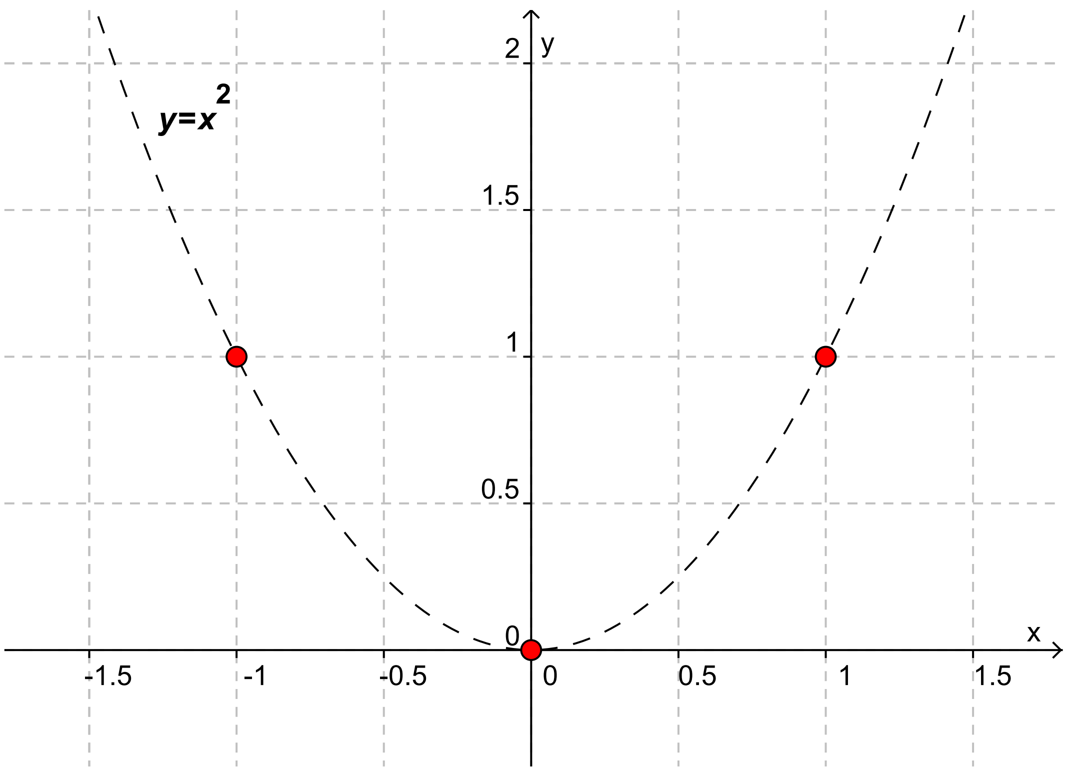
vagyis a függvény az

$$y = x^2$$

parabola alábbi három pontja:

$$P_1(-1, 1), \qquad P_2(0, 0), \qquad P_3(1, 1).$$

Grafikonja:



(d) A paraméteres egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$x \geq 1 \qquad \text{és} \qquad y \in \mathbb{R},$$

továbbá

$$t = 3 - y,$$

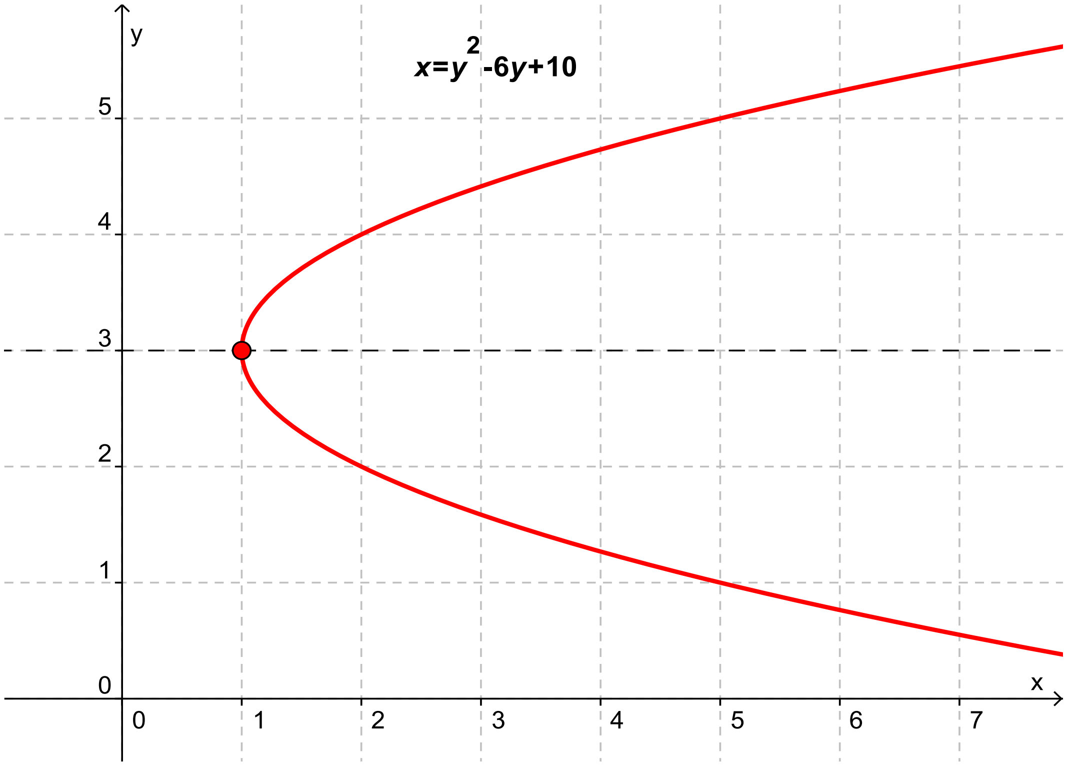
azaz

$$x = 1 + (3 - y)^2 = y^2 - 6y + 10,$$

vagyis a görbe az

$$x - 1 = (y - 3)^2$$

parabola, amelynek csúcsa a $C(1, 3)$ pont, szimmetriatengelye pedig az $y = 3$ egyenes. Grafikonja:



1.1.20. Ha $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, akkor

$$-\frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{3} \cdot \sin t \le \frac{\pi}{3},$$

így

$$3\cos\frac{\pi}{3} \le x \le 3\cos 0 \qquad \text{és} \qquad 3\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \le y \le 3\sin\frac{\pi}{3},$$

azaz

$$\frac{3}{2} \le x \le 3 \qquad \text{és} \qquad -\frac{3\sqrt{3}}{2} \le y \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

A paraméteres egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$x^2 = 9\cos^2\left(\frac{\pi}{3} \cdot \sin t\right) \qquad \text{és} \qquad y^2 = 9\sin^2\left(\frac{\pi}{3} \cdot \sin t\right),$$

összeadva a fenti két egyenletet és felhasználva, hogy $\alpha = \dfrac{\pi}{3} \cdot \sin t$ esetén is fennáll a

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

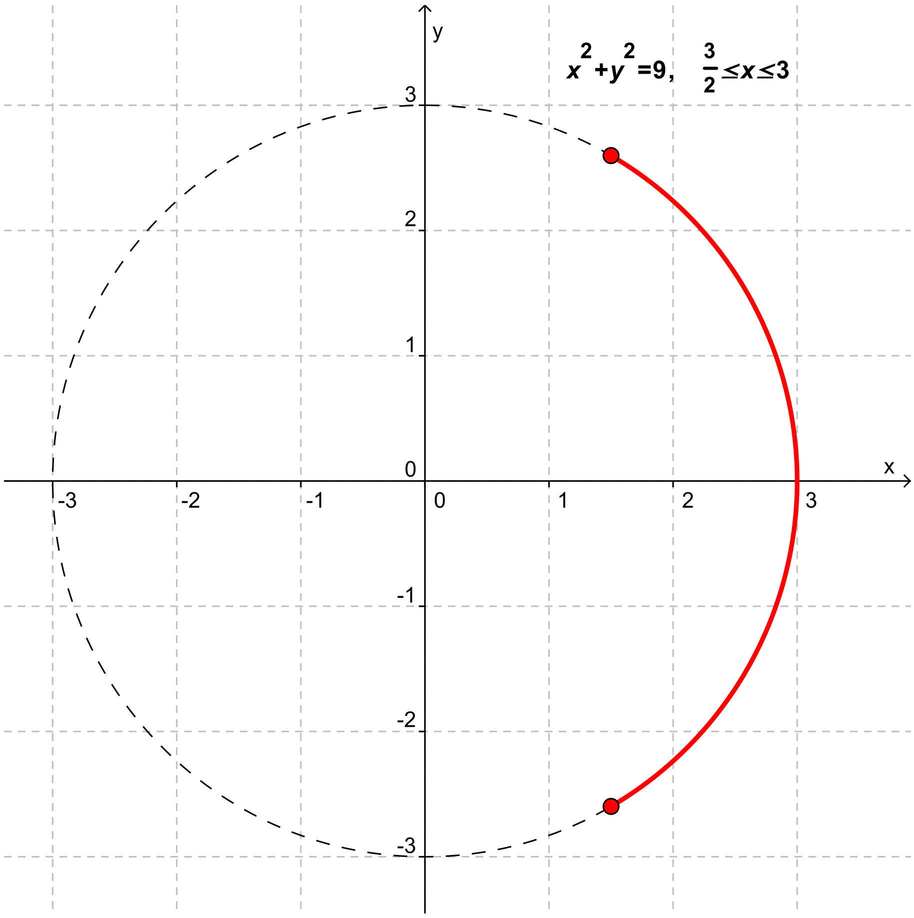
azonosság, adódik az

$$x^2 + y^2 = 9\cos^2\left(\frac{\pi}{3} \cdot \sin t\right) + 9\sin^2\left(\frac{\pi}{3} \cdot \sin t\right) = 9.$$

implicit egyenlet. Tehát az

$$\begin{cases} x = 3\cos\left(\dfrac{\pi}{3} \cdot \sin t\right), \\ y = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{3} \cdot \sin t\right), \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

paraméteres megadású görbe az origú középpontú $r_k = 3$ sugarú kör $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ intervallum feletti íve. Grafikonja:



3.2 PARAMÉTERES ALAKBAN ADOTT FÜGGVÉNY DERIVÁLTJA

1.2.1. $\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 + 1$ és $\dot{y}(t) = \dfrac{dy}{dt} = 7t^6 + 1$. Így

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{7t^6 + 1}{3t^2 + 1}.$$

1.2.2. $\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt} = -2\sin t$ és $\dot{y}(t) = \dfrac{dy}{dt} = 2\cos t$. Így

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Ha $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$, akkor

$$y'(t_0) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1.$$

1.2.3. A szorzat deriválási szabályát használva:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\sin t + \cos t) \qquad \text{és} \qquad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t).$$

Így

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}.$$

1.2.4. Az összetett függvény deriválási szabályát használva:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 3\cdot\cos^2 t\cdot(-\sin t) \qquad \text{és} \qquad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = 3\cdot\sin^2 t\cdot\cos t.$$

Így

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{3\cdot\sin^2 t\cdot\cos t}{3\cdot\cos^2 t\cdot(-\sin t)} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t.$$

Ha $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$, akkor

$$y'(t_0) = y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

1.2.5. Ha $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$, akkor

$$x(t_0) = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \qquad \text{és} \qquad y(t_0) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{2}.$$

Az érintő meredekségét a

$$P_0\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{4\sqrt{2}}{2}\right)$$

pontban keressük. Határozzuk meg y'-t!

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -5\sin t \qquad \text{és} \qquad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = 4\cos t,$$

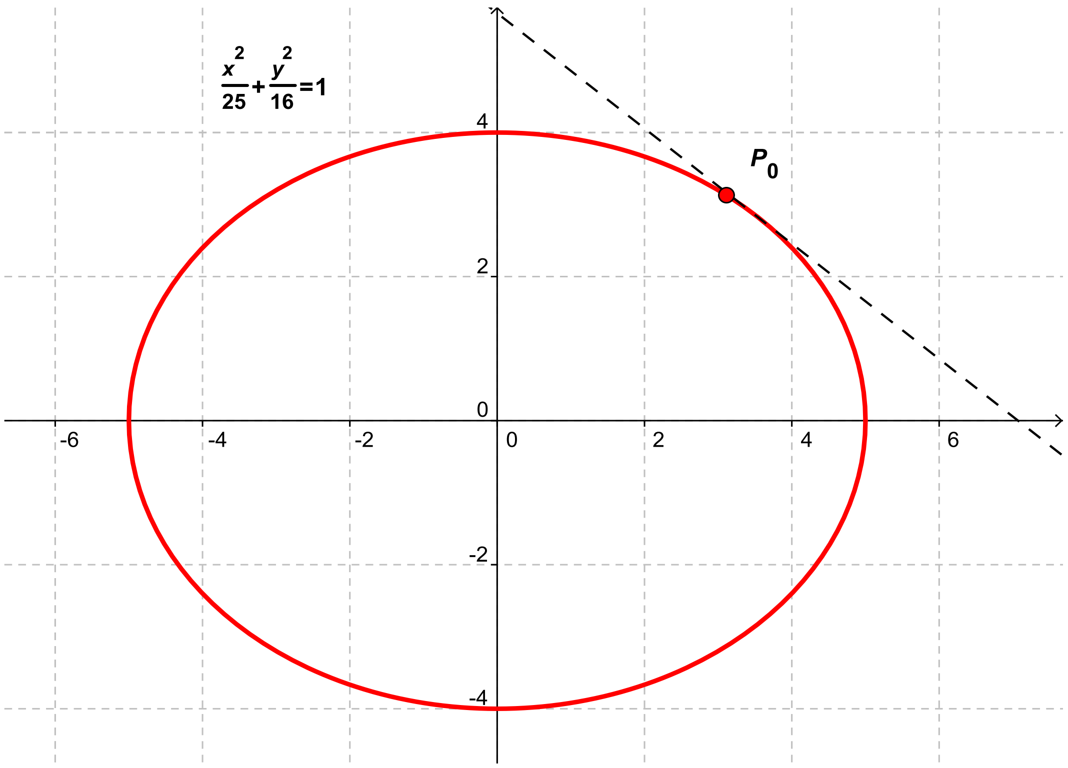
így

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\frac{4\cos t}{5\sin t} = -\frac{4}{5}\operatorname{ctg} t.$$

Ha $t_0 = \frac{\pi}{4}$, akkor

$$m = y'(t_0) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{5}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -\frac{4}{5}.$$

Az érintő meredeksége tehát $-\frac{4}{5}$. Az ellipszis grafikonja:



1.2.6. A deriválási szabályok alapján:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 5t^4 + 2\pi\cos(2\pi t) \qquad \text{és} \qquad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = 1 + e^t.$$

Így

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{1+e^t}{5t^4 + 2\pi\cos(2\pi t)}.$$

Ha $t_0 = 1$, akkor

$$y'(t_0) = y'(1) = \frac{1+e}{5+2\pi}.$$

1.2.7. A $P(1,1)$ pont a $t_0 = 0$ paraméterértéknek felel meg. A deriválási szabályok alapján:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 2t + e^t \qquad \text{és} \qquad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = 1 + e^t.$$

Így

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{1+e^t}{2t+e^t}.$$

Ha $t_0 = 0$, akkor
$$y'(t_0) = y'(0) = 2.$$

1.2.8. A $P(1,0)$ pont a $t_0 = 0$ paraméterértéknek felel meg. A deriválási szabályok alapján:
$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{-2\sin 2t \cdot e^t - \cos 2t \cdot e^t}{e^{2t}} \qquad \text{és} \qquad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{2\cos 2t \cdot e^t - \sin 2t \cdot e^t}{e^{2t}}.$$

Így
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\frac{2\cos 2t - \sin 2t}{2\sin 2t + \cos 2t}.$$

Ha $t_0 = 0$, akkor
$$y'(t_0) = y'(0) = -2.$$

1.2.9. Ha $t_0 = 0$, akkor
$$x_0 = x(t_0) = x(0) = 3 \qquad \text{és} \qquad y_0 = y(t_0) = y(0) = 5,$$

vagyis az érintőt a $P(3,5)$ pontban kell meghatározni. A deriválási szabályok alapján:
$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 3e^t \qquad \text{és} \qquad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = -5e^{-t}.$$

Így
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\frac{5}{3}e^{-2t}.$$

Ha $t_0 = 0$, akkor
$$m = y'(t_0) = y'(0) = -\frac{5}{3}.$$

A $P(3,5)$ pontban az érintőegyenes egyenlete:
$$y = -\frac{5}{3}(x-3) + 5,$$

átrendezve:
$$5x + 3y - 30 = 0.$$

1.2.10. A deriválási szabályok alapján:
$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 4t \qquad \text{és} \qquad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 1.$$

Így
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{3t^2+1}{4t}.$$

Az $x + y + 3 = 0$ egyenes explicit alakja:
$$y = -x - 3,$$

vagyis az egyenes meredeksége -1, a rá merőleges egyenеseké pedig 1. Olyan pontokat keresünk, ahol

$$y' = \frac{dy}{dx} = 1,$$

azaz

$$\frac{3t^2+1}{4t} = 1.$$

A felírt egyenletet megoldva két gyököt kapunk:

$$t_1 = \frac{1}{3} \qquad \text{és} \qquad t_2 = 1.$$

A keresett pontok:

$$P_1\left(-\frac{43}{9}, \frac{10}{27}\right) \qquad \text{és} \qquad P_2(-3, 2).$$

1.2.11. A $9x^2 + 16y^2 = 52$ egyenletű ellipszis paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}\cos t, \\ y(t) = \dfrac{\sqrt{13}}{2}\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi).$$

A deriválási szabályok alapján:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\sqrt{13}}{3}\sin t \qquad \text{és} \qquad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{13}}{2}\cos t.$$

Így

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\frac{3}{4}\operatorname{ctg} t.$$

A $4y + 3\sqrt{3}x = 4$ egyenes explicit alakja:

$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}x + 1,$$

vagyis az egyenes meredeksége $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. Olyan pontokat keresünk az ellipszisen, ahol

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

azaz

$$-\frac{3}{4}\operatorname{ctg} t = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ekkor

$$\operatorname{ctg} t = \sqrt{3},$$

azaz

$$t_1 = \frac{\pi}{6} \qquad \text{és} \qquad t_2 = \frac{7\pi}{6}.$$

A keresett pontok:

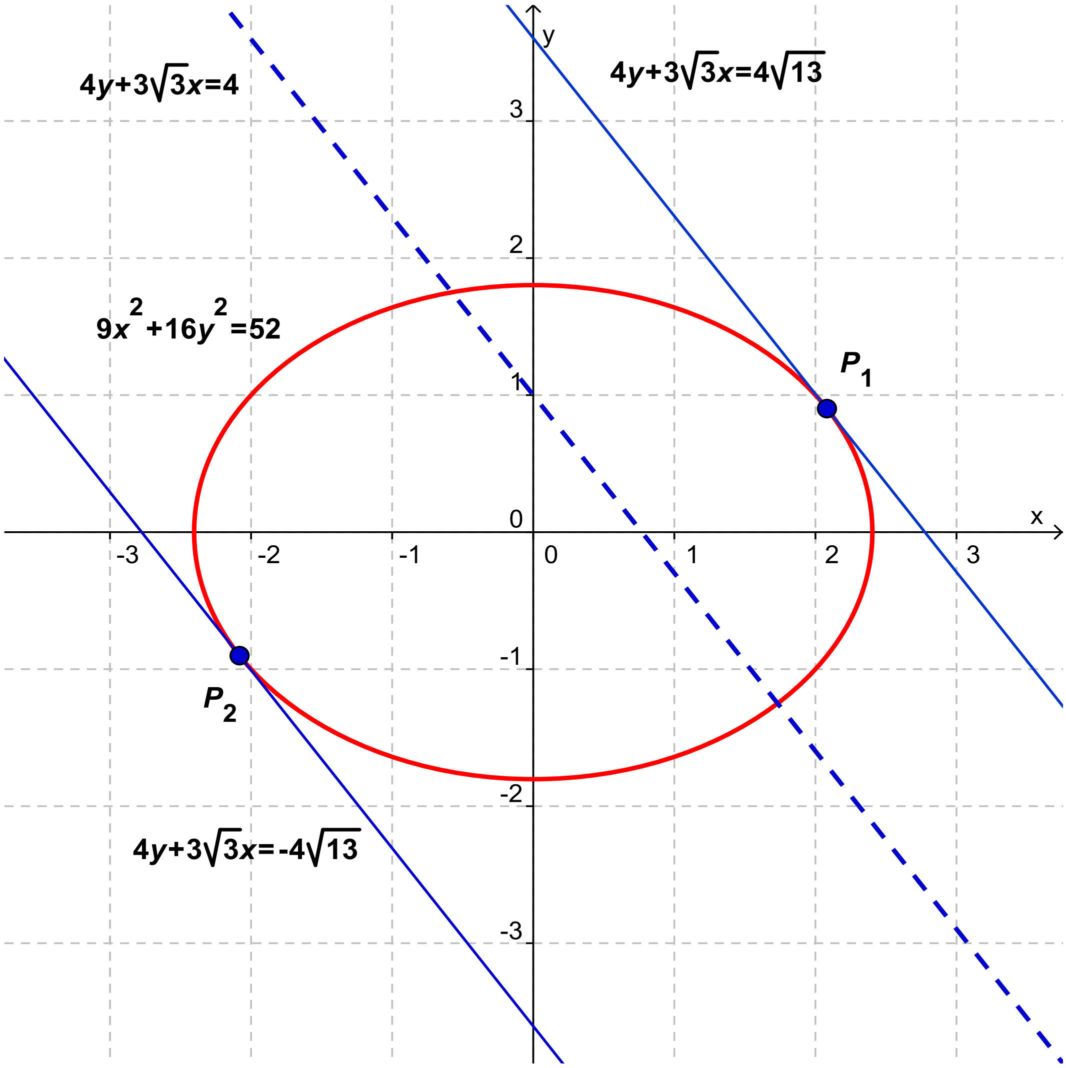
$$P_1\left(\sqrt{\frac{13}{3}}, \frac{\sqrt{13}}{4}\right) \qquad \text{és} \qquad P_2\left(-\sqrt{\frac{13}{3}}, -\frac{\sqrt{13}}{4}\right).$$

A P_1 pontba húzott érintő egyenlete:

$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(x - \sqrt{\frac{13}{3}}\right) + \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

A P_2 pontba húzott érintő egyenlete:

$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(x + \sqrt{\frac{13}{3}}\right) - \frac{\sqrt{13}}{4}.$$



1.2.12. A deriválási szabályokat használva:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 24 \cdot \cos^2 t \cdot (-\sin t) \qquad \text{és} \qquad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = 24 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t.$$

Így

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{24 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t}{24 \cdot \cos^2 t \cdot (-\sin t)} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t.$$

Az $y = x$ egyenes meredeksége 1. Olyan pontokat keresünk az asztroidán, ahol

$$y' = \frac{dy}{dx} = 1,$$

azaz

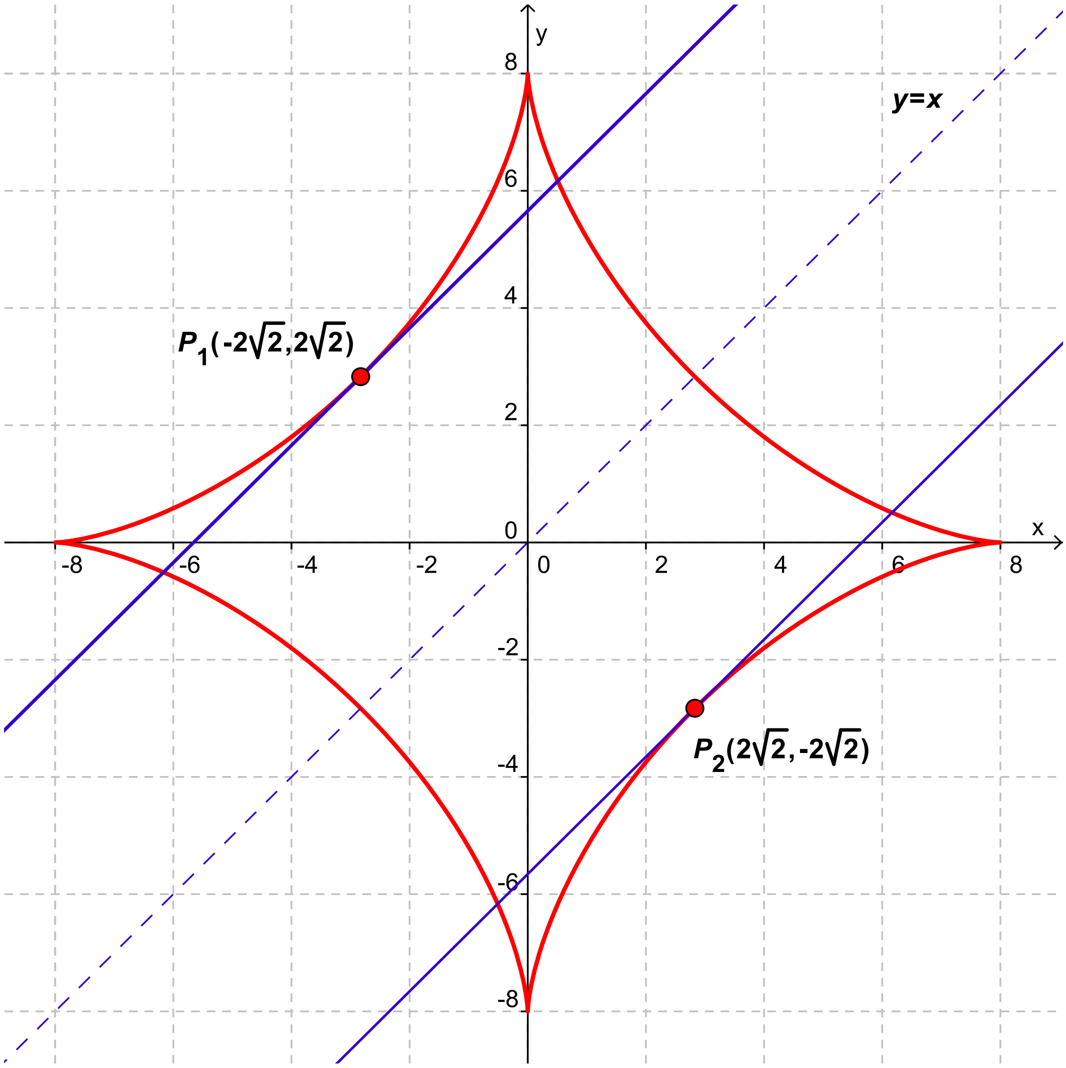
$$-\operatorname{tg} t = 1,$$

tehát

$$t_1 = \frac{3\pi}{4} \qquad \text{és} \qquad t_2 = \frac{7\pi}{4}.$$

A keresett pontok:

$$P_1(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \qquad \text{és} \qquad P_2(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}).$$



3.3 Polárkoordinátás megadású görbék

2.1.1. Ha a Descartes-féle koordináta-rendszer x-tengelyének pozitív fele a polártengely és a pólus az origóban van, akkor ugyanannak a pontnak a Descartes-féle koordinátái és a polárkoordináta-rendszerbeli koordinátái között, ha x, y és r mértékegységei megegyeznek, akkor az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \qquad \text{és} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tehát a feladat megoldása:

(a) A $P_1(-2, 2)$ pont a Descart-féle derékszögű koordinátarendszer II. síknegyedében van és

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

továbbá

$$\cos\varphi = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{és} \qquad \sin\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

azaz

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Tehát a P_1 pont polárkoordináta-rendszerbeli megfelelője a

$$P_1\left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

pont.

(b) A $P_2(5, 5\sqrt{3})$ pont a Descart-féle derékszögű koordinátarendszer I. síknegyedében van és

$$r = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10,$$

továbbá

$$\cos\varphi = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad \sin\varphi = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

azaz

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Tehát a P_2 pont polárkoordináta-rendszerbeli megfelelője a

$$P_2\left(10, \frac{\pi}{3}\right)$$

pont.

(c) A $P_3(0, 1)$ pont a Descart-féle derékszögű koordinátarendszer y-tengelyének pozitív felé van és

$$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1,$$

továbbá

$$\cos\varphi = 0 \qquad \text{és} \qquad \sin\varphi = 1,$$

azaz

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Tehát a P_3 pont polárkoordináta-rendszerbeli megfelelője a

$$P_3\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$$

pont.

(d) A $P_4(-1, -\sqrt{3})$ pont a Descart-féle derékszögű koordinátarendszer III. síknegyedében van és

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2,$$

továbbá

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

azaz

$$\varphi = \frac{4\pi}{3}.$$

Tehát a P_4 pont polárkoordináta-rendszerbeli megfelelője a

$$P_4\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$$

pont.

2.1.2. Felhasználjuk az két koordináta-rendszer közötti

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \qquad \text{és} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

összefüggéseket.

(a) A $Q_1\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ pont esetén $r = 2$ és $\varphi = \frac{\pi}{6}$, azaz

$$x = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \qquad \text{és} \qquad y = 2\sin \cdot \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Tehát a $Q_1\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ pont megfelelője a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben a

$$Q_1\left(\sqrt{3}, 1\right)$$

pont.

(b) A $Q_2\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$ pont esetén $r = 3$ és $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, azaz

$$x = 3 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad \text{és} \qquad y = 3 \cdot \sin\frac{3\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát a $Q_1\left(3, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ pont megfelelője a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben a

$$Q_2\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

pont.

(c) A $Q_3\left(4, \dfrac{5\pi}{3}\right)$ pont esetén $r = 4$ és $\varphi = \dfrac{5\pi}{3}$, azaz

$$x = 4 \cdot \cos\frac{5\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \qquad \text{és} \qquad y = 4\sin\cdot\frac{5\pi}{3} = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}.$$

Tehát a $Q_3\left(4, \dfrac{5\pi}{3}\right)$ pont megfelelője a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben a

$$Q_3\left(2, -2\sqrt{3}\right)$$

pont.

(d) Ha r értéke negatív, akkor megállapodás szerint az (r, φ) pont helyét a síkon úgy állapítjuk meg, hogy $|r|$-et mérünk fel a $\varphi + \pi$ hajlásszögű félegyenesre. A $Q_4\left(-4, \dfrac{\pi}{3}\right)$ pont esetén tehát $|r| = |-4| = 4$ és $\pi + \varphi = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$, azaz

$$x = 4 \cdot \cos\frac{4\pi}{3} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \qquad \text{és} \qquad y = 4\sin\cdot\frac{4\pi}{3} = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}.$$

Tehát a $Q_4\left(-4, \dfrac{\pi}{3}\right)$ pont megfelelője a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben a

$$Q_4\left(-2, -2\sqrt{3}\right)$$

pont. Megjegyezzük, hogy a

$$\left(-4, \frac{\pi}{3}\right) \qquad \text{és} \qquad \left(4, \frac{4\pi}{3}\right)$$

polárkoordinátás megadású pontokok egybeesnek.

2.1.3. A $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ görbe az x-tengely pozitív felével $\dfrac{\pi}{4}$ szöget bezáró origón átmenő egyenes, vagyis az $y = x$ egyenes. Megjegyezzük, hogy az egyenes "alsó" fele is a grafikonhoz tartozik, mivel r negatív értéket is felvehet.

2.1.4. A $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ polárkoordinátás megadású görbe a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer y-tengelye.

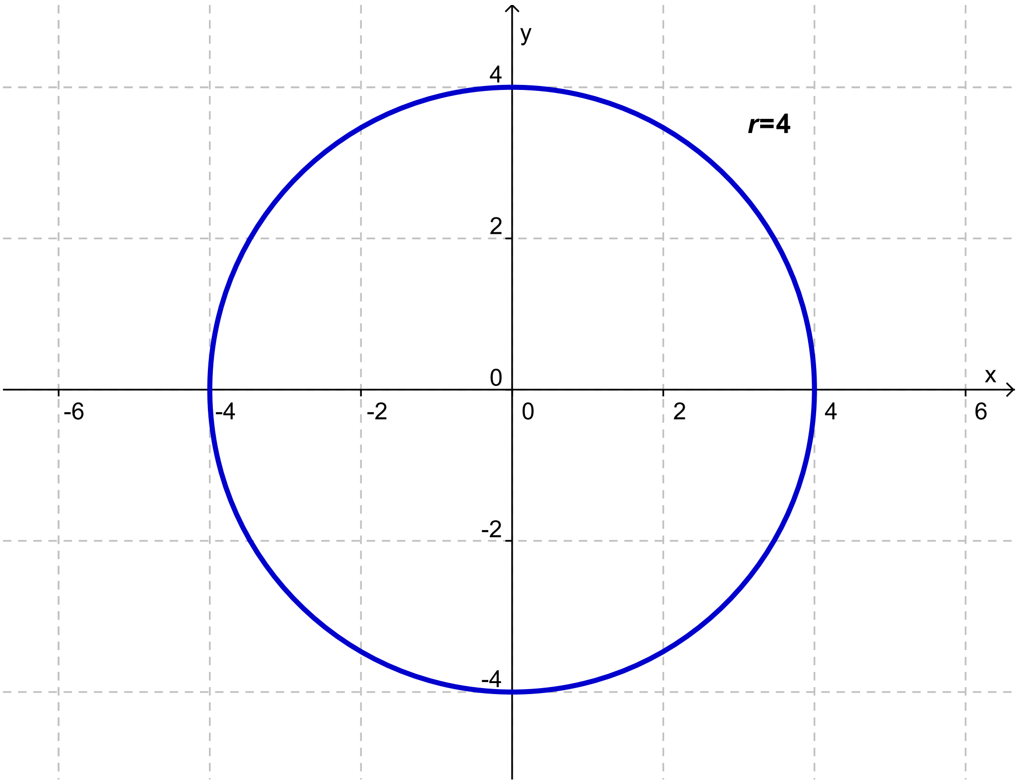
2.1.5. Felhasználjuk az két koordináta-rendszer közötti

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \qquad \text{és} \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

összefüggéseket.

(a) Az $r = 4$ polárkoordinátás egyenletű görbe az origó középpontú 4 egység sugarú kör, melyenek Descartes-koordinátás egyenlete:

$$x^2 + y^2 = 16.$$



A $x^2 + y^2 = 16$ egyenletű kör paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos t, \\ y(t) = 4\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi).$$

(b) Először adjuk meg a görbe Descartes-koordinátás egyenletét! Az $r = 2\cos\varphi$ egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg r-rel! Ekkor

$$r^2 = 2r\cos\varphi$$

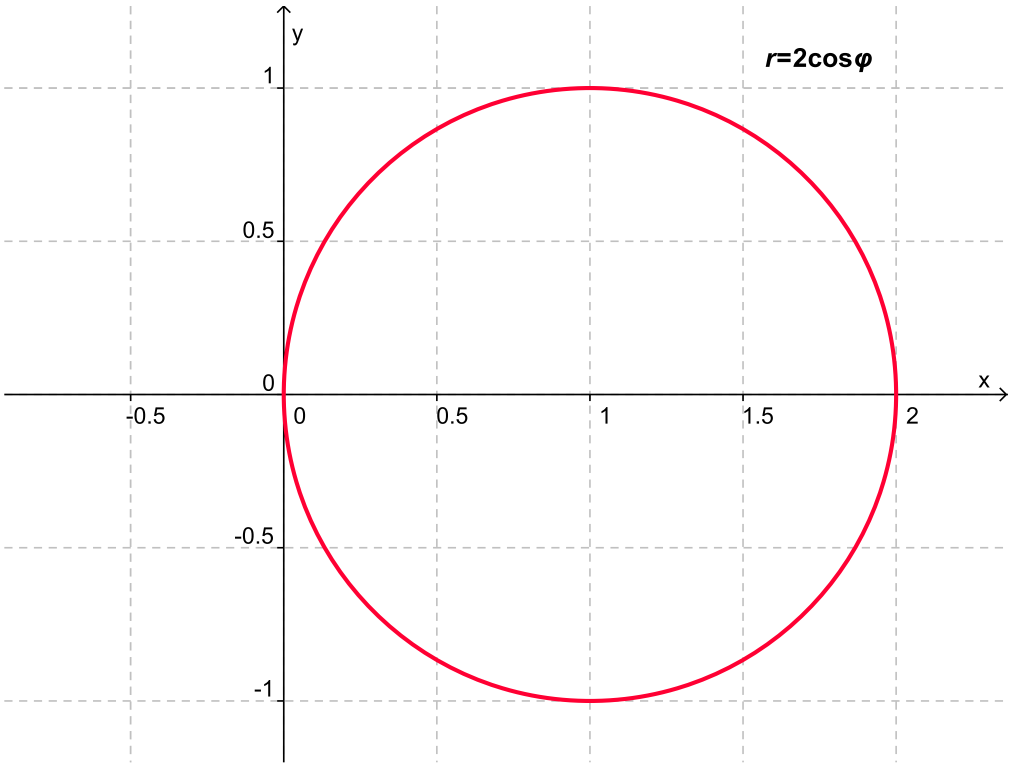
adódik. Alkalmazzuk a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket, így a fenti egyenlet alapján az

$$x^2 + y^2 = 2x$$

Descartes-koordinátás egyenlet adódik. Ez az egyenlet ekvivalens az

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

és az
$$(x-1)^2+y^2=1$$
egyenletekkel. Tehát az $r=2\cos\varphi$ polárkkordinátás egyenletű görbe az $(1,0)$ középpontú egység sugarú kör.

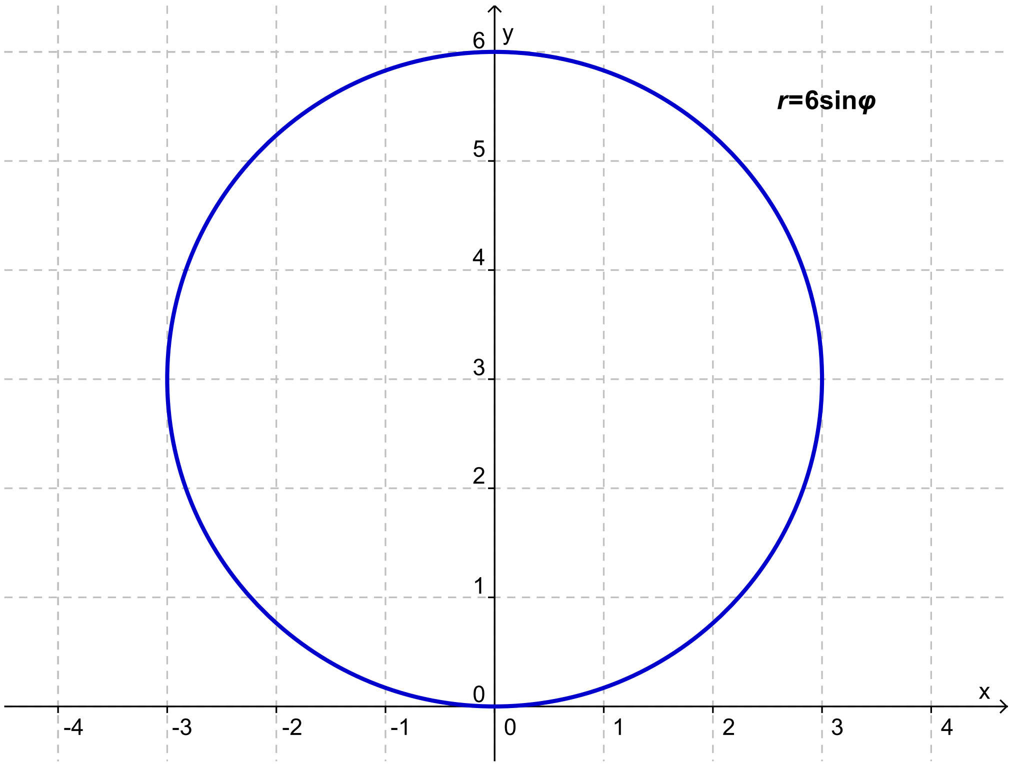


Az $(x-1)^2+y^2=1$ egyenletű kör paraméteres egyenletrendszere:
$$\begin{cases} x(t)=1+\cos t, \\ y(t)=\sin t, \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi).$$

(c) Az $r=6\sin\varphi$ egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg r-rel! Ekkor
$$r^2=6r\sin\varphi$$
adódik. Alkalmazzuk a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket, így a fenti egyenlet alapján az
$$x^2+y^2=6y$$
Descartes-koordinátás egyenlet adódik. Ez az egyenlet ekvivalens az
$$x^2+y^2-6y=0$$
és az
$$x^2+(y-3)^2=9$$
egyenletekkel. Tehát az $r=6\sin\varphi$ polárkkordinátás egyenletű görbe a $(0,3)$ középpontú 3 egység sugarú kör, melynek paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t, \\ y(t) = 3 + 3\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi).$$

Grafikonja:



(d) Az $r = 6(\sin\varphi + \cos\varphi)$ egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg r-rel! Ekkor

$$r^2 = 6r\sin\varphi + 6r\cos\varphi$$

adódik. Alkalmazzuk a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket, így a fenti egyenlet alapján az

$$x^2 + y^2 = 6y + 6x$$

Descartes-koordinátás egyenlet adódik. Ez az egyenlet ekvivalens az

$$x^2 - 6x + y^2 - 6y = 0$$

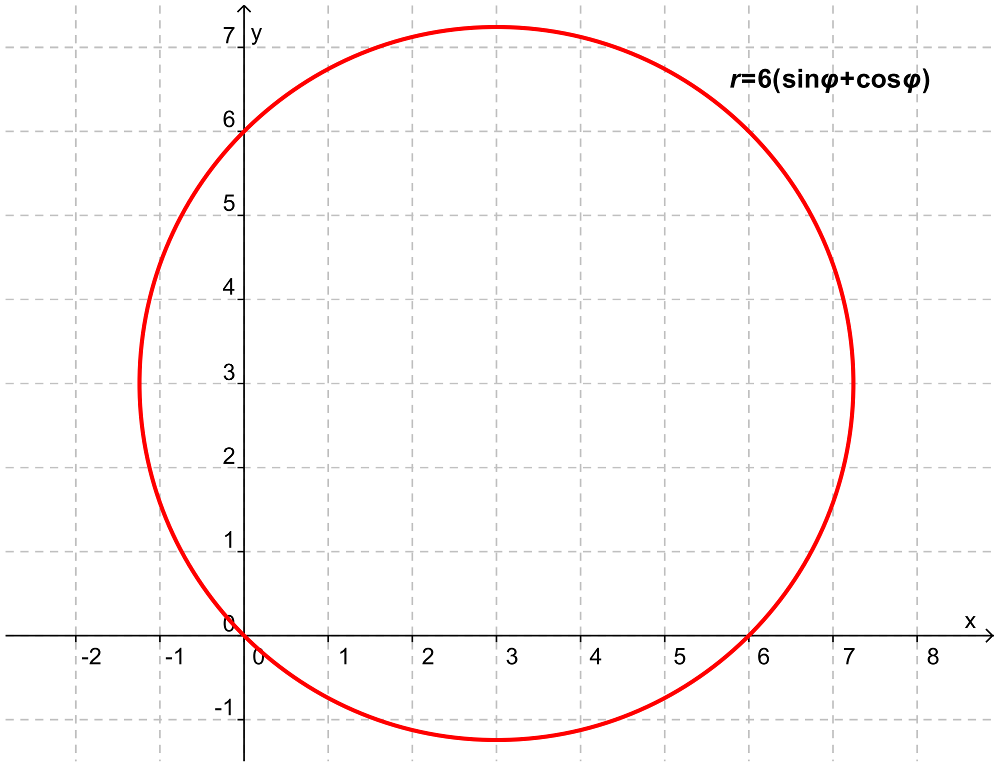
és az

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 18$$

egyenletekkel. Tehát az $r = 6(\sin\varphi + \cos\varphi)$ polárkkordinátás egyenletű görbe a $(3, 3)$ középpontú $3\sqrt{2}$ sugarú kör, melynek paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x(t) = 3 + 3\sqrt{2}\cos t, \\ y(t) = 3 + 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi).$$

Az $r = 6(\sin\varphi + \cos\varphi)$ polárkkordinátás egyenletű görbe grafikonja:



2.1.6. Felhasználjuk az két koordináta-rendszer között fennálló

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \qquad \text{és} \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

összefüggéseket.

(a) Az $x^2 + y^2 = 100$ körre $r^2 = 100$ adódik, vagyis a polárkoordinátás egyenlet:

$$r = 10.$$

(b) Az $x^2 + (y-4)^2 = 16$ kör ekvivalens alakja:

$$x^2 + y^2 = 8y.$$

Felhasználva a két koordinátarendszer közötti összefüggéseket az

$$r^2 = 8r\sin\varphi$$

polárkoordinátás egyenlethez jutunk. Mindkét oldalt végigosztva r-rel az

$$r = 8\sin\varphi$$

összefüggést kapjuk.

(c) Az $(x-6)^2+y^2=36$ kör ekvivalens alakja:

$$x^2+y^2=12x.$$

Alkalmazva a két koordinátarendszer közötti összefüggéseket az

$$r^2=12r\cos\varphi$$

polárkoordinátás egyenlethez jutunk. Mindkét oldalt végigosztva r-rel az

$$r=12\cos\varphi$$

összefüggést kapjuk.

(d) Az $x^2+y^2=8x$ kör esetén felhasználva a két koordinátarendszer közötti összefüggéseket az

$$r^2=8r\cos\varphi$$

polárkoordinátás egyenlethez jutunk. Mindkét oldalt végigosztva r-rel az

$$r=8\cos\varphi$$

polárkoordinátás összefüggés adódik.

(e) Az $x^2+y^2=2y$ kör esetén felhasználva a két koordinátarendszer közötti összefüggéseket az

$$r^2=2r\sin\varphi$$

polárkoordinátás egyenlethez jutunk. Mindkét oldalt végigosztva r-rel az

$$r=2\sin\varphi$$

polárkoordinátás összefüggést kapjuk.

(f) Az $(x-4)^2+(y-4)^2=32$ kör ekvivalens alakja:

$$x^2+y^2=8x+8y.$$

Felhasználva a két koordinátarendszer közötti összefüggéseket az

$$r^2=8r(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

polárkoordinátás egyenlethez jutunk. Mindkét oldalt végigosztva r-rel az

$$r=8(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

összefüggést kapjuk.

2.1.7. Felhasználjuk az két koordináta-rendszer között fennálló

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi\qquad \text{és}\qquad r^2=x^2+y^2$$

összefüggéseket.

(a) Először adjuk meg a görbe Descartes-koordinátás egyenletét! Az $r = -10\cos\varphi$ egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg r-rel! Ekkor

$$r^2 = -10r\cos\varphi$$

adódik. Alkalmazzuk a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket, így a fenti egyenlet alapján az

$$x^2 + y^2 = -10x$$

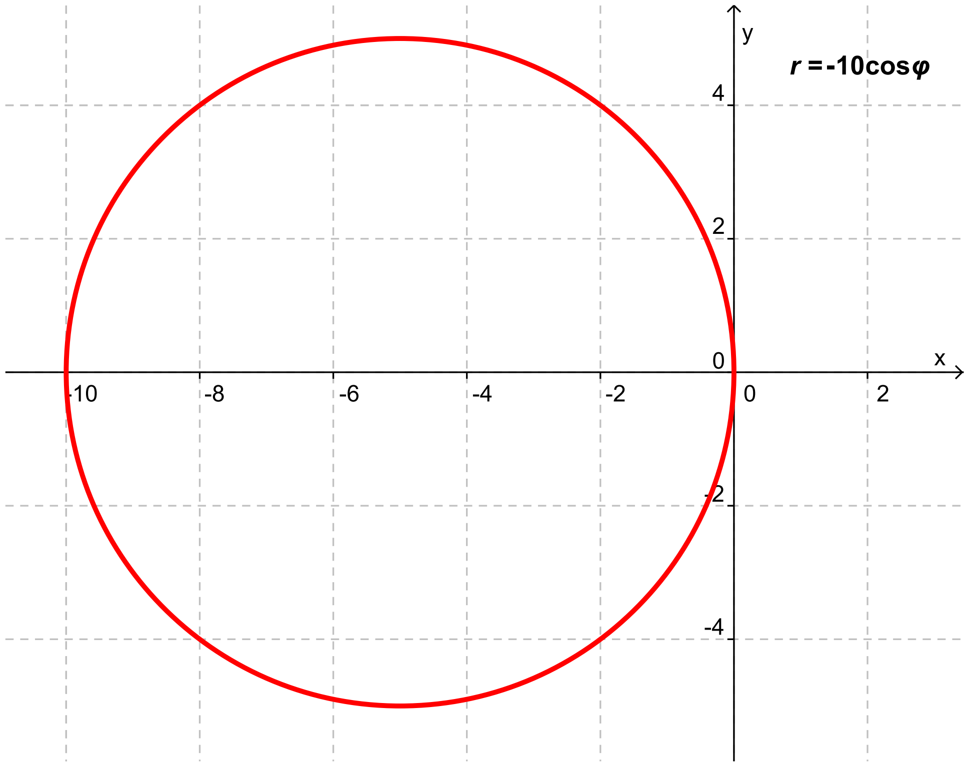
Descartes-koordinátás egyenletet kapjuk. Ez az egyenlet ekvivalens az

$$x^2 + 10x + y^2 = 0$$

és az

$$(x+5)^2 + y^2 = 25$$

egyenletekkel. Tehát az $r = -10\cos\varphi$ polárkkordinátás egyenletű görbe a $(-5, 0)$ középpontú 5 egység sugarú kör.



Az $r = -10\cos\varphi$ kör paraméteres egyenletrendszere:

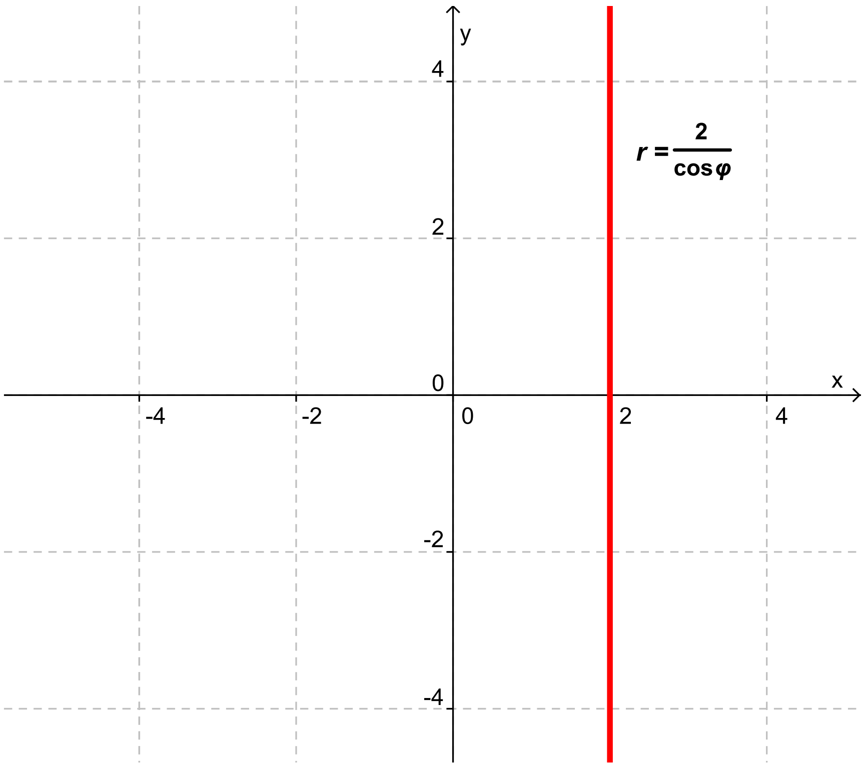
$$\begin{cases} x(t) = -5 + 5\cos t, \\ y(t) = 5\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi).$$

(b) Az $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$, $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$ a polártengelyre merőleges egyenes egyenlete, melynek ekvivalens alakja:

$$r\cos\varphi = 2.$$

Descartes-koordinátás egyenlete:

$$x = 2.$$



Az $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$, $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$ egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x(t) = 2, \\ y(t) = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Az $r = \dfrac{4}{\sin\varphi}$, $(0 < \varphi < \pi)$ a polártengellyel párhuzamos egyenes egyenlete, melynek ekvivalens alakja:

$$r\sin\varphi = 4.$$

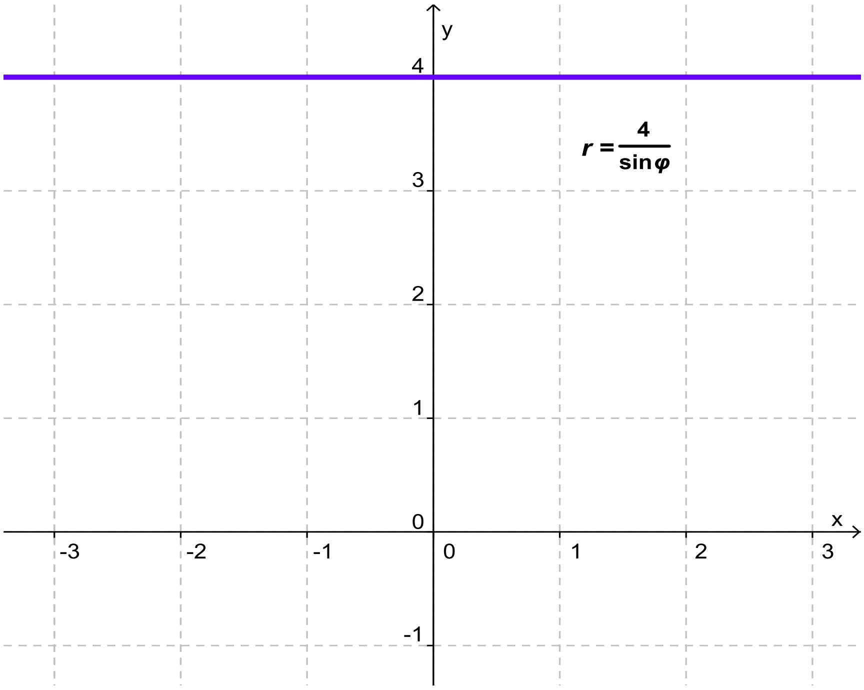
Descartes-koordinátás egyenlete:

$$y = 4.$$

Az $r = \dfrac{4}{\sin\varphi}$, $(0 < \varphi < \pi)$ egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 4, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Az $r = \dfrac{4}{\sin\varphi}$, $(0 < \varphi < \pi)$ egyenes grafikonja:



(d) Az $r = -\dfrac{3}{\cos\varphi}$, $\left(\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ a polártengelyre merőleges egyenes egyenlete, melynek ekvivalens alakja:

$$r\cos\varphi = -3.$$

Descartes-koordinátás egyenlete: $x = -3$.

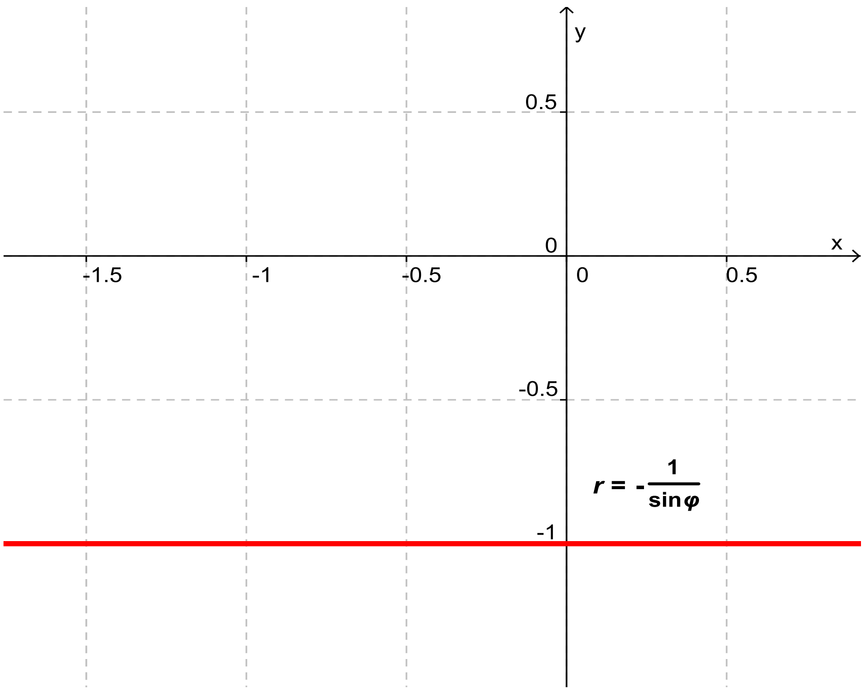
Az $r = -\dfrac{3}{\cos\varphi}$, $\left(\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x(t) = -3, \\ y(t) = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(e) Az $r = -\dfrac{1}{\sin\varphi}$, $(\pi < \varphi < 2\pi)$ a polártengellyel párhuzamos egyenes egyenlete, melynek ekvivalens alakja:

$$r\sin\varphi = -1.$$

Descartes-koordinátás egyenlete: $y = -1$.



Az $r = -\dfrac{1}{\sin\varphi}$, $(\pi < \varphi < 2\pi)$ egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = -1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(f) Először adjuk meg a görbe Descartes-koordinátás egyenletét! Az $r = \dfrac{5}{\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \varphi\right)}$ egyenlet ekvivalens alakja:

$$r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) = 5, \qquad \text{ha} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) \neq 0.$$

Az addíciós tételt alkalmazva:

$$r \cdot \left(\cos\varphi\cos\frac{\pi}{3} - \sin\varphi\sin\frac{\pi}{3}\right) = 5,$$

azaz

$$r \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\varphi \right) = 5.$$

Alkalmazzuk a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket! Ekkor az

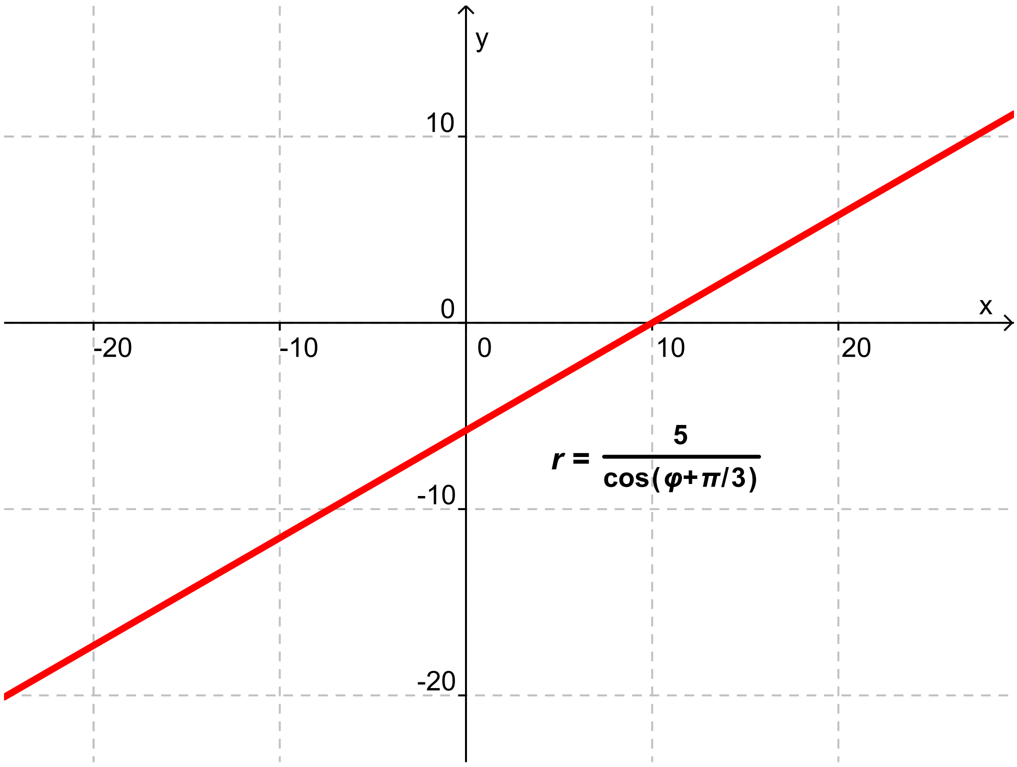
$$\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 5,$$

vagyis az

$$x - \sqrt{3}y = 10$$

egyenes Descartes-koordinátás egyenletét kapjuk. Az egyenes explicit alakja:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{10}{\sqrt{3}}.$$



Az $r = \dfrac{5}{\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \varphi\right)}$ egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}t - \dfrac{10}{\sqrt{3}}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(g) Az $r = \dfrac{2}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$ egyenlet ekvivalens alakja:

$$r \cdot \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = 2, \qquad \text{ha} \quad \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0.$$

Az addíciós tételt alkalmazva:

$$r \cdot \left(\cos\varphi \cos\frac{\pi}{4} + \sin\varphi \sin\frac{\pi}{4}\right) = 2,$$

azaz

$$r \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\varphi\right) = 2.$$

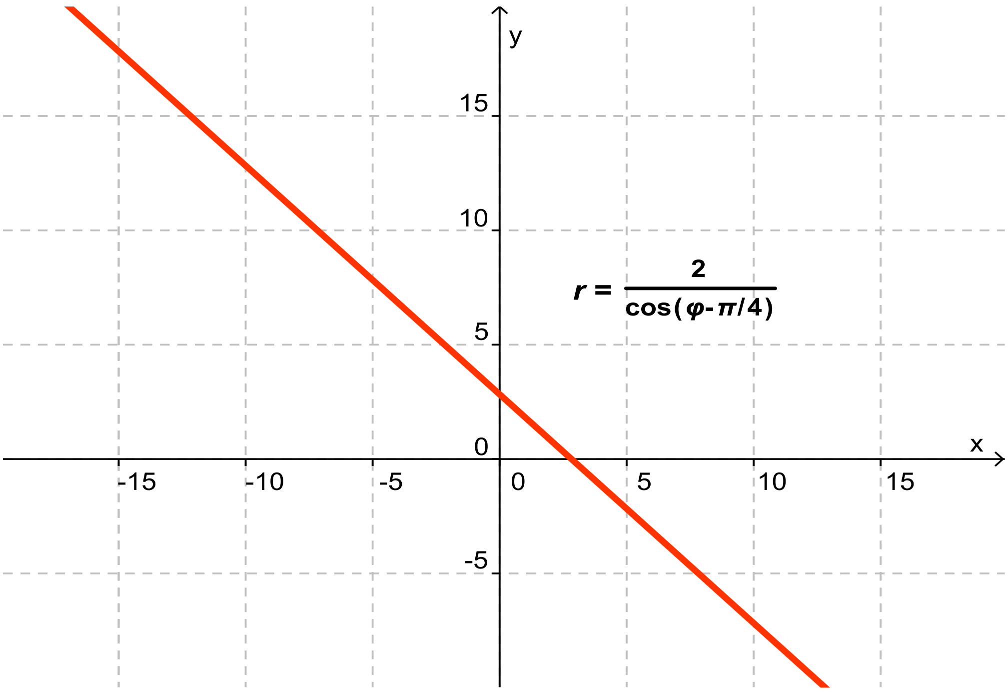
Alkalmazzuk a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket! Ekkor a

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = 2,$$

vagyis az

$$x + y = 2\sqrt{2}$$

egyenes Descartes-koordinátás egyenletét kapjuk.



Az $r = \dfrac{5}{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)}$ egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 2\sqrt{2} - t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(h) Az $r = 8\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$ egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg r-rel! Ekkor

$$r^2 = 8r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$$

adódik. Az addíciós tételt alkalmazva:

$$r^2 = 8r\left(\cos\varphi\cos\frac{\pi}{3} + \sin\varphi\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

azaz

$$r^2 = 4r\cos\varphi + 4\sqrt{3}\sin\varphi.$$

Alkalmazzuk a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket, így a fenti egyenlet alapján az

$$x^2 + y^2 = 4x + 4\sqrt{3}y$$

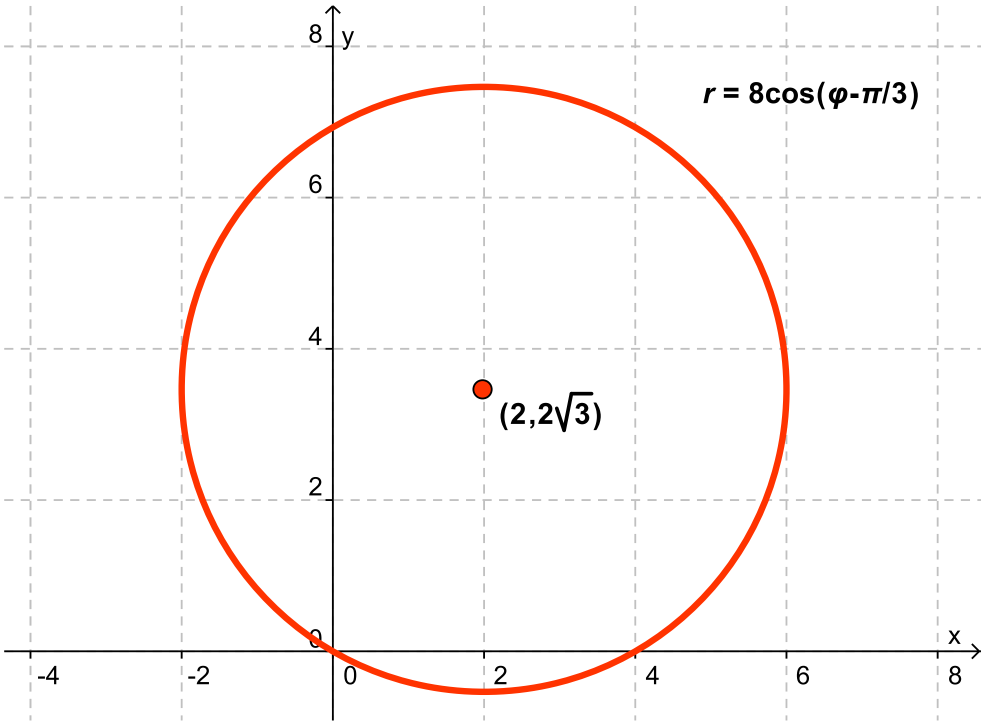
Descartes-koordinátás egyenletet kapjuk. Ez az egyenlet ekvivalens az

$$x^2 - 4x + y^2 - 4\sqrt{3}y = 0$$

és az

$$(x-2)^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 = 16$$

egyenletekkel. Tehát az $r = 8\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$ polárkoordinátás egyenletű görbe a $(2, 2\sqrt{3})$ középpontú 4 egység sugarú kör.



Az $r = 8\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$ kör paraméteres egyenletrendszere:

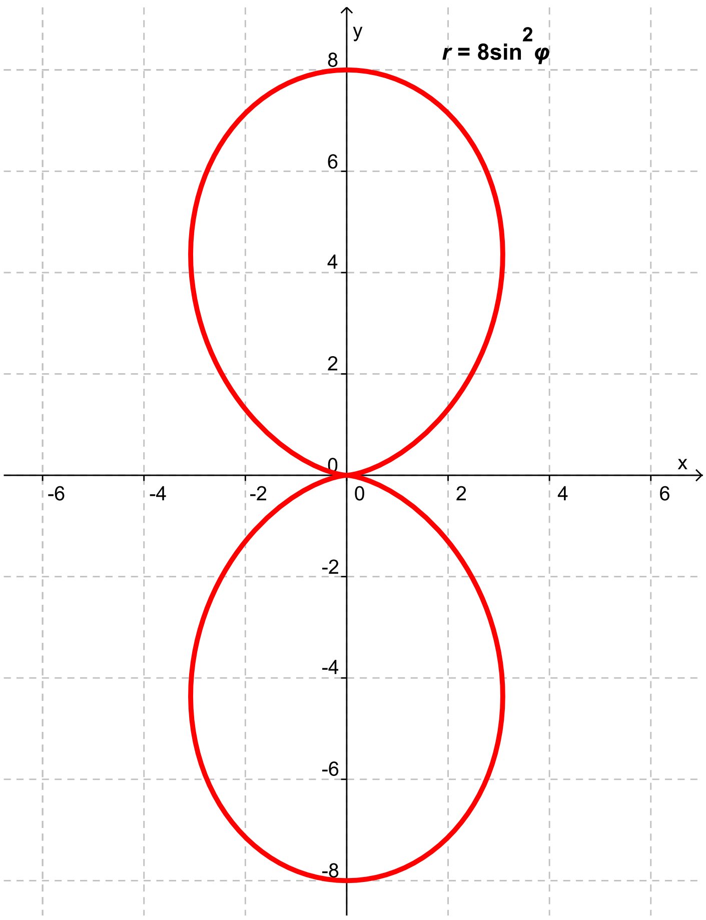
$$\begin{cases} x(t) = 2 + 4\cos t, \\ y(t) = 2\sqrt{3} + 4\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi).$$

2.1.8. A görbék vázlatának elkészítséhez célszerű értéktáblázatot készíteni.

(a) Az $r = 8\sin^2\varphi$ görbe grafikonja az alábbi értéktáblázat alapján könnyen elkészíthető:

φ	$\sin\varphi$	$\sin^2\varphi$	$r = 8\sin^2\varphi$
$0, \pi, 2\pi$	0	0	0
$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2
$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{4}$	6
$\frac{\pi}{2}$	1	1	8
$\frac{3\pi}{2}$	-1	1	8

A görbe grafikonja:



A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához az $r = 8\sin^2\varphi$ egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg r^2-tel! Ekkor

$$r^3 = 8r^2\sin^2\varphi$$

adódik. Alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket a

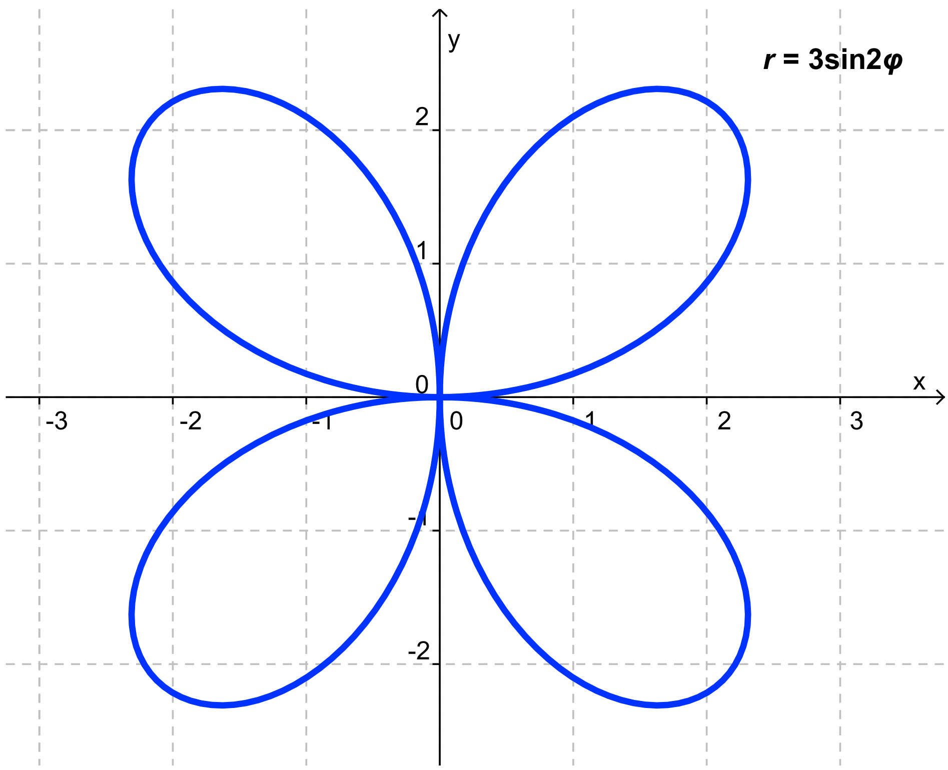
$$\sqrt{(x^2+y^2)^3} = 8y^2$$

Descartes-koordinátás egyenletet kapjuk.

(b) Az $r = 3\sin 2\varphi$ görbe grafikonjának megrajzolásához az alábbi értéktáblázat szolgál alapul:

φ	$\sin 2\varphi$	$r = 3\sin 2\varphi$
$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$	0	0
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$	1	3
$\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$	-1	-3

Az $r = 3\sin 2\varphi$ görbét négyes rozettának nevezik. Grafikonja:



A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához az $r = 3\sin 2\varphi$ egyenletet írjuk át az alábbi alakba:

$$r = 6\sin\varphi \cdot \cos\varphi.$$

Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg r^2-tel! Ekkor

$$r^3 = 6 \cdot r\sin\varphi \cdot r\cos\varphi$$

adódik. Alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket a

$$\sqrt{(x^2+y^2)^3} = 6xy$$

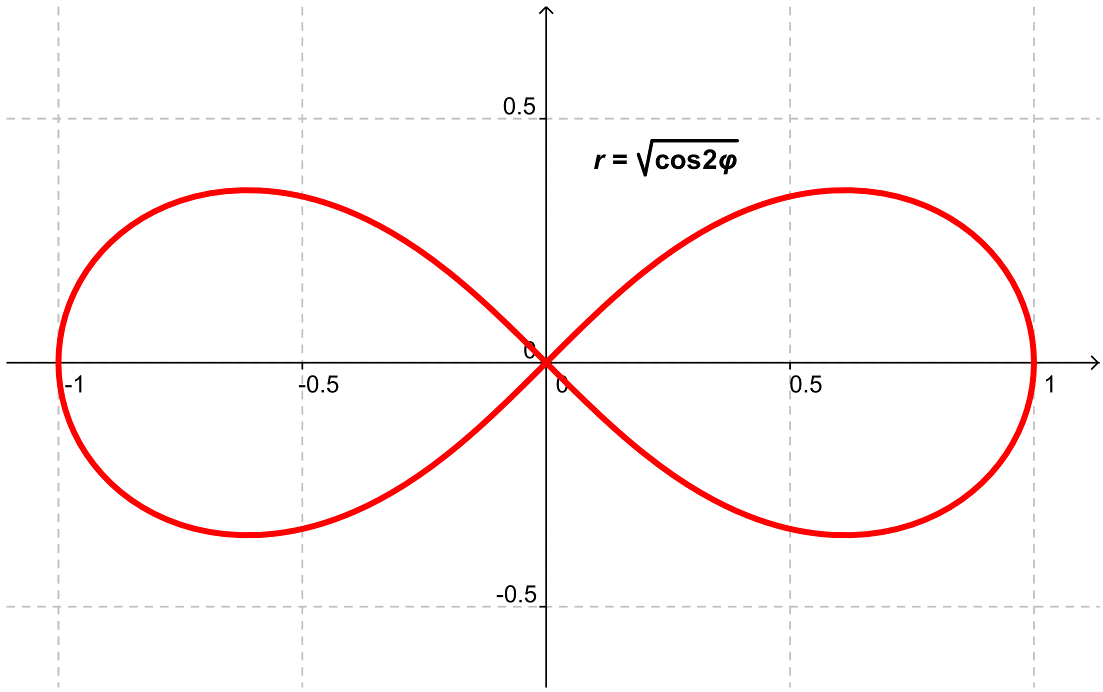
Descartes-koordinátás egyenletet kapjuk.

(c) Az $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ görbe értéktáblázatának elkészítése előtt vegyük észre, hogy r értéke csak akkor számolható ki, ha $\cos 2\varphi \geq 0$, azaz

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \qquad \text{vagy} \qquad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}.$$

φ	$\cos 2\varphi$	$r = \sqrt{\cos 2\varphi}$
$0, \pi, 2\pi$	1	1
$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$	0	0

Az $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ görbét lemniszkátának nevezik. Grafikonja:



A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához az $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ egyenlet mindkét oldalát emeljük négyzetre! Az

$$r^2 = \cos 2\varphi$$

egyenlet jobb oldalán alkalmazzuk a megfelelő trigonometrikus azonosságot, így az

$$r^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

egyenletet írhatjuk fel. Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg r^2-tel! Ekkor

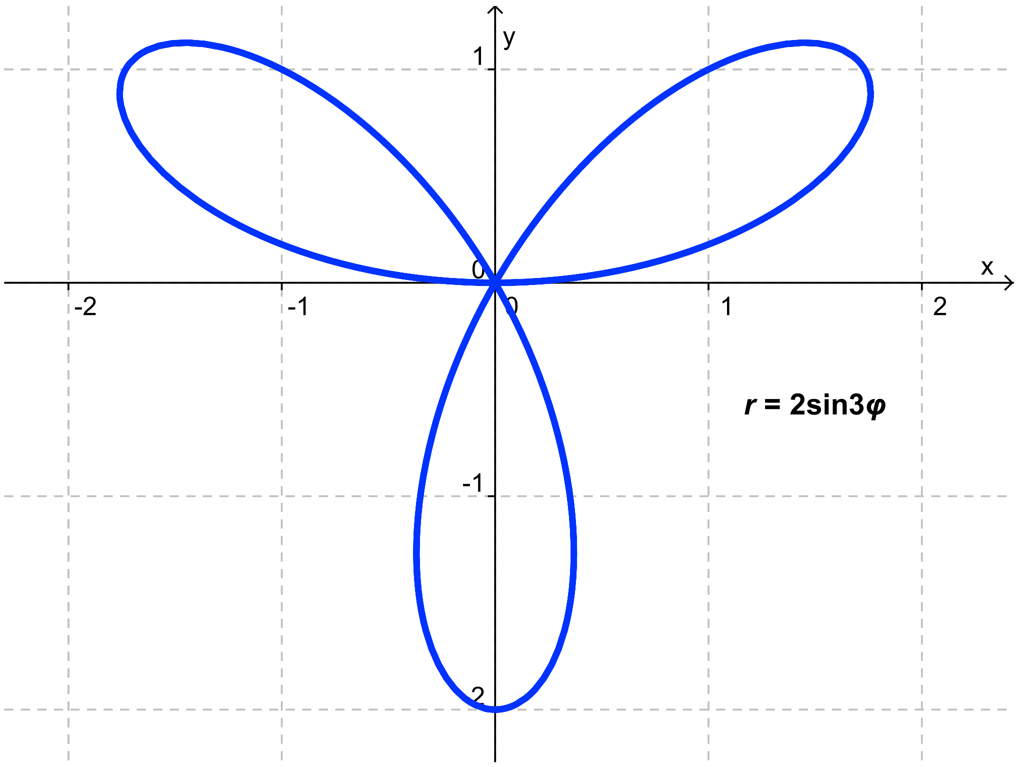
$$r^4 = r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi$$

adódik. Alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket az

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2$$

Descartes-koordinátás egyenletet kapjuk.

(d) Az $r = 2\sin 3\varphi$ görbét hármas rozettának vagy háromlevelű lóherének nevezzük. Grafikonja:



A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához felhasználjuk az alábbi trigonometrikus azonosságot:

$$\sin 3\varphi = \sin(2\varphi + \varphi) = \sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi = 3\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi.$$

Tehát az $r = 2\sin 3\varphi$ egyenlet felírható az alábbi alakban:

$$r = 6\sin\varphi\cos^2\varphi - 2\sin^3\varphi.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg r^3-nal! Ekkor

$$r^4 = 6 \cdot r \sin\varphi \cdot r^2 \cos^2\varphi - 2r^3 \sin^3\varphi$$

adódik. Alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket az

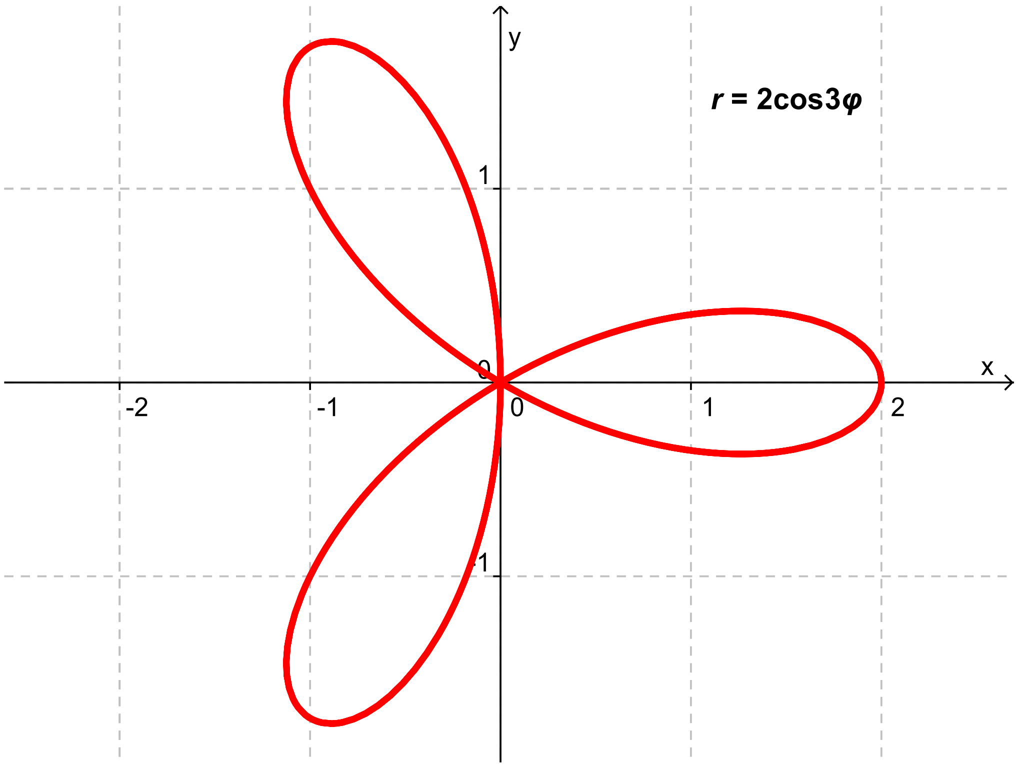
$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 6yx^2 - 2y^3,$$

vagyis az

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2y(3x^2 - y^2)$$

Descartes-koordinátás egyenletet kapjuk.

(e) Az $r = 2\cos 3\varphi$ görbét ugyancsak hármas rozettának vagy háromlevelű lóherének nevezzük. Grafikonja:



A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához felhasználjuk az alábbi trigonometrikus azonosságot:

$$\cos 3\varphi = \cos(2\varphi + \varphi) = \cos 2\varphi \cos\varphi - \sin 2\varphi \sin\varphi = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi.$$

Tehát az $r = 2\cos 3\varphi$ egyenlet felírható az alábbi alakban:

$$r = 2\cos^3\varphi - 6\sin^2\varphi\cos\varphi.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg r^3-nal! Ekkor

$$r^4 = 2r^3\cos^3\varphi - 6 \cdot r^2 \sin^2\varphi \cdot r\cos\varphi$$

adódik. Alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket az

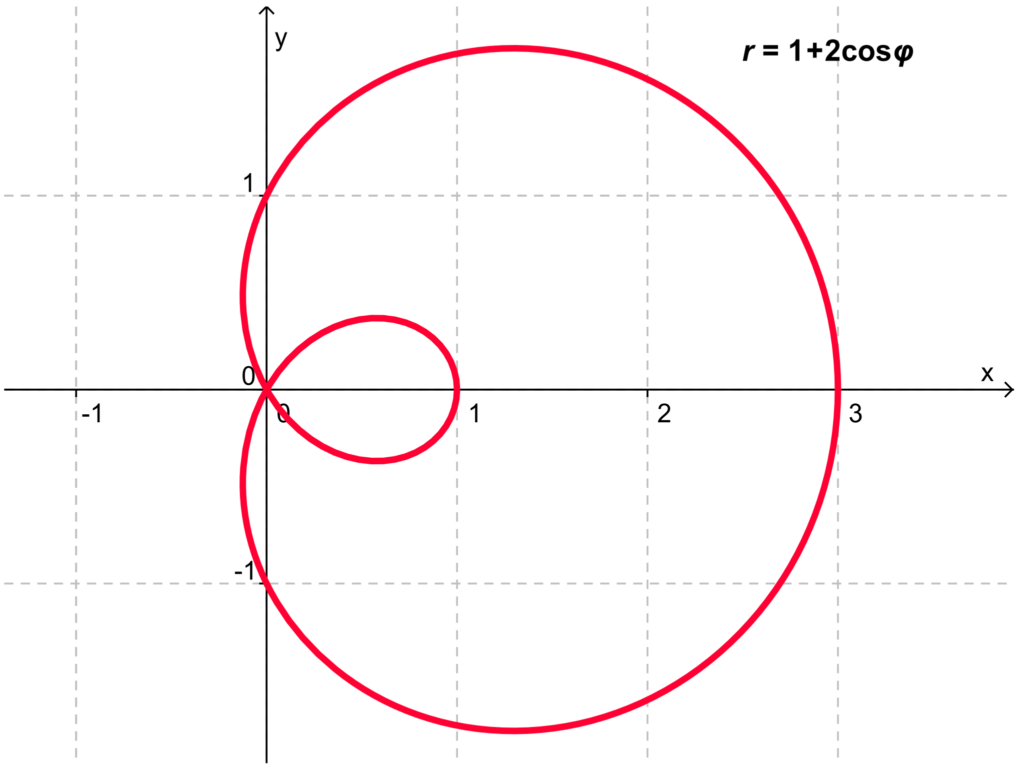
$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2x^3 - 6y^2x,$$

vagyis az

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2x(x^2-3y^2)$$

implicit alakú Descartes-koordinátás egyenletet kapjuk.

(f) Az $r = 1 + 2\cos\varphi$ görbét limakonnak nevezzük. Grafikonja:



φ	$2\cos\varphi$	$r = 1 + 2\cos\varphi$
$0, 2\pi$	2	3
$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	0	1
$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	-1	0
π	-2	-1

A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához szorozzuk meg az $r = 1+2\cos\varphi$ egyenlet mindkét oldalát r-rel! A kapott

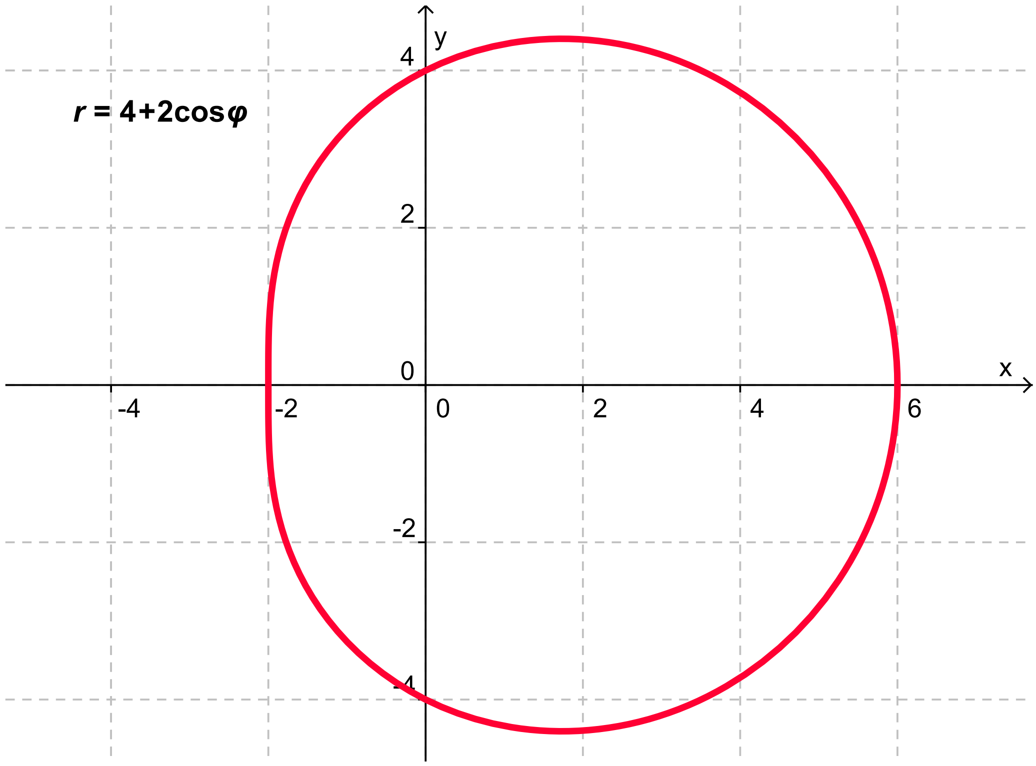
$$r^2 = r + 2r\cos\varphi$$

egyenletre alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket az

$$x^2+y^2 = \sqrt{x^2+y^2} + 2x$$

implicit alakú Descartes-koordinátás egyenletet kapjuk.

(g) Az $r = 4 + 2\cos\varphi$ görbét is limakonnak hívják, de a grafikonján nincs hurok.



Mivel $-2 \leq 2\cos\varphi \leq 2$, így azonnal látszik, hogy

$$2 \leq 4 + 2\cos\varphi \leq 6,$$

azaz r értéke mindig pozitív (ezért nincs hurok), sőt $2 \leq r \leq 6$. Az $r = 4 + 2\cos\varphi$ görbéhez tartozó értéktáblázat:

φ	$2\cos\varphi$	$r = 4 + 2\cos\varphi$
$0, 2\pi$	2	6
$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	0	4
$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	-1	3
π	-2	2

A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához szorozzuk meg az $r = 4+2\cos\varphi$ egyenlet mindkét oldalát r-rel! A kapott

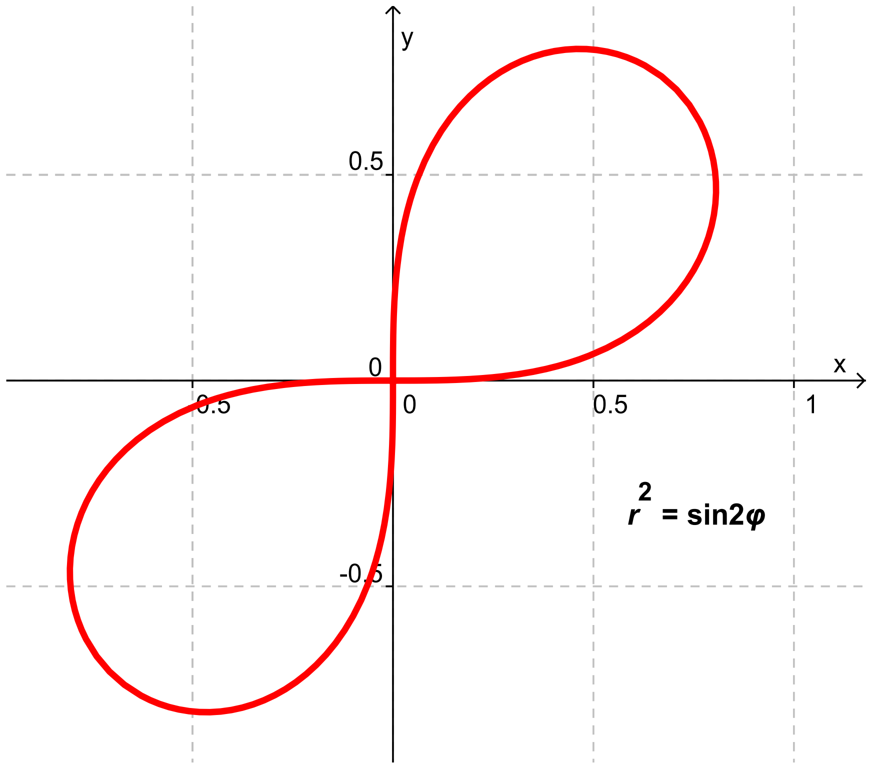
$$r^2 = 4r + 2r\cos\varphi$$

egyenletre alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket az

$$x^2 + y^2 = 4\sqrt{x^2 + y^2} + 2x$$

implicit alakú Descartes-koordinátás egyenletet kapjuk.

(h) Az $r^2 = \sin 2\varphi$ görbét lemniszkátának nevezzük. Grafikonja:



Az $r^2 = \sin 2\varphi$ egyenletből azonnal adódik, hogy r legnagyobb felvett értéke 1. Vegyük észre azt is, hogy r értéke csak akkor számolható ki, ha $\sin 2\varphi \geq 0$, azaz

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \qquad \text{vagy} \qquad \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához az $r^2 = \sin 2\varphi$ egyenletet írjuk fel

$$r^2 = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

alakba, majd szorozzuk meg mindkét oldalt r^2-tel. Ekkor

$$r^4 = 2 \cdot r \sin \varphi \cdot r \cos \varphi$$

adódik, amelyre alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket az

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy$$

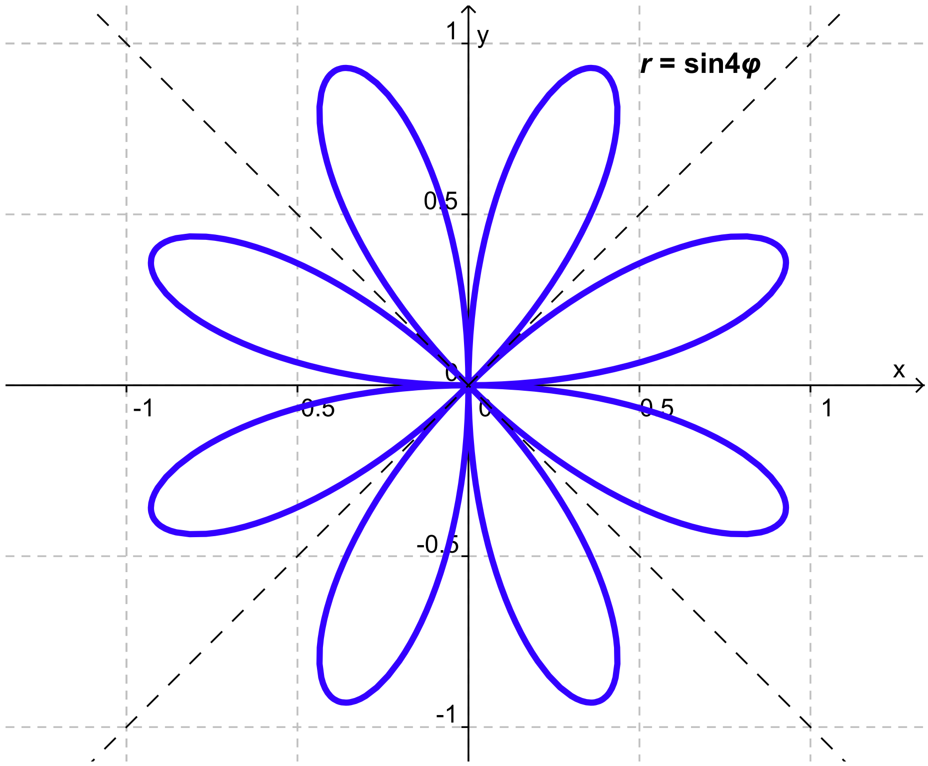
implicit alakú Descartes-koordinátás egyenlet adódik. Megjegyezzük, hogy a görbe grafikonja az $r^2 = \cos 2\varphi$ lemniszkáta grafikonjából $\frac{\pi}{4}$ radiánnal történő elforgatással származtatható, mert:

$$r^2 = \cos\left(2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2\varphi.$$

(i) Az $r = \sin 4\varphi$ görbét nyolcas rozettának nevezzük. A grafikon elkészítéséhez célszerű az alábbi értéktáblázatot elkészíteni:

φ	$r = \sin 4\varphi$
$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$	0
$\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$	1
$\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$	-1

A görbe grafikonja:



A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához felhasználjuk az alábbi trigonometrikus azonosságot:

$$\sin 4\varphi = 2\sin 2\varphi \cos 2\varphi = 4\sin\varphi\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 4\sin\varphi\cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi\cos\varphi.$$

Tehát az $r = \sin 4\varphi$ egyenlet felírható az alábbi alakban:

$$r = 4\sin\varphi\cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi\cos\varphi.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg r^4-nel! Ekkor

$$r^5 = 4 \cdot r\sin\varphi \cdot r^3\cos^3\varphi - 4 \cdot r^3\sin^3\varphi \cdot r\cos\varphi$$

adódik. Alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket a

$$\sqrt{(x^2+y^2)^5} = 4yx^3 - 4y^3x,$$

vagyis a

$$\sqrt{(x^2+y^2)^5} = 4xy(x^2 - y^2)$$

implicit alakú Descartes-koordinátás egyenletet kapjuk.

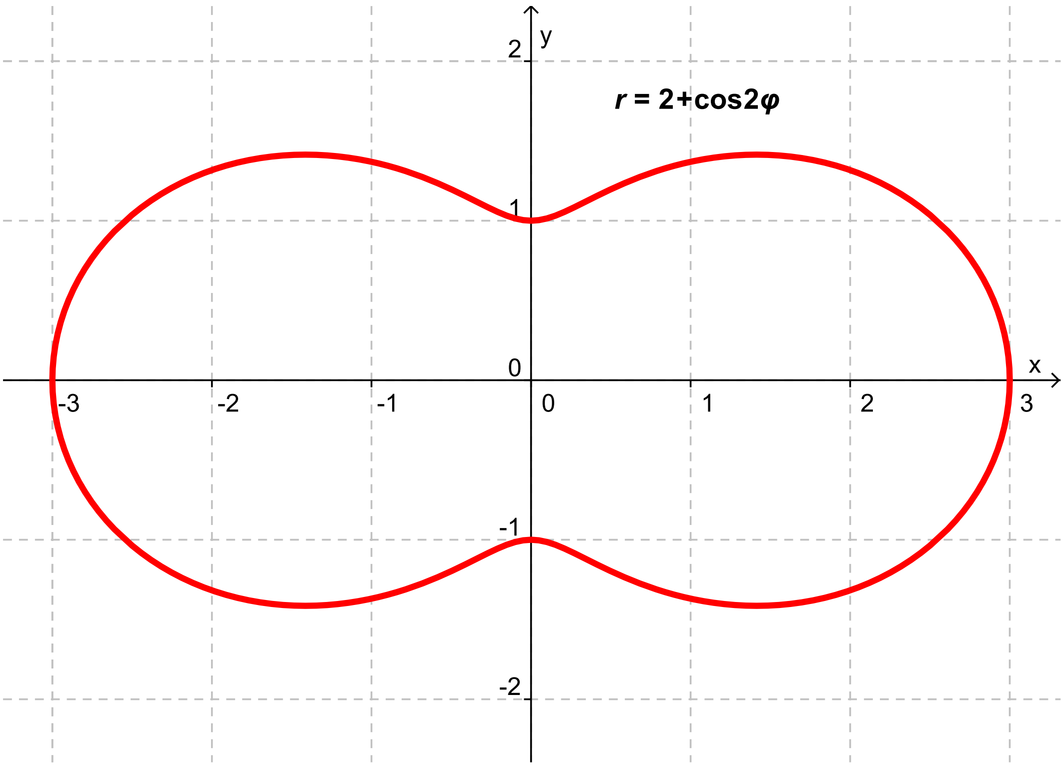
(j) Az $r = 2 + \cos 2\varphi$ görbe grafikonja szimmetrikus az origóra, mert

$$\cos(\varphi + \pi) = \cos 2\varphi.$$

Könnyen látható az is, hogy $-1 \leq \cos 2\varphi \leq 1$, így

$$1 \leq 2 + \cos 2\varphi \leq 3,$$

vagyis r nem vesz fel negatív értéket. A görbe grafikonja:



A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához az $r = 2 + \cos 2\varphi$ egyenletet írjuk fel

$$r = 2 + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

alakba, majd szorozzuk meg mindkét oldalt r^2-tel. Ekkor

$$r^3 = 2r^2 + r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi$$

adódik, amelyre alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket a

$$\sqrt{(x^2+y^2)^3} = 2(x^2 + y^2) + x^2 - y^2$$

implicit alakú Descartes-koordinátás egyenlet írható fel.

2.1.9. A kardioidok (szívgörbék) vázlatának elkészítséhez célszerű értéktáblázatot készíteni.

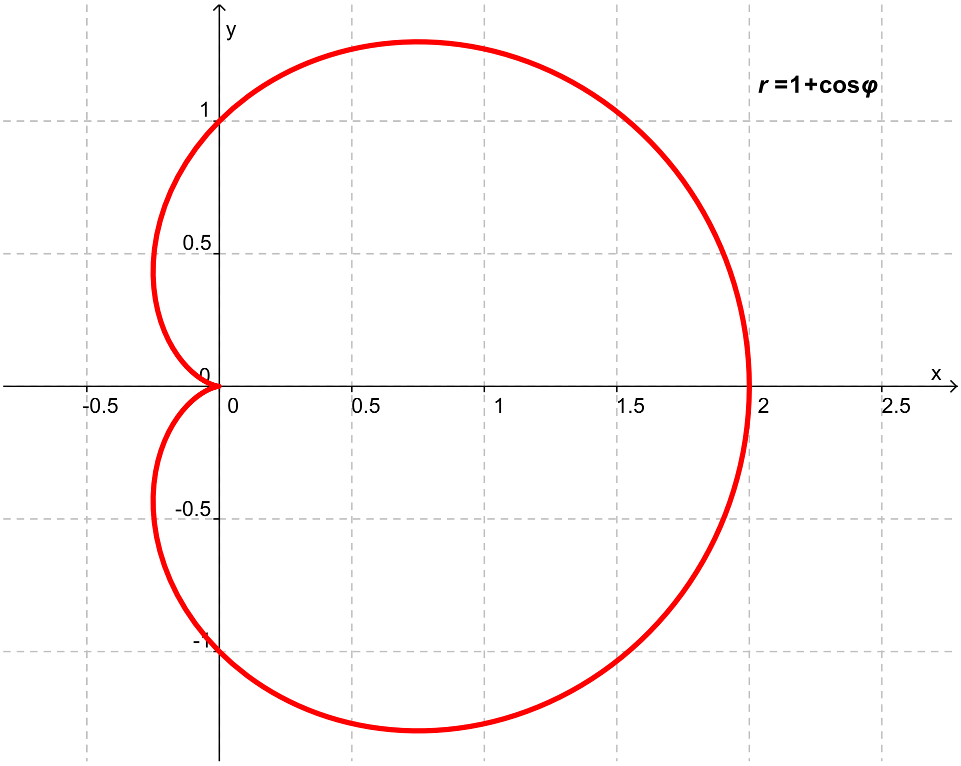
(a) Ha $r = 1 + \cos\varphi$, akkor $-1 \leq \cos\varphi \leq 1$ miatt

$$0 \leq r \leq 2$$

adódik, azaz r értéke sehol sem negatív. Az értéktáblázat:

φ	$\cos\varphi$	$r = 1 + \cos\varphi$
$0, 2\pi$	1	2
$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	0	1
π	-1	0

Az $r = 1 + \cos\varphi$ szívgörbe grafikonja:



A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához az $r = 1 + \cos\varphi$ egyenletet mindkét oldalát szorozzuk meg r-rel. Ekkor

$$r^2 = r + r\cos\varphi$$

adódik, amelyre alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket az

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$$

implicit alakú Descartes-koordinátás egyenlet írható fel.

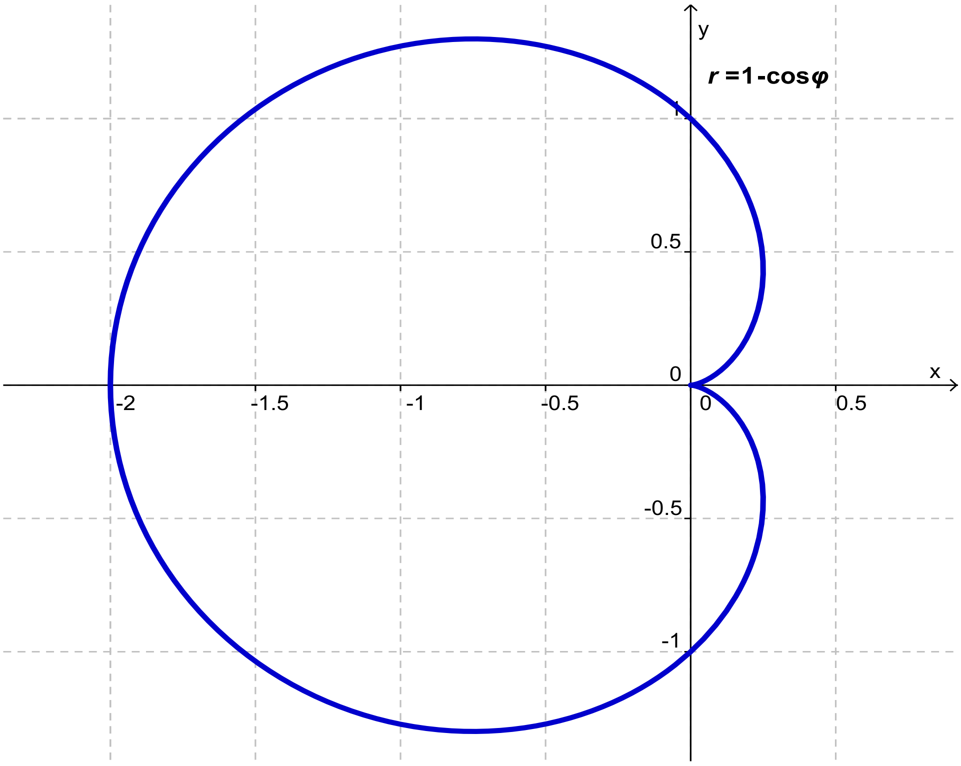
(b) Ha $r = 1 - \cos\varphi$, akkor $-1 \leq \cos\varphi \leq 1$ miatt

$$0 \leq r \leq 2$$

adódik, azaz r értéke sehol sem negatív. Az értéktáblázat:

φ	$\cos\varphi$	$r = 1 - \cos\varphi$
$0, 2\pi$	1	0
$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	0	1
π	-1	2

Az $r = 1 - \cos\varphi$ szívgörbe grafikonja:



Megjegyezzük, hogy az $r = 1+\cos\varphi$ grafikonjából π radiánnal történő, az óramutató járásával ellentétes irányú elforgatással is származtatható az $r = 1 - \cos\varphi$ kardioid grafikonja, mert

$$r = 1 + \cos(\varphi - \pi) = 1 - \cos\varphi.$$

A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához az $r = 1 - \cos\varphi$ egyenletet mindkét oldalát szorozzuk meg r-rel. Ekkor

$$r^2 = r - r\cos\varphi$$

adódik, amelyre alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket az

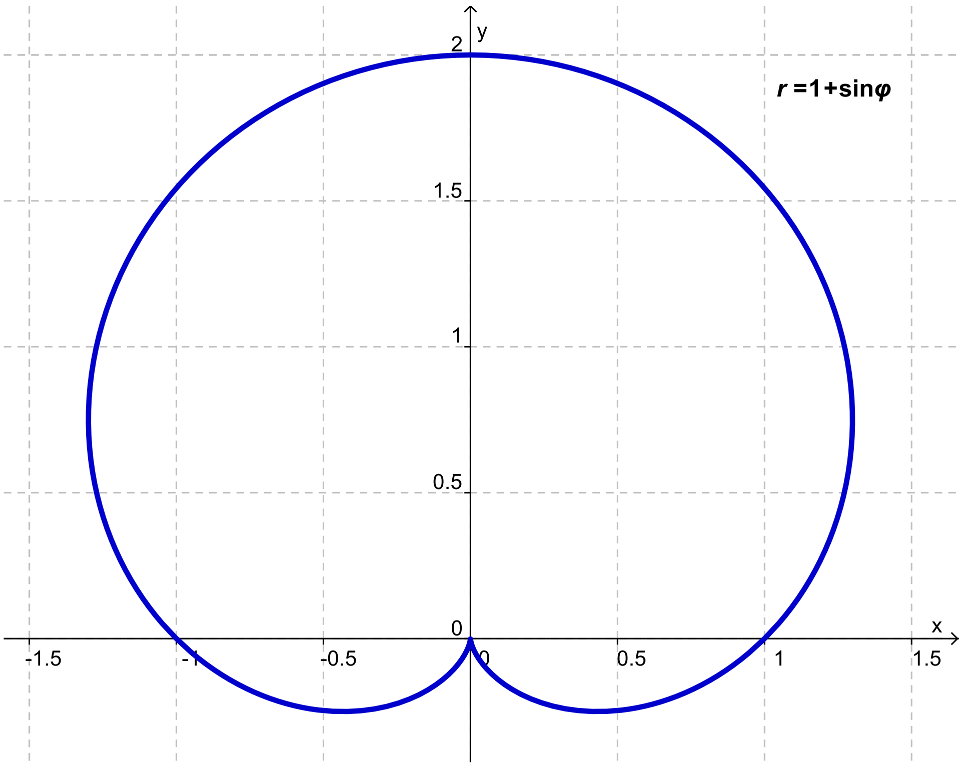
$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x$$

implicit alakú Descartes-koordinátás egyenlet írható fel.

(c) Ha $r = 1 + \sin\varphi$, akkor $-1 \leq \sin\varphi \leq 1$ miatt $0 \leq r \leq 2$ adódik, azaz r értéke sehol sem negatív. Az értéktáblázat:

φ	$\sin\varphi$	$r = 1 + \sin\varphi$
$0, \pi, 2\pi$	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	2
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0

Az $r = 1 + \sin\varphi$ szívgörbe grafikonja:



Az $r = 1 + \cos\varphi$ grafikonjából $\frac{\pi}{2}$ radiánnal történő, az óramutató járásával ellentétes irányú elforgatással is származtatható az $r = 1 + \sin\varphi$ kardioid grafikonja, mert

$$r = 1 + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin\varphi.$$

A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához az $r = 1 + \sin\varphi$ egyenletet mindkét oldalát szorozzuk meg r-rel. Ekkor

$$r^2 = r + r\sin\varphi$$

adódik, amelyre alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket az

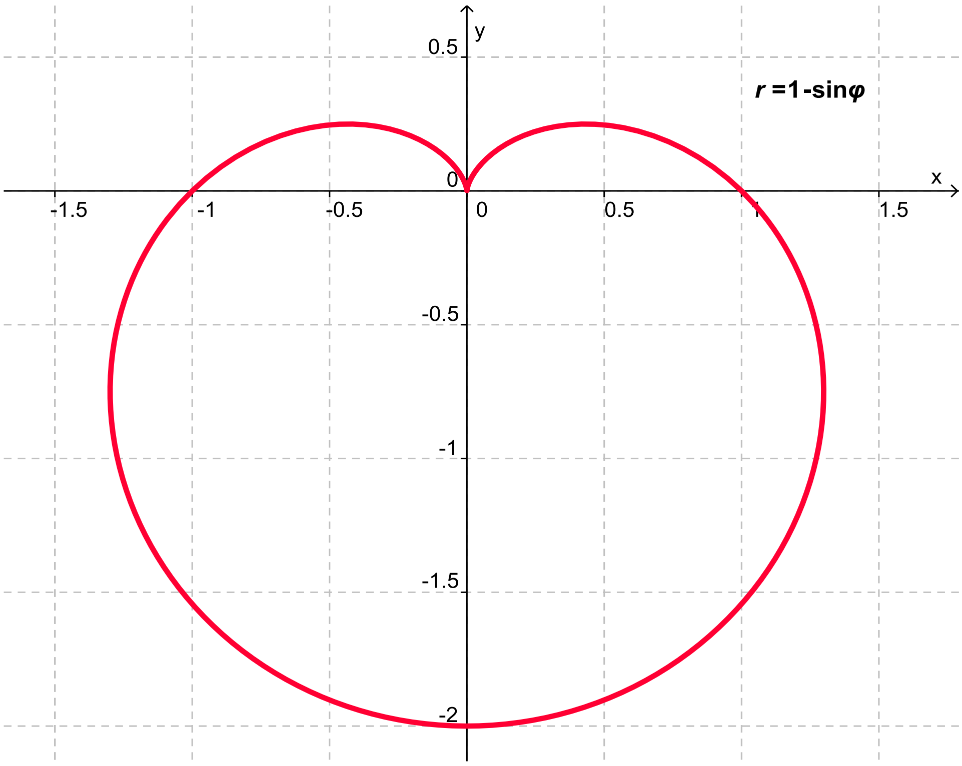
$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + y$$

implicit alakú Descartes-koordinátás egyenlet írható fel.

(d) Ha $r = 1 - \sin\varphi$, akkor $-1 \le \sin\varphi \le 1$ miatt $0 \le r \le 2$ adódik, azaz r értéke sehol sem negatív. Az értéktáblázat:

φ	$\sin\varphi$	$r = 1 + \sin\varphi$
$0, \pi, 2\pi$	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	2

Az $r = 1 - \sin\varphi$ szívgörbe grafikonja:



Az $r = 1 + \cos\varphi$ grafikonjából $\frac{3\pi}{2}$ radiánnal történő, az óramutató járásával ellentétes irányú elforgatással is származtatható az $r = 1 - \sin\varphi$ kardioid grafikonja, mert

$$r = 1 + \cos\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) = 1 - \sin\varphi.$$

A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához az $r = 1 - \sin\varphi$ egyenletet mindkét oldalát szorozzuk meg r-rel. Ekkor

$$r^2 = r - r\sin\varphi$$

adódik, amelyre alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket az

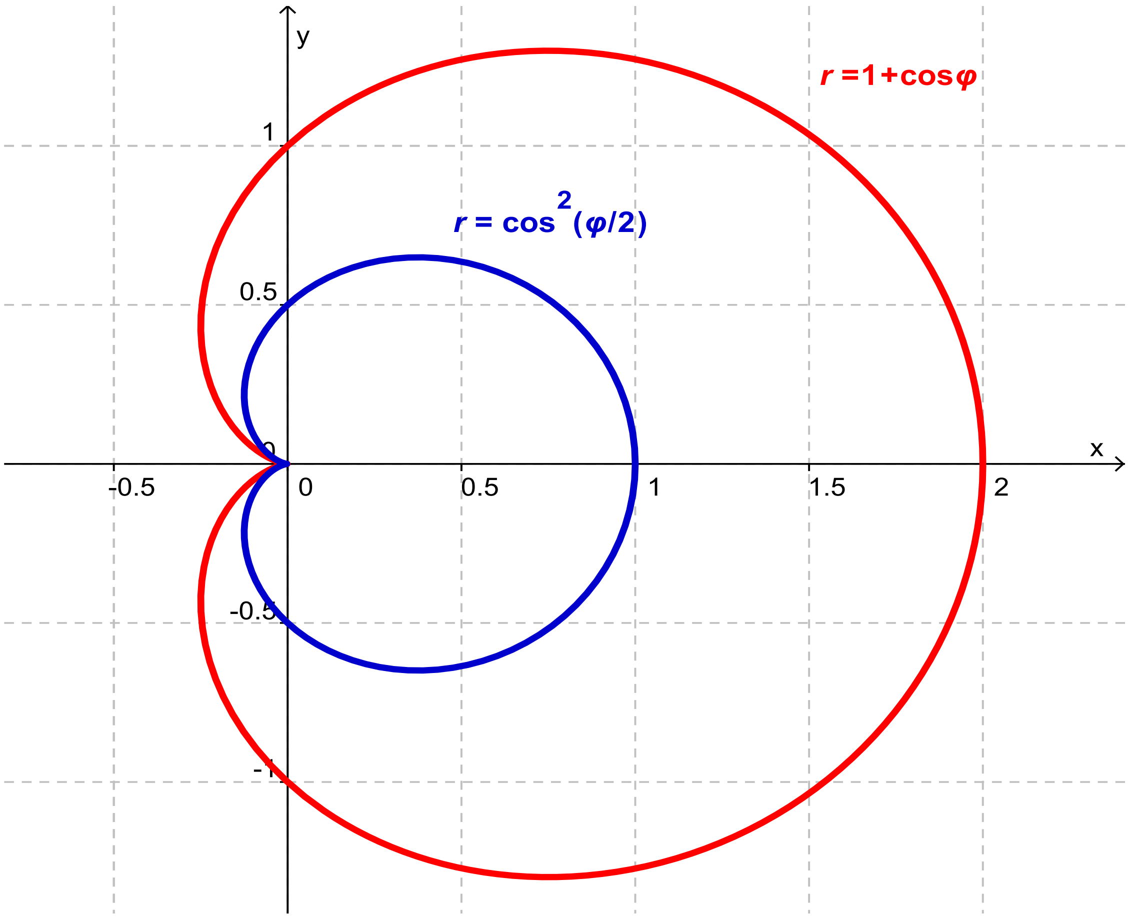
$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - y$$

implicit alakú Descartes-koordinátás egyenlet írható fel.

2.1.10. Könnyen észrevehető, hogy

$$r = \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\cos\varphi}{2},$$

vagyis az $r = \cos^2\frac{\varphi}{2}$ görbe grafikonja az $r = 1+\cos\varphi$ kardioid grafikonjának az origóból felére kicsinyített képe.



2.1.11. A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához az $r = \sin\frac{\varphi}{2}$ egyenlet mindkét oldalát emeljük négyzetre!

$$r^2 = \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Ismert, hogy

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{2},$$

azaz

$$r^2 = \frac{1-\cos\varphi}{2}.$$

Szorozzuk meg a kapott egyenlet mindkét oldalát $2r$-rel! Ekkor a

$$2r^3 = r - r\cos\varphi$$

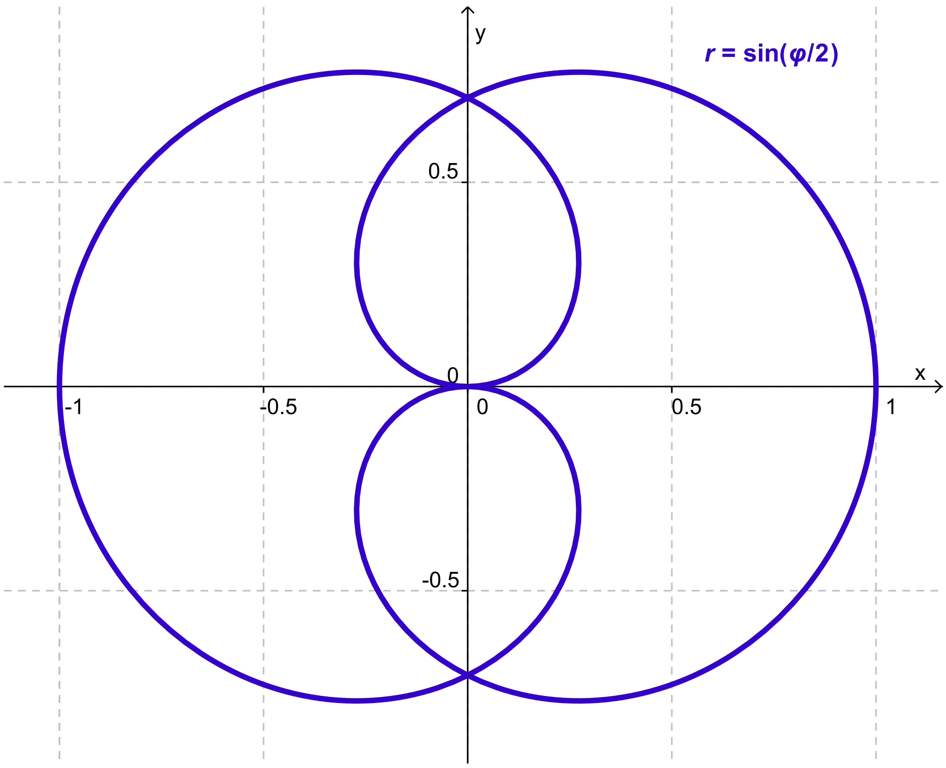
egyenletet kapjuk, amelyre alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket a

$$2\sqrt{(x^2+y^2)^3} = \sqrt{x^2+y^2} - x$$

implicit alakú Descartes-koordinátás egyenlet írható fel. Ha $r = \sin\frac{\varphi}{2}$, akkor $-1 \le \sin\frac{\varphi}{2} \le 1$ miatt $-1 \le r \le 1$ teljesül, vagyis r pozitív és nagatív értékeket is felvehet. Az $y = \sin\frac{x}{2}$ függvény periódusa 4π, így a görbe vázlatának elkészítéséhez φ értékeit a $[0, 4\pi]$ intervallumból választjuk. Az értéktáblázat:

φ	$r = \sin\frac{\varphi}{2}$
$0, 2\pi, 4\pi$	0
$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	1
$\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
3π	-1

Az $r = \sin\frac{\varphi}{2}$ görbe grafikonja:

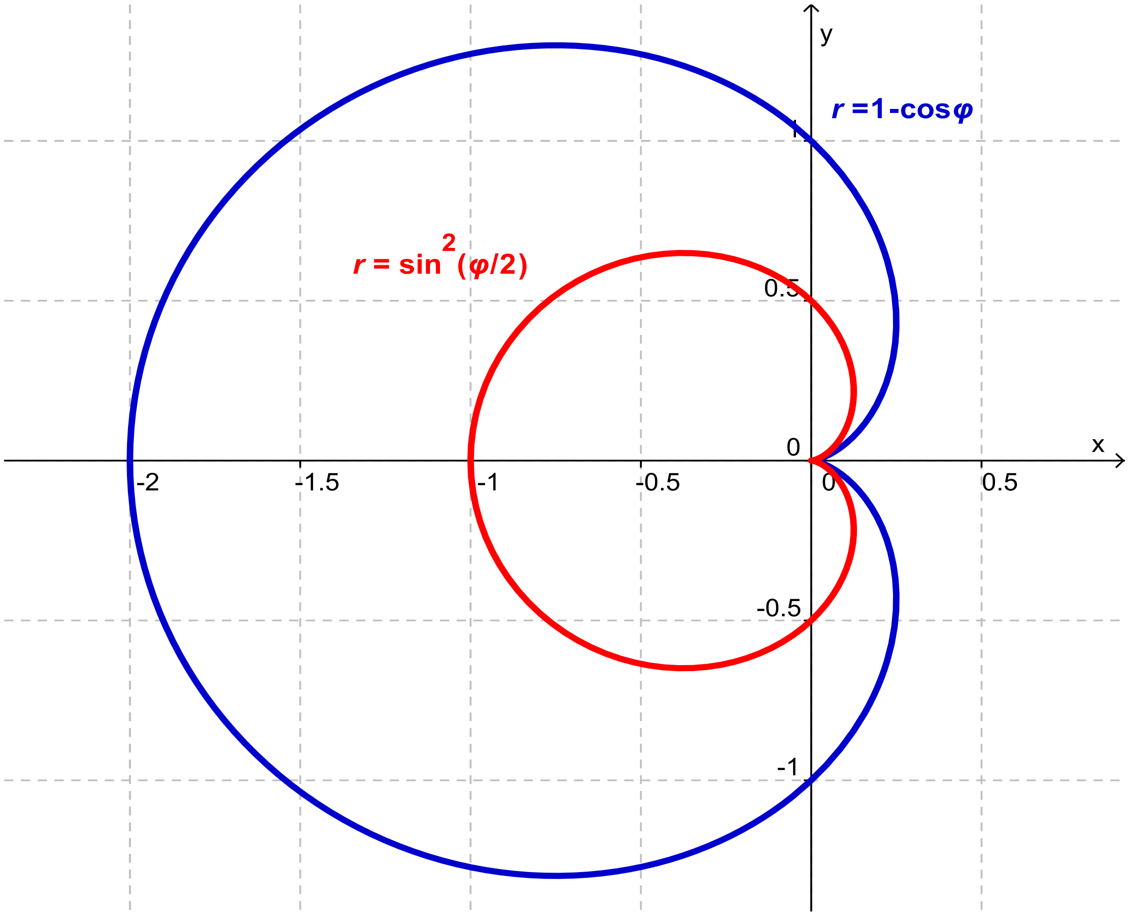


Látható, hogy $\varphi \in [0, 2\pi]$ esetén egy kardioid görbét kapunk, majd $\varphi \in [2\pi, 4\pi]$ esetén egy másik kardioid adódik, ami éppen a $\varphi \in [0, 2\pi]$ esetben kapott kardioid y-tengelyre való tükörképe.

2.1.12. Könnyen észrevehető, hogy

$$r = \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2},$$

vagyis az $r = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ görbe grafikonja az $r = 1 - \cos \varphi$ kardioid grafikonjának az origóból felére kicsinyített képe.



2.1.13. Az $r = 3 + 2\cos\varphi$ limakon grafikonján sincs hurok, mert $-2 \leq 2\cos\varphi \leq 2$, így azonnal látszik, hogy

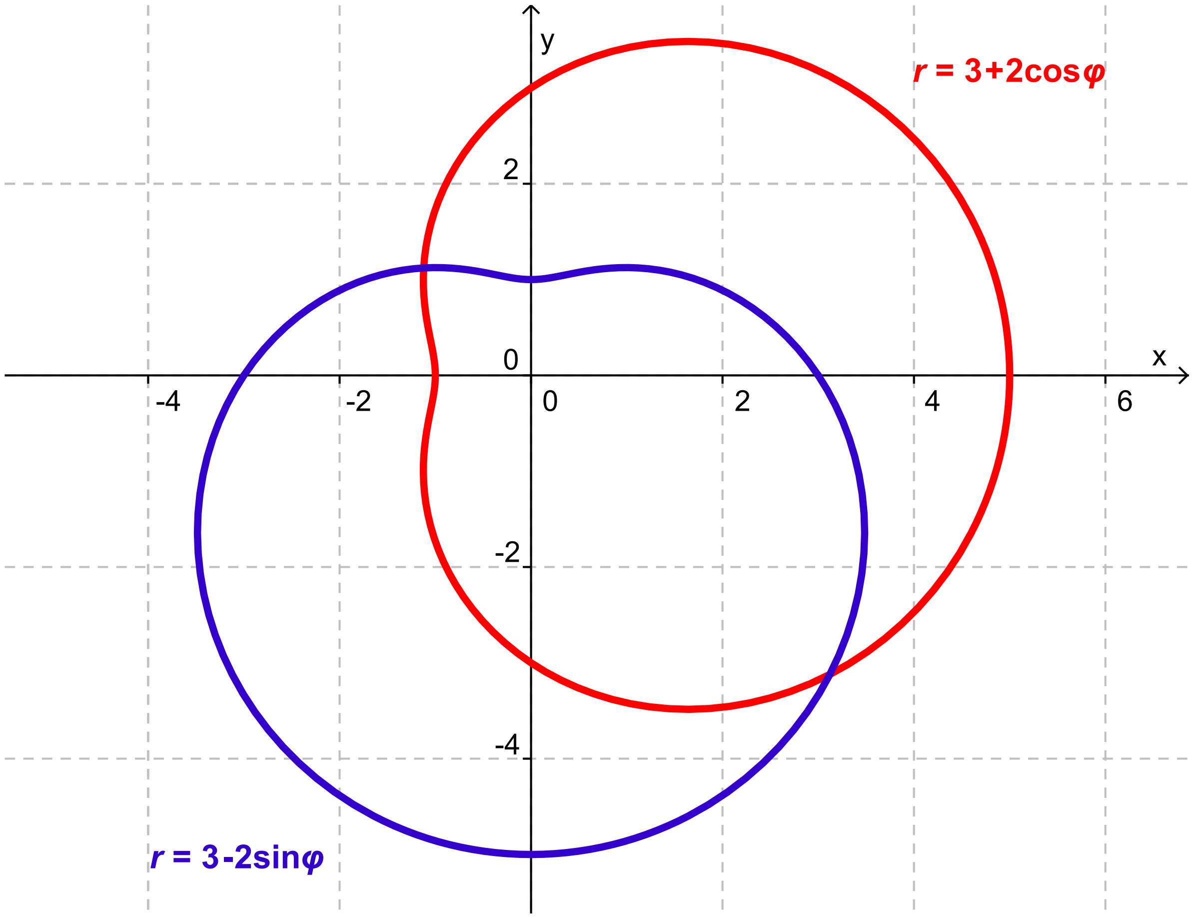
$$1 \leq 3 + 2\cos\varphi \leq 5,$$

azaz r értéke mindig pozitív. Az $r = 3 + 2\cos\varphi$ görbéhez tartozó értéktáblázat:

φ	$2\cos\varphi$	$r = 3 + 2\cos\varphi$
$0, 2\pi$	2	5
$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	0	3
$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	-1	2
π	-2	1

Az $r = 3 - 2\sin\varphi$ limakon grafikonja megkapható az $r = 3 + 2\cos\varphi$ limakon grafikonjának az óramutató járásával ellentétes irányú $\dfrac{3\pi}{2}$ radiánnal történő elforgatásával, mert:

$$r = 3 + 2\cos\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) = 3 - 2\sin\varphi.$$



2.1.14.

(a) Az ellipszis polárkoordinátás egyenletének felírásához az $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg 4-gyel! Az

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

egyenletet zárójelezzük:

$$(x^2 + y^2) + 3y^2 = 4,$$

majd alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket az

$$r^2 + 3r^2 \sin^2\varphi = 4$$

összefüggés adódik. A kapott egyenlet bal oldalán kiemeljük r^2-et:

$$r^2(1 + 3\sin^2\varphi) = 4,$$

majd mindkét oldalt elosztjuk a zárójelben lévő összeggel, így

$$r^2 = \frac{4}{1 + 3\sin^2\varphi}$$

írható fel, tehát az ellipszis egyenlete poláris koordinátákkal:

$$r = \frac{2}{\sqrt{1 + 3\sin^2\varphi}}.$$

(b) Az ellipszis polárkoordinátás egyenletének felírásához az $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg 400-zal! A

$$16x^2 + 25y^2 = 400$$

egyenletet zárójelezzük:

$$25(x^2 + y^2) - 9x^2 = 400,$$

majd alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket a

$$25r^2 - 9r^2\cos^2\varphi = 400$$

összefüggés adódik. A kapott egyenlet bal oldalán kiemeljük r^2-et:

$$r^2(25 - 9\cos^2\varphi) = 400,$$

majd mindkét oldalt elosztjuk a zárójelben lévő különbséggel, így

$$r^2 = \frac{400}{25 - 9\cos^2\varphi}$$

írható fel, tehát az ellipszis egyenlete poláris koordinátákkal:

$$r = \frac{20}{\sqrt{25 - 9\cos^2\varphi}}.$$

(c) Az $x^2 = y$ parabola esetén, ha alkalmazzuk a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket, akkor az

$$r^2\cos^2\varphi = r\sin\varphi$$

egyenlet adódik. Mindkét oldalt osszuk el r-el és $\cos^2\varphi$-vel, így megkapjuk a parabola egyenletét poláris korrdinátákkal:

$$r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Ennek egy ekvivalens alakja:

$$r = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}.$$

(d) Ha alkalmazzuk a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket az $y^2 = 16x$ parabolára, akkor az

$$r^2 \sin^2 \varphi = 16r \cos \varphi$$

egyenlet adódik. Mindkét oldalt osszuk el r-el és $\sin^2 \varphi$-vel, így megkapjuk a parabola egyenletét poláris korrdinátákkal:

$$r = \frac{16 \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Ennek egy ekvivalens alakja:

$$r = \frac{16 \operatorname{ctg} \varphi}{\sin \varphi}.$$

(e) A hiperbola polárkoordinátás egyenletének felírásához az $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg 400-zal! A

$$16x^2 - 25y^2 = 400$$

egyenletetre alkalmazva a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket a

$$16r^2 \cos^2 \varphi - 25r^2 \sin^2 \varphi = 400$$

összefüggés adódik. A kapott egyenlet bal oldalán alkalmazzuk a $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ azonosságot és emeljünk ki r^2-et! Az

$$r^2(16 \cos 2\varphi - 9 \sin^2 \varphi) = 400$$

egyenlet mindkét oldalát osszuk el a zárójelben lévő különbséggel, így

$$r^2 = \frac{400}{16 \cos 2\varphi - 9 \sin^2 \varphi}$$

írható fel, tehát a hiperbola egyenlete poláris koordinátákkal:

$$r = \frac{20}{\sqrt{16 \cos 2\varphi - 9 \sin^2 \varphi}}.$$

(f) Ha alkalmazzuk a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket az $xy = 4$ hiperbolára, akkor az

$$r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi = 4$$

egyenlet adódik, azaz

$$r^2 \cos \varphi \sin \varphi = 4.$$

Mindkét oldalt szorozzuk meg 2-vel és alkalmazzuk a $\sin^2 \varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ azonosságot:

$$2r^2 \cos \varphi \sin \varphi = 8,$$

$$r^2 \sin 2\varphi = 8,$$

azaz

$$r^2 = \frac{8}{\sin 2\varphi},$$

tehát

$$r = \sqrt{\frac{8}{\sin 2\varphi}}.$$

2.1.15. A Descartes-koordinátás egyenlet felírásához az $r = \dfrac{6}{\sqrt{9 - 5\sin^2\varphi}}$ egyenlet mindkét oldalát emeljük négyzetre!

$$r^2 = \frac{36}{9 - 5\sin^2\varphi}.$$

A kapott egyenlet ekvivalens a

$$9r^2 - 5r^2\sin^2\varphi = 36$$

egyenlettel. Alkalmazzuk a két koordinátarendszer közötti összefüggéseket! Ekkor a

$$9(x^2 + y^2) - 5y^2 = 36,$$

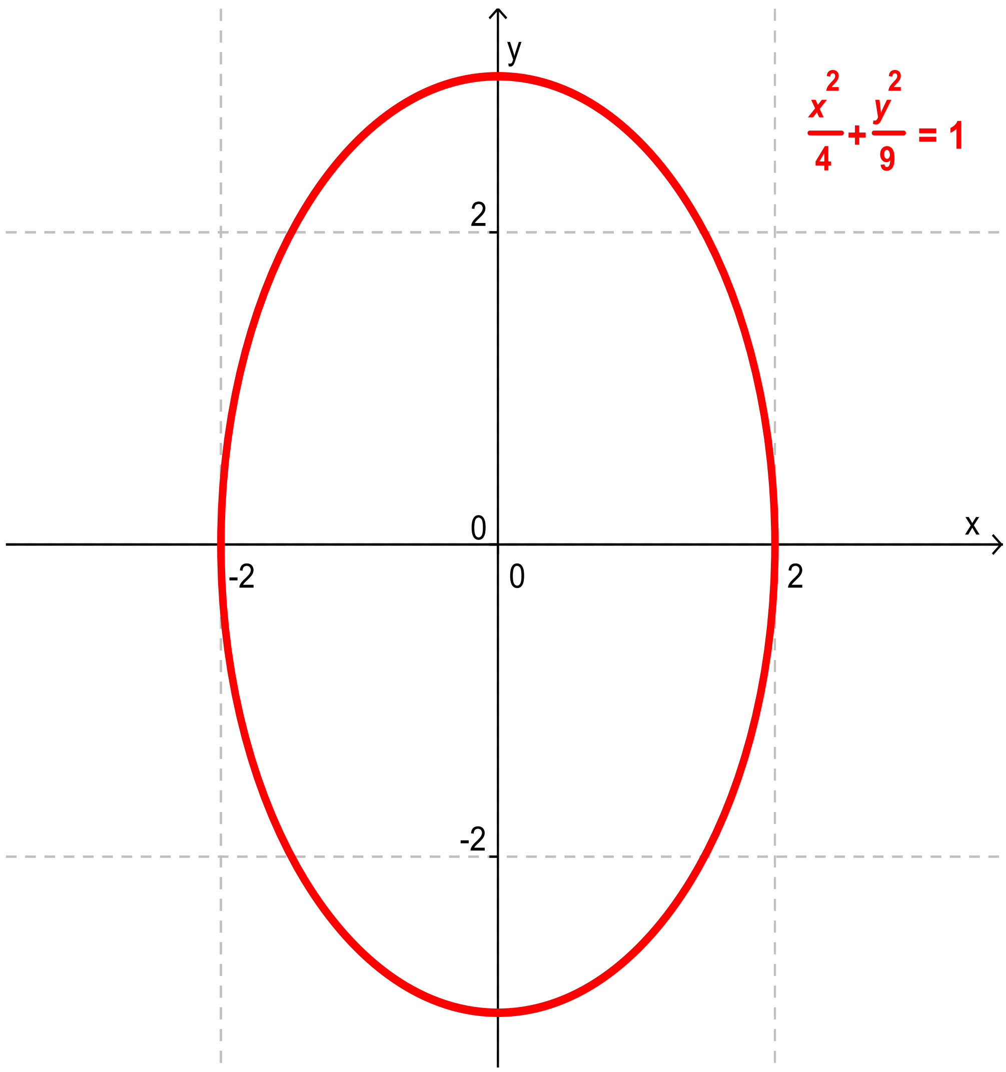
vagyis összevonás után a

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

egyenlet adódik. Mindkét oldalt elosztva 36-tal megkapjuk egy ellipszis Descartes-koordinátás egyenletét:

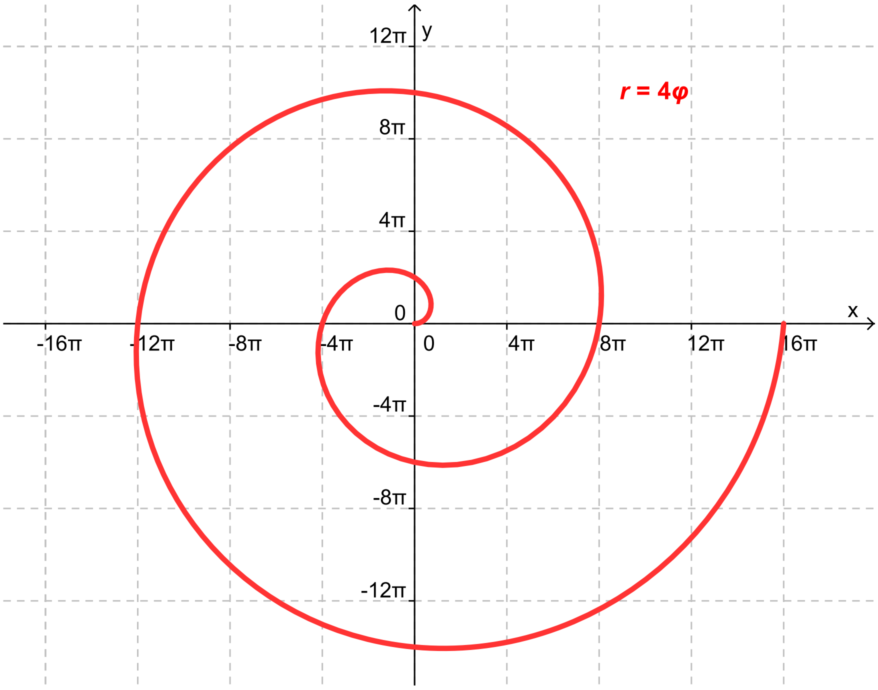
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Grafikonja:

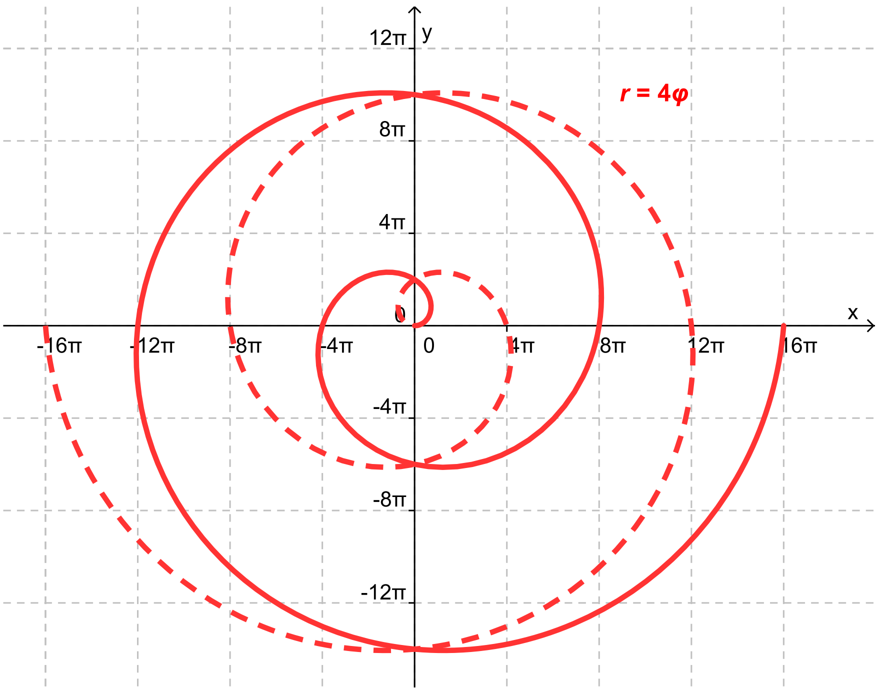


2.1.16.

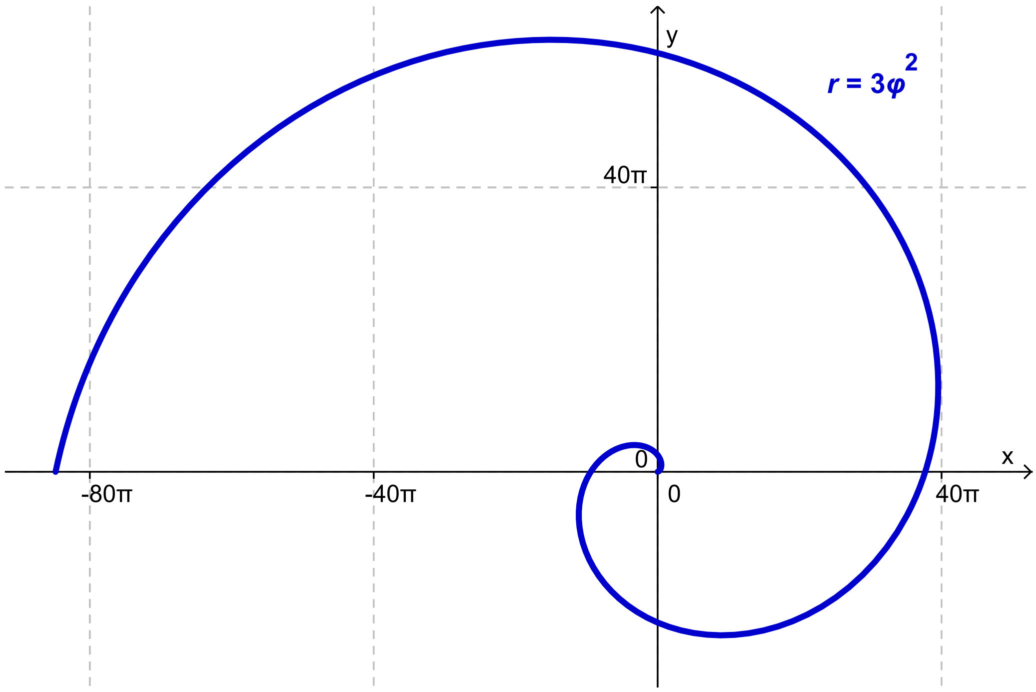
(a) Az $r = 4\varphi$ archimedesi spirális grafikonja, ha $\varphi \in [0, 4\pi]$:



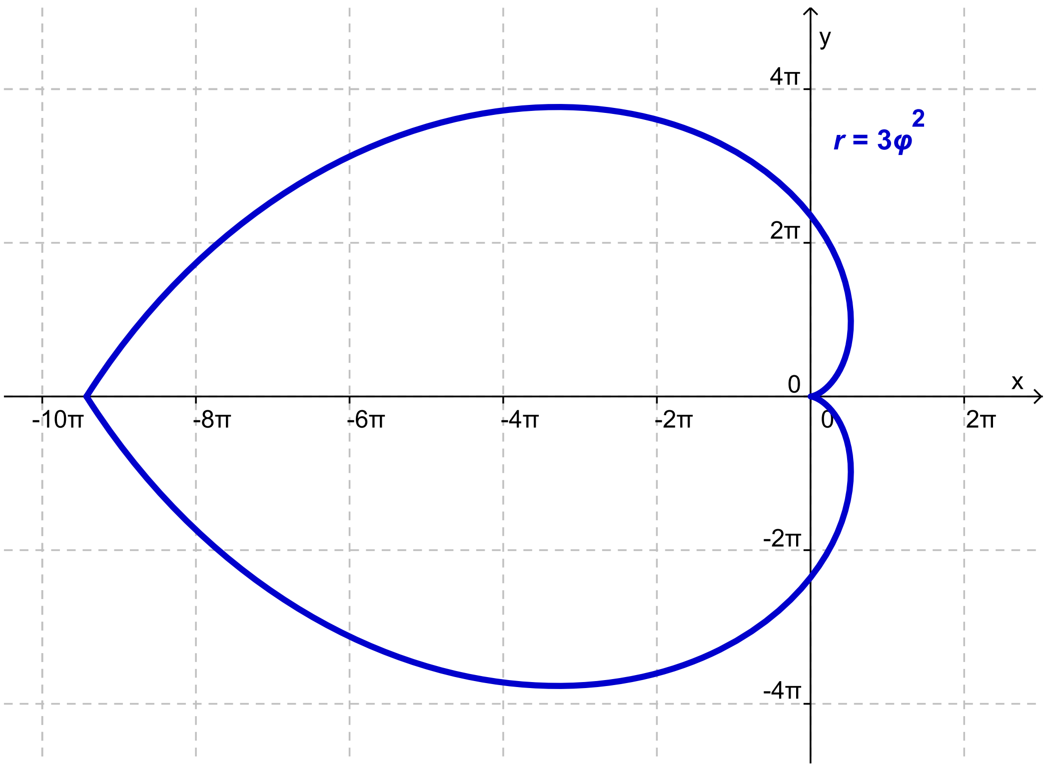
Jól látható, hogy minden görbepontnál a rádiuszvektor hossza (r) arányos a polárszöggel (φ). Ha $\varphi < 0$ esetében negatív rádiuszvektorokat is megengedünk, akkor a görbe két ága a $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ egyenesre vonatkozólag egymásnak tükörképe. Az $r = 4\varphi$ archimedesi spirális grafikonja, ha $\varphi \in [-4\pi, 4\pi]$:



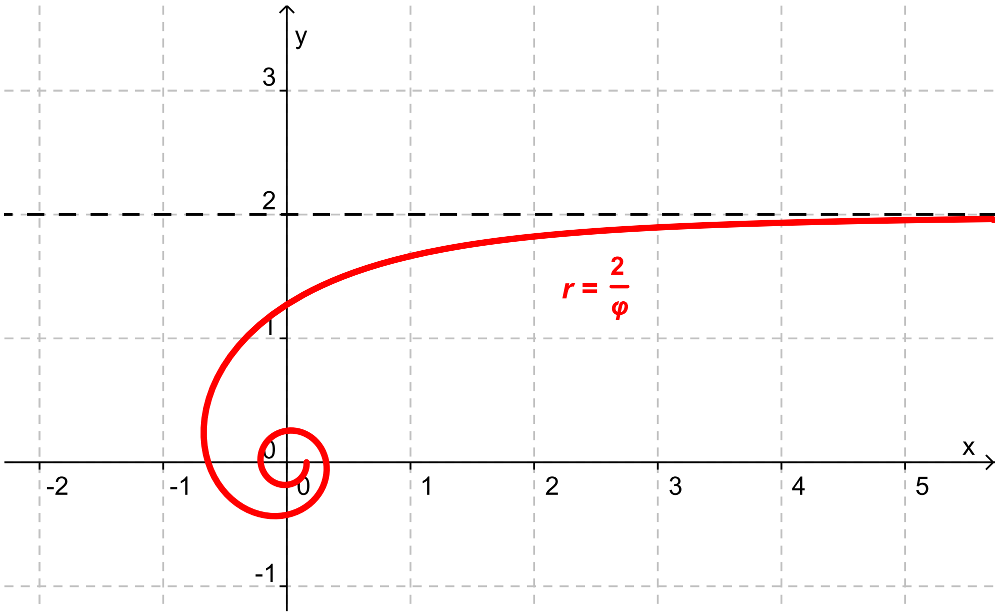
(b) Az $r = 3\varphi^2$ spirális grafikonja, ha $\varphi \in [0, 3\pi]$:



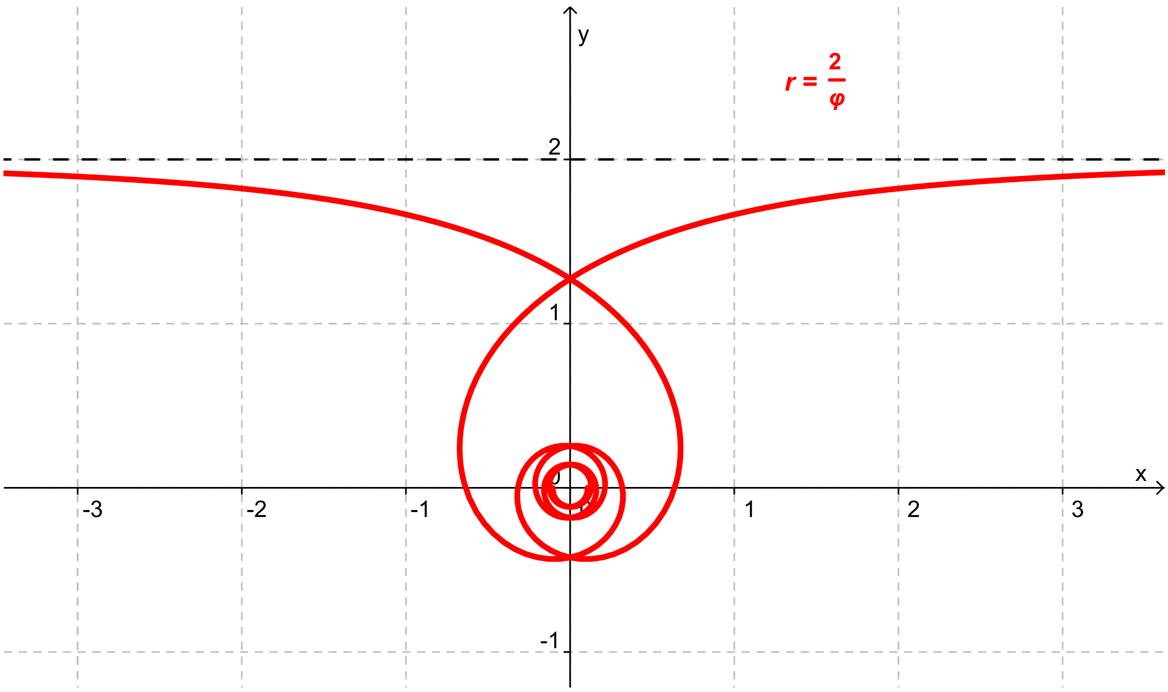
A $\varphi < 0$ esetekben $r = 3\varphi^2$ miatt a rádiuszvektor értéke pozitív lesz, a görbe két ága a polártengely egyenesére vonatkozólag egymásnak tükörképe.Az $r = 3\varphi^2$ spirális grafikonja, ha $\varphi \in [-\pi, \pi]$:



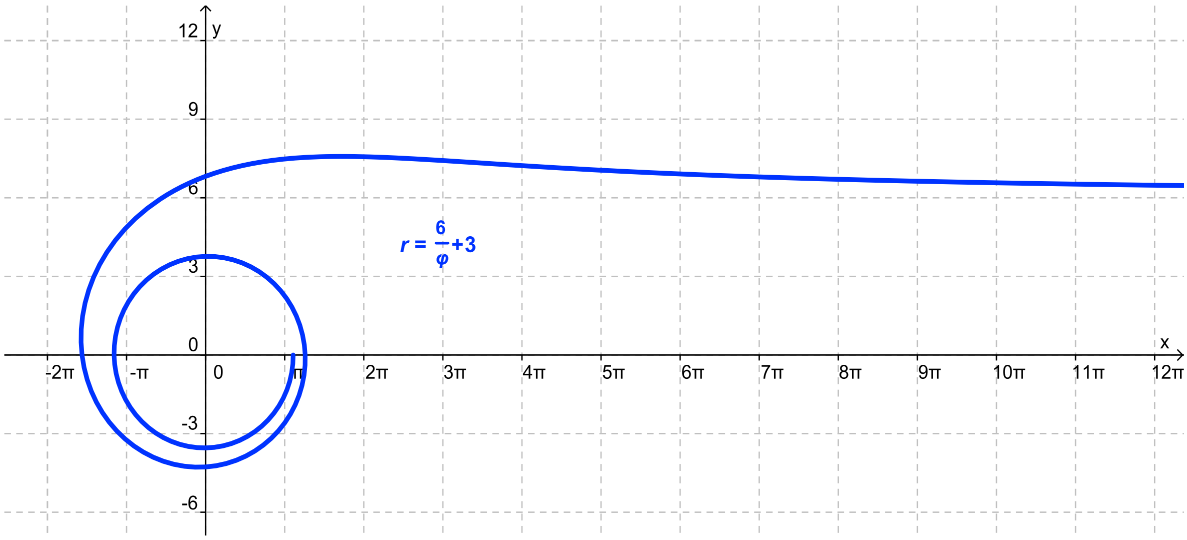
(c) Az $r = \dfrac{2}{\varphi}$ hiperbolikus spirális grafikonja, ha $\varphi \in [0, 4\pi]$:



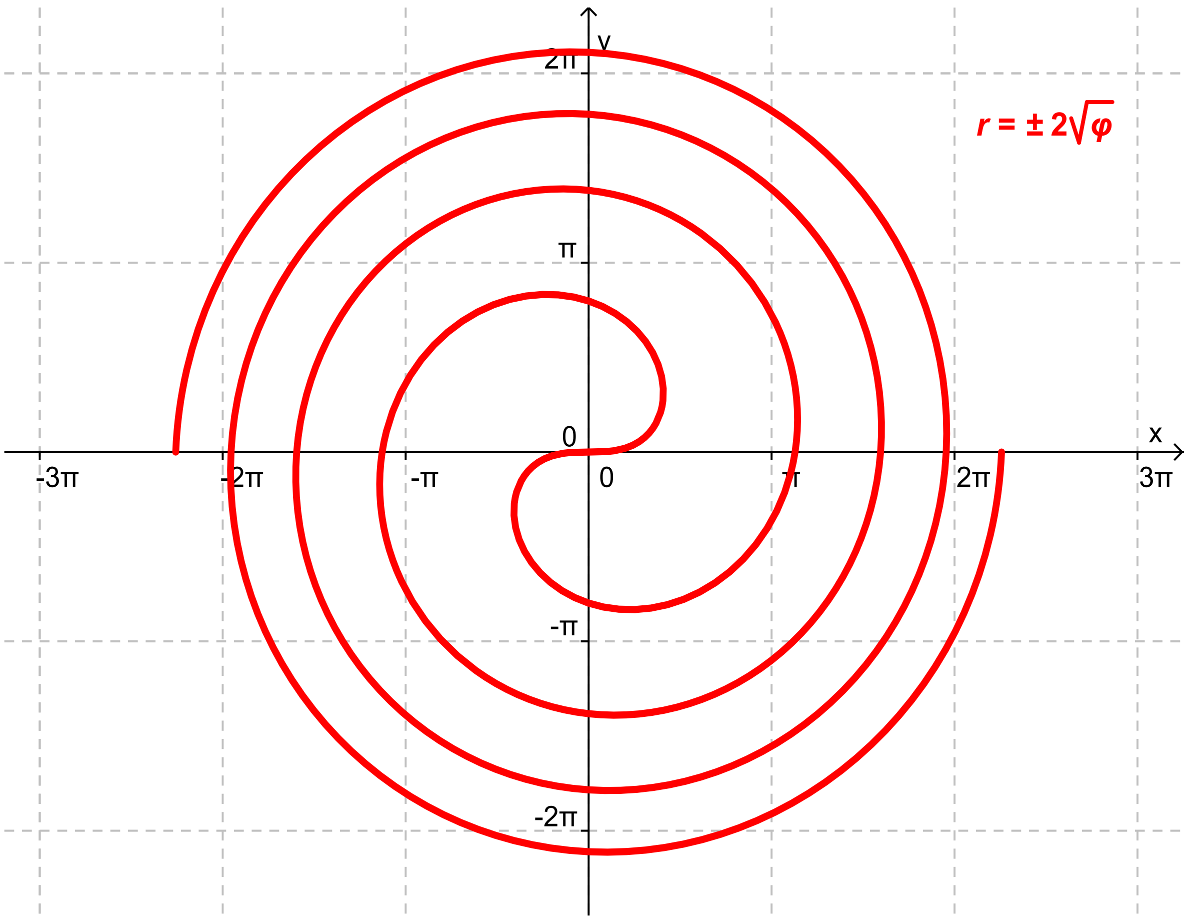
Az $r = \dfrac{2}{\varphi}$ hiperbolikus spirális aszimptotája az $y = 2$ egyenes. Ha $\varphi < 0$ esetében negatív rádiuszvektorokat is megengedünk, akkor a görbe két ága a $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ egyenesre vonatkozólag egymásnak tükörképe. Ha $|\varphi|$ értéke minden határon túl nő, akkor a két ág egyre többször csavarodik a pólus körül. Az $\dfrac{2}{\varphi}$ hiperbolikus spirális grafikonja, ha $\varphi \in [-6\pi, 6\pi]$:



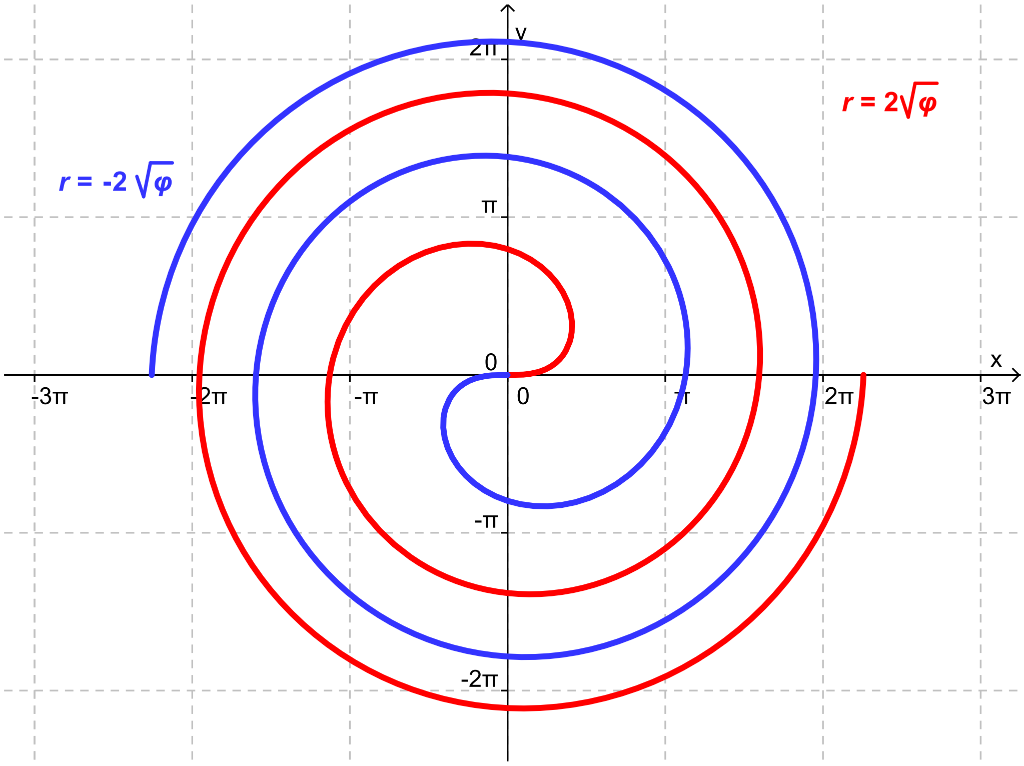
(d) Az $r = \dfrac{6}{\varphi} + 3$ spirális grafikonja, ha $\varphi \in [0, 4\pi]$:



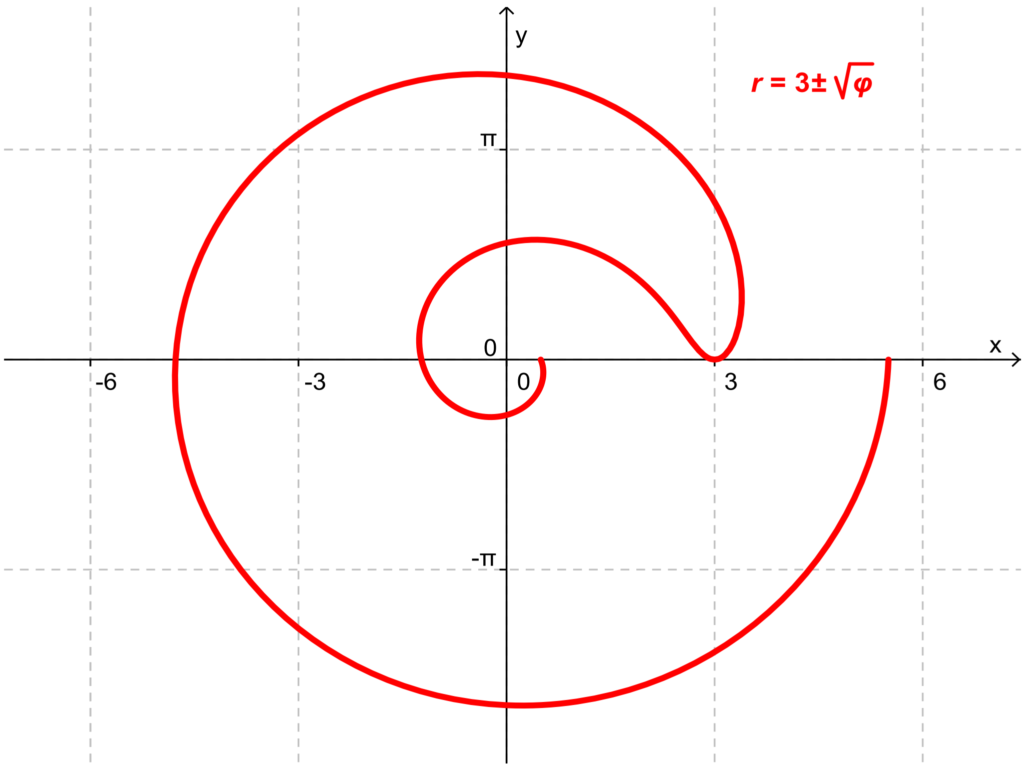
(e) Az $r = \pm 2\sqrt{\varphi}$ parabolikus spirális (Fermat-féle spirál) grafikonja, ha $\varphi \in [0, 4\pi]$:



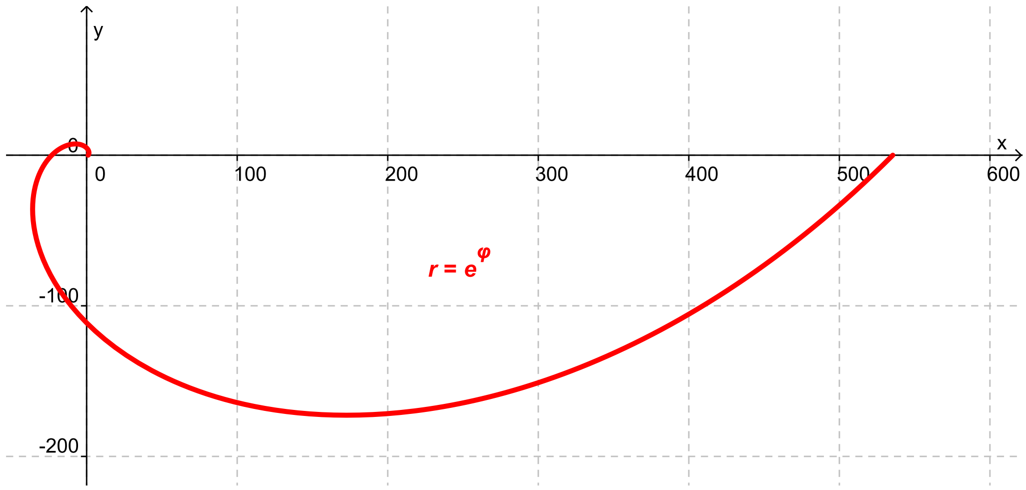
A parabolikus spirális két görbére bontható fel, az $r = 2\sqrt{\varphi}$ és az $r = -2\sqrt{\varphi}$ spirálisok egymásra középpontosan tükrösek az origóra nézve:



(f) Az $r = 3 \pm \sqrt{\varphi}$ spirális grafikonja, ha $\varphi \in [0, 2\pi]$:

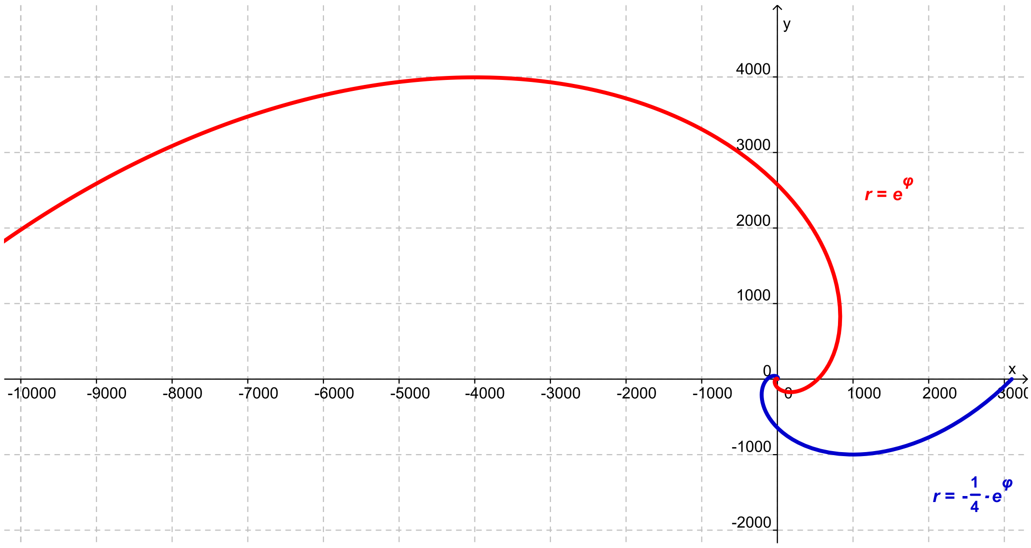


(g) Az $r = e^{\varphi}$ logaritmikus spirális grafikonja, ha $\varphi \in [0, 2\pi]$:



Az origó aszimptotikus pont.

(g) Az $r = e^{\varphi}$ és az $r = -\dfrac{1}{4}e^{\varphi}$ logaritmikus spirálisok grafikonja, ha $\varphi \in [0, 3\pi]$:



Az origó aszimptotikus pont.

2.1.17. Az $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - y^2 = x^2 + 2xy$ egyenlet ekvivalens az

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = (x^2 + y^2) + 2xy$$

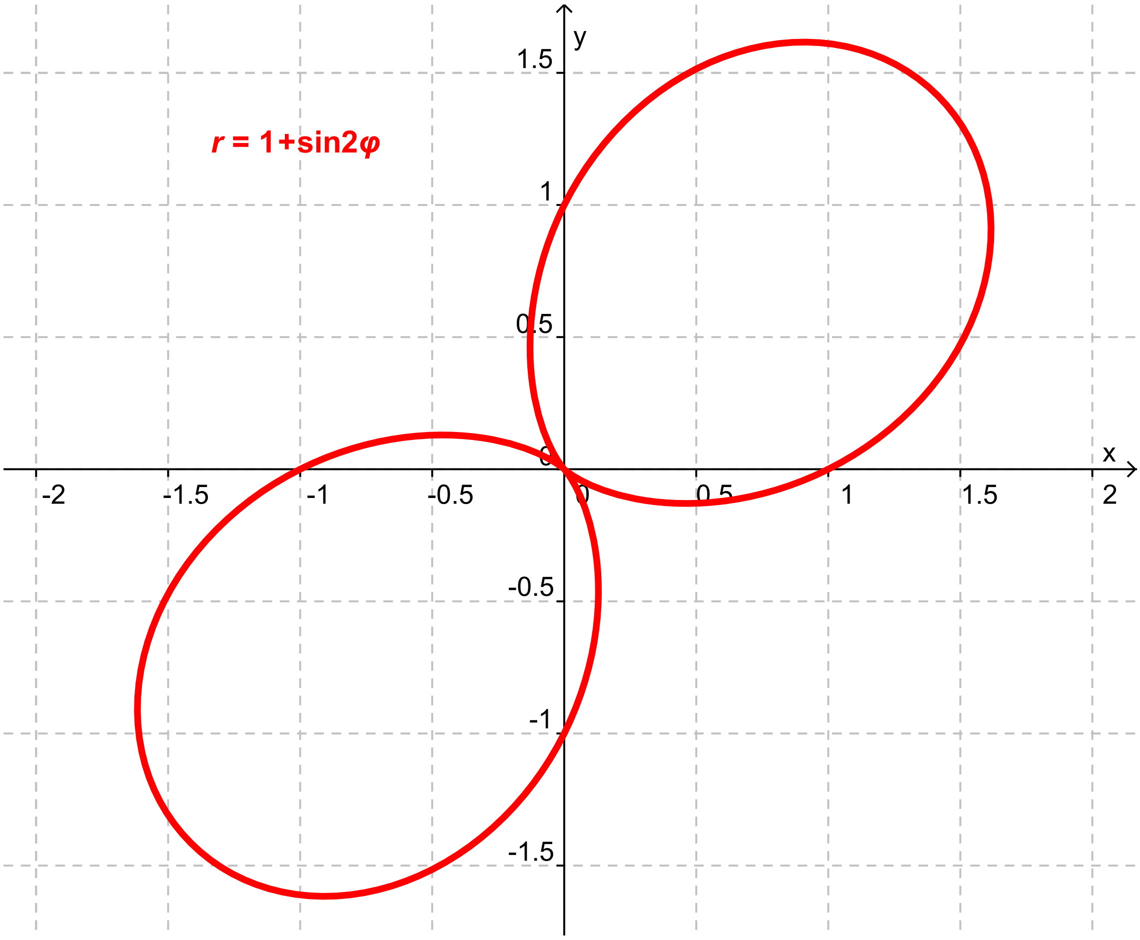
egyenlettel, amelyre alkalmazzuk a két koordinára-rendszer közötti összefüggéseket, így

$$r^3 = r^2 + 2r^2 \cos\varphi \sin\varphi$$

adódik. A kapott egyenlet mindkét oldalát osszuk el r^2-tel és alkalmazzuk a megfelelő trigonometrikus azonosságot! Ekkor az

$$r = 1 + \sin 2\varphi$$

poláregyenletet kapjuk. Mivel $-1 \leq \sin 2\varphi \leq 1$, így $0 \leq r \leq 2$. A görbe grafikonja:



2.1.18. Nyilvánvaló, hogy a $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ egyenes és az $r = 5\varphi$ archimedesi spirális metszéspontjai az

$$\left(\frac{5\pi}{3} + 5k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

polárkoordinátás megadású pontok.

2.1.19. Az $r = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}(1 - \cos\varphi)$ kardioid és az $r = 4\sin\varphi$ kör metszéspontjainak meghatározásához első lépésként szorozzuk meg mindkét egyenletet r-rel. Ekkor

$$r^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}(r - r\cos\varphi) \qquad \text{és} \qquad r^2 = 4r\sin\varphi$$

adódik. Vagyis a

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}(r - r\cos\varphi) = 4r\sin\varphi$$

egyenletet kell megoldanunk. Osszuk el mindkét oldalt $\frac{4\sqrt{3}}{3}$-mal és térjünk át Descartes-féle derékszögű koordinátákra! Ekkor a

$$\sqrt{x^2+y^2}-x=\sqrt{3}y$$

egyenlet adódik, ami ekvivalens az

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3}y+x$$

egyenlettel. Emeljük négyzetre a kapott egyenlet mindkét oldalát! Így

$$x^2+y^2=3y^2+x^2+2\sqrt{3}xy,$$

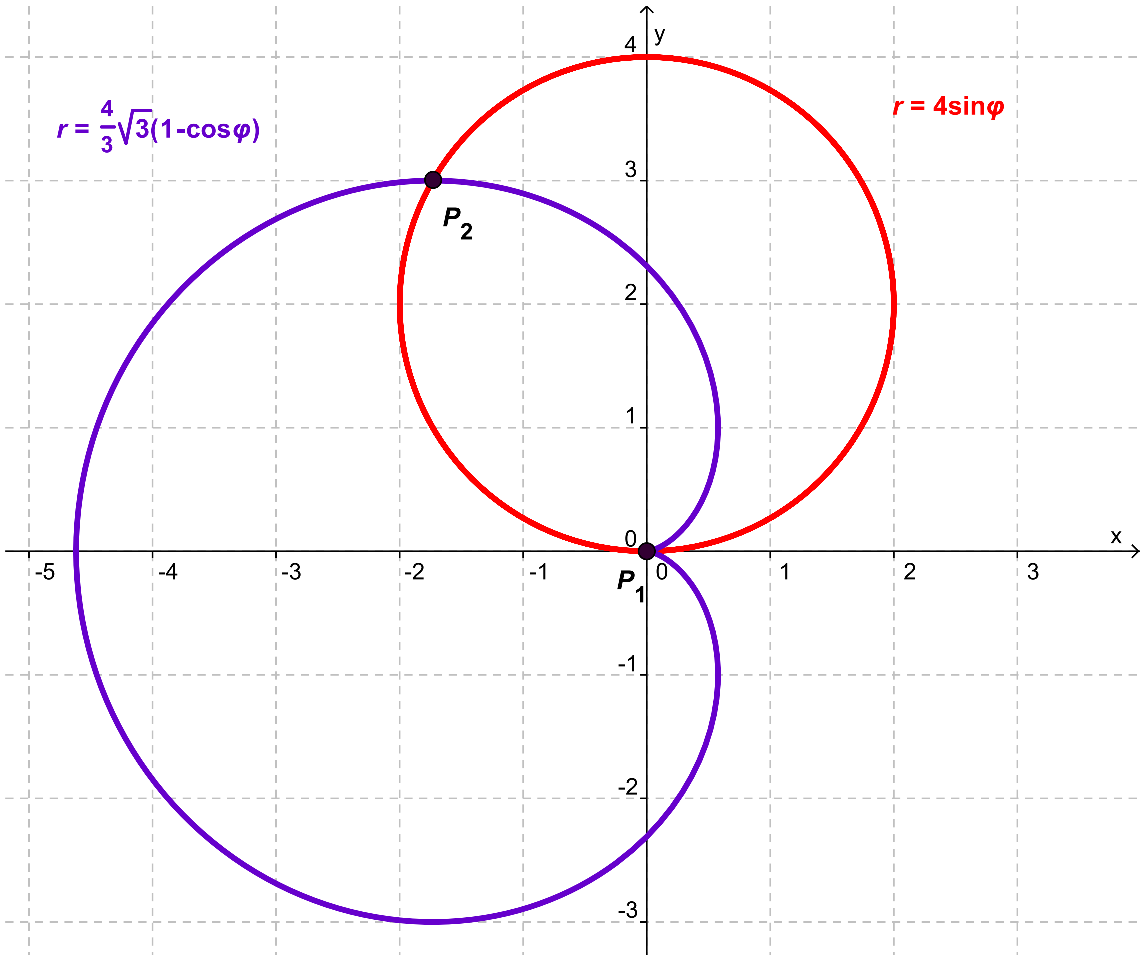
azaz

$$2y(y+\sqrt{3}x)=0$$

adódik. Vagyis

$$y=0 \qquad \text{vagy} \qquad y+\sqrt{3}x=0.$$

Ha $y=0$, akkor azonnal adódik, hogy $x=0$ is fennáll, tehát az egyik közös pont az origó (P_1).



A másik közös pontot az $y + \sqrt{3}x = 0$ összefüggésből kapjuk, ugyanis ekkor

$$\frac{y}{x} = -\sqrt{3},$$

azaz, visszatérve poláris koordinátákra

$$\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3},$$

ahonnan $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Ekkor

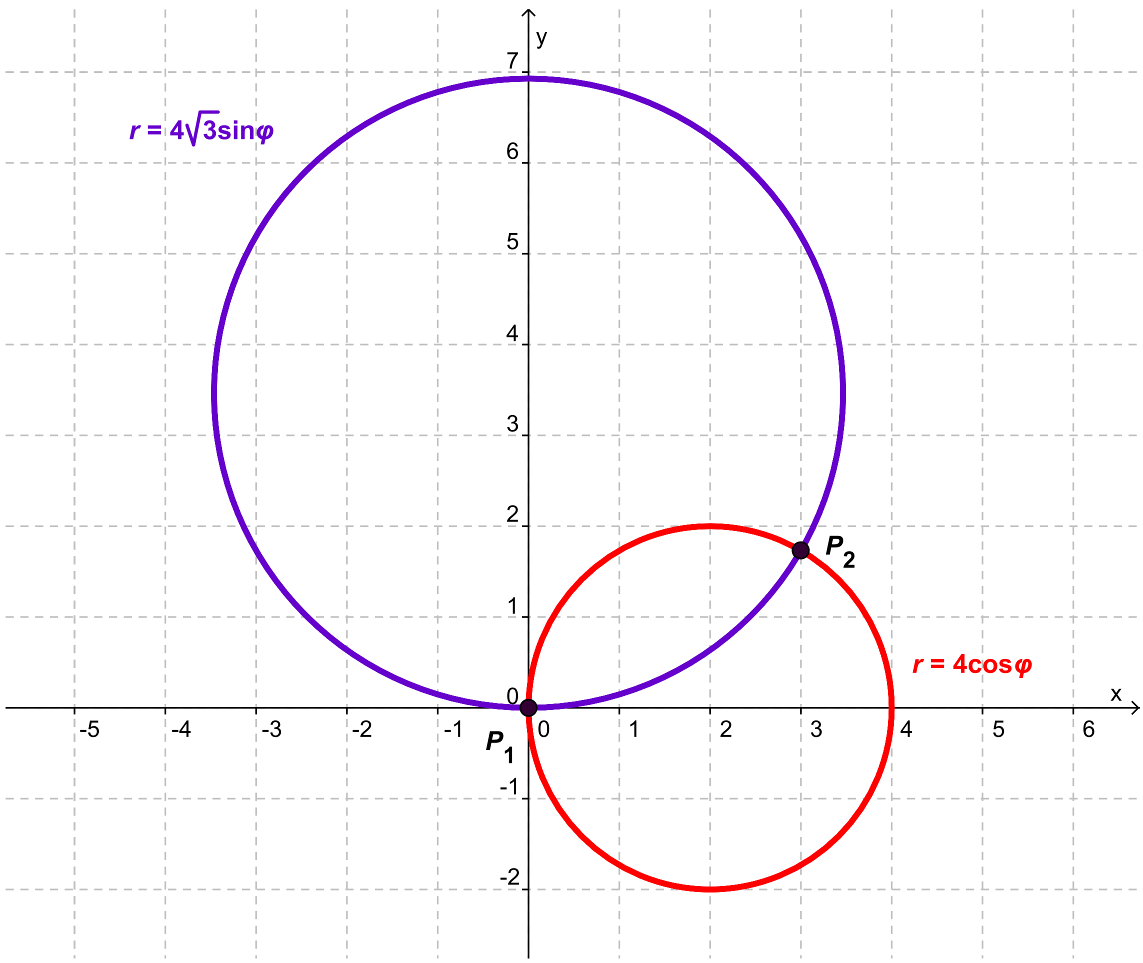
$$r = 4 \sin \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}.$$

A másik közös pont tehát a

$$P_2 \left(2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3} \right)$$

polárkoordinátás megadású pont.

2.1.20. Az $r = 4\sqrt{3} \sin \varphi$ és az $r = 4 \cos \varphi$ görbék egymást metsző körök:



Az egyik metszéspont az origó (P_1). A másik metszéspontot akkor kapjuk, ha megoldjuk az

$$\begin{cases} r = 4\sqrt{3}\sin\varphi, \\ r = 4\cos\varphi \end{cases}$$

egyenletrendszert. Ekkor

$$4\sqrt{3}\sin\varphi = 4\cos\varphi,$$

azaz

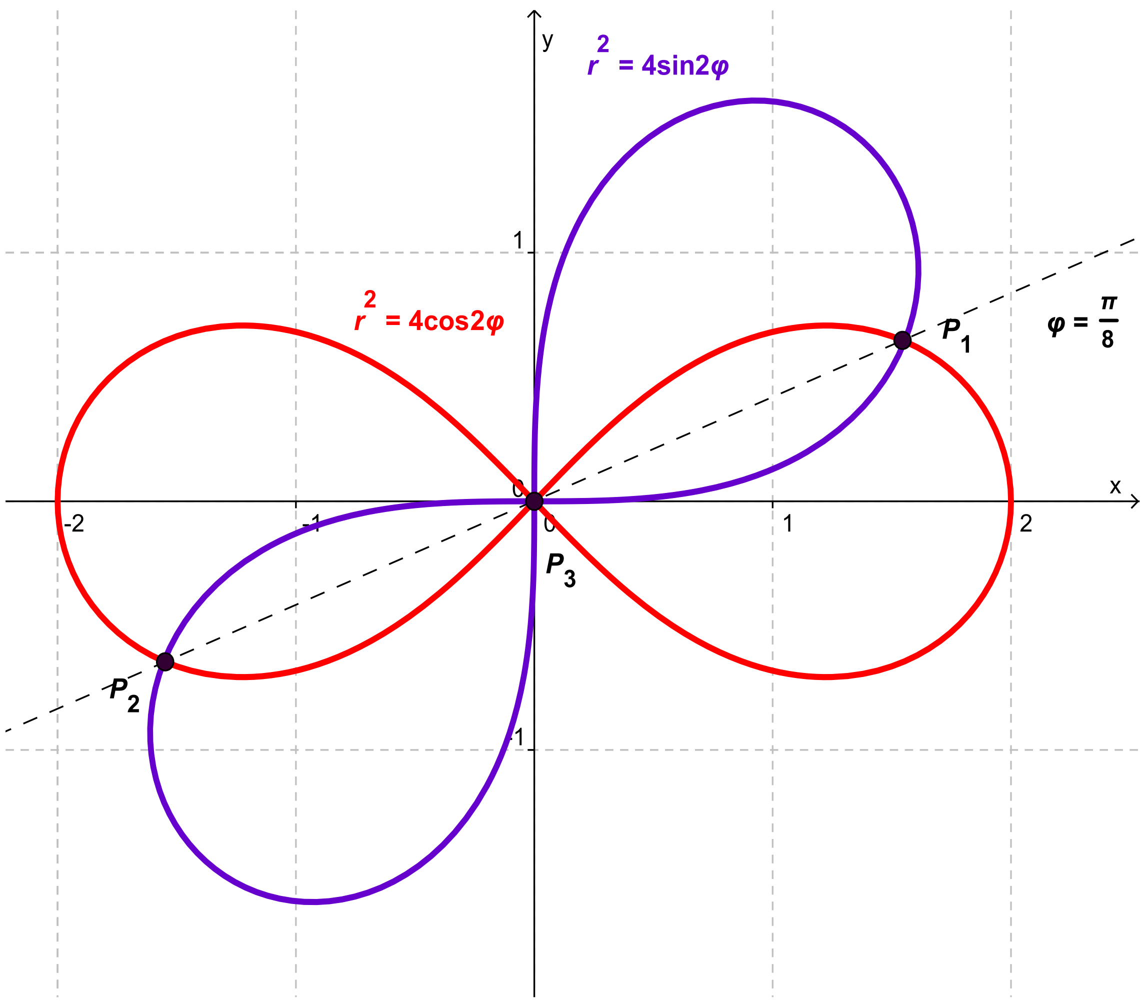
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A keresett szög tehát $\varphi = \frac{\pi}{6}$. A másik metszéspont ennek megfelelően a

$$P_2\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$$

polárkoordinátás megadású pont.

2.1.21. Az $r^2 = 4\cos 2\varphi$ és az $r^2 = 4\sin 2\varphi$ görbék egymást metsző lemniszkáták:



A metszéspontok meghatározásához a

$$4\cos 2\varphi = 4\sin 2\varphi,$$

vagyis a
$$\operatorname{tg} 2\varphi = 1$$
egyenletet kell megoldani. Ekkor
$$2\varphi = \frac{\pi}{4} \qquad \text{vagy} \qquad 2\varphi = \frac{5\pi}{4}.$$
Ez utóbbi nem lehetséges ebben az esetben, mert
$$4\cos\frac{5\pi}{4} < 0.$$
Vagyis $\varphi = \dfrac{\pi}{8}$ és
$$r^2 = 4\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = 2\sqrt{2},$$
azaz
$$r_{1,2} = \pm\sqrt{2\sqrt{2}}.$$
Eddig tehát két metszéspontunk van:
$$P_1\left(\sqrt{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{8}\right) \qquad \text{és} \qquad P_2\left(-\sqrt{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{8}\right).$$
Vegyük észre, hogy mindkét görbe áthalad az origón, ez a harmadik metszéspont:
$$P_3(0,0).$$

3.4 Polárkoordinátás alakban adott függvény differenciálása

2.2.1. Ha $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$, akkor

(a) $\dfrac{dr}{d\varphi} = \dfrac{1}{2} \cdot (\cos 2\varphi)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin 2\varphi) \cdot 2 = -\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$

(b) $\dfrac{d^2r}{d\varphi^2} = -\dfrac{2\cos 2\varphi \cdot \sqrt{\cos 2\varphi} + \sin 2\varphi \cdot \dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}}{\cos 2\varphi} = -\dfrac{2\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi}{\sqrt{\cos^3 2\varphi}} = -\dfrac{1+\cos^2 2\varphi}{\sqrt{\cos^3 2\varphi}}.$

(c) $\dfrac{d^3r}{d\varphi^3} = \dfrac{\sin 2\varphi\,(\cos^2 2\varphi - 3)}{\sqrt{\cos^5 2\varphi}}.$

(d) $\dfrac{dr}{d\varphi}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{3}}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}.$

(e) Nincs értelmezve.

(f) $\dfrac{d^3r}{d\varphi^3}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{11\sqrt{6}}{2}.$

2.2.2. Ha $r = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$, akkor

$$\frac{dr}{d\varphi} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[-\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Tehát:

(a) $\frac{dr}{d\varphi}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}.$

(b) $\frac{dr}{d\varphi}(2\pi) = \frac{1}{2}\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right)\right] = \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$

2.2.3. A $\frac{dy}{dx}$ derivált előállításához írjuk fel az $r = 1+\cos\varphi$ kardioid paraméteres egyenletrendszerét!

$$\begin{cases} x(\varphi) = (1+\cos\varphi)\cdot\cos\varphi, \\ y(\varphi) = (1+\cos\varphi)\cdot\sin\varphi, \end{cases} \qquad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Ekkor

$$\frac{dy}{d\varphi} = \cos\varphi - \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = \cos\varphi + \cos 2\varphi \qquad \text{és} \qquad \frac{dx}{d\varphi} = -\sin\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi = -(\sin\varphi + \sin 2\varphi).$$

A láncszabály alapján:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{\sin\varphi + \sin 2\varphi}.$$

Ha $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$, akkor

$$\frac{dy}{dx}(\varphi_0) = \frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = -1.$$

2.2.4. A $\frac{dy}{dx}$ derivált előállításához írjuk fel az $r = \frac{4}{1-\cos\varphi}$ parabola paraméteres egyenletrendszerét!

$$\begin{cases} x(\varphi) = \dfrac{4}{1-\cos\varphi}\cdot\cos\varphi, \\ y(\varphi) = \dfrac{4}{1-\cos\varphi}\cdot\sin\varphi, \end{cases} \qquad 1 - \cos\varphi \neq 0.$$

Ekkor

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{4(\cos\varphi - 1)}{(1-\cos\varphi)^2} \qquad \text{és} \qquad \frac{dx}{d\varphi} = \frac{-4\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}$$

A láncszabály alapján:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Ha $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$, akkor
$$\frac{dy}{dx}(\varphi_0) = \frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Tehát az érintő meredeksége a $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ pontban $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.2.5. A feladat megoldásához felhasználjuk, hogy az $r = \frac{4}{1 - \cos\varphi}$ parabolára
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}$$
teljesül (lásd **2.2.4.** feladat megoldása). Most azt a pontot keressük a parabolán, ahol az érintő meredeksége 1, vagyis azt a φ_0 radiánban megadott szöget, amelyre
$$1 = \frac{dy}{dx}(\varphi_0) = \frac{1 - \cos\varphi_0}{\sin\varphi_0}$$
fennáll. Könnyen látható, hogy a feladat feltételei mellett csak a $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ megoldás adódik a felírt trigonometrikus egyenletre. Ekkor
$$r_0 = \frac{4}{1 - \cos\varphi_0} = \frac{4}{1 - \cos\frac{\pi}{2}} = 4.$$

A keresett pont tehát a
$$P\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$$
polárkoordinátás megadású pont.

2.2.6. A $\frac{dy}{dx}$ derivált előállításához írjuk fel az $r = 3\varphi$ archimedesi spirális paraméteres egyenletrendszerét!
$$\begin{cases} x(\varphi) = 3\varphi\cos\varphi, \\ y(\varphi) = 3\varphi\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Ekkor
$$\frac{dy}{d\varphi} = 3\sin\varphi + 3\varphi\cos\varphi \qquad \text{és} \qquad \frac{dx}{d\varphi} = 3\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi.$$

A láncszabály alapján:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}.$$

Ha $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$, akkor

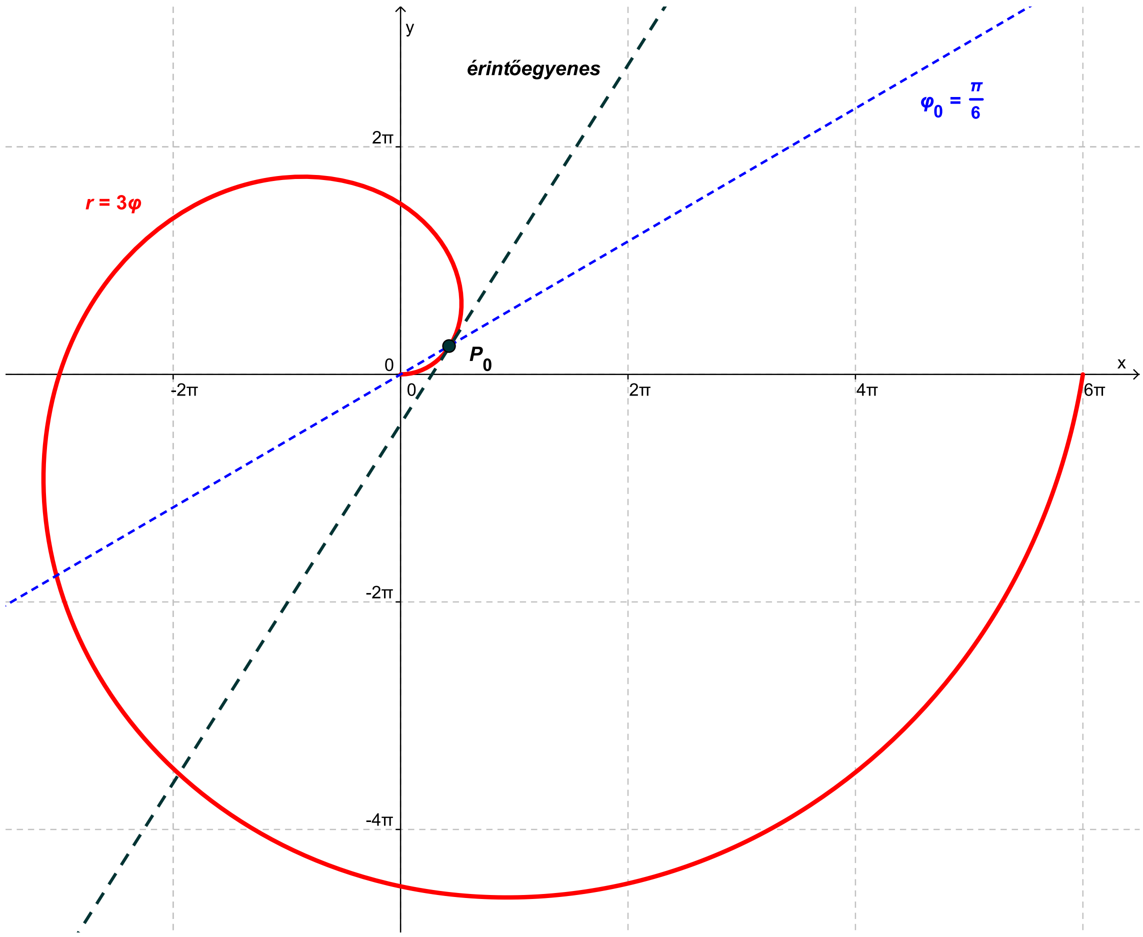
$$x_0 = x(\varphi_0) = 3\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \qquad \text{és} \qquad y_0 = y(\varphi_0) = 3\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4},$$

továbbá

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{6+\sqrt{3}\pi}{6\sqrt{3}-\pi}.$$

A keresett érintőegyenes egyenlete:

$$y = \frac{6+\sqrt{3}\pi}{6\sqrt{3}-\pi}\left(x - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}.$$



2.2.7. A $\dfrac{dy}{dx}$ derivált előállításához írjuk fel az $r = e^{3\varphi}$ logarimikus spirális paraméteres egyenletrendszerét!

$$\begin{cases} x(\varphi) = e^{3\varphi}\cos\varphi, \\ y(\varphi) = e^{3\varphi}\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$\frac{dy}{d\varphi} = 3e^{3\varphi}\sin\varphi + e^{3\varphi}\cos\varphi \qquad \text{és} \qquad \frac{dx}{d\varphi} = 3e^{3\varphi}\cos\varphi - e^{3\varphi}\sin\varphi.$$

A láncszabály alapján:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{3\sin\varphi + \cos\varphi}{3\cos\varphi - \sin\varphi}.$$

Ha $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$, akkor

$$x_0 = x(\varphi_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{és} \qquad y_0 = y(\varphi_0) = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}},$$

továbbá

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}}{3\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}.$$

A keresett érintőegyenes egyenlete:

$$y = \frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}.$$

2.2.8. A $\frac{dy}{dx}$ derivált előállításához írjuk fel az $r = \frac{4}{4-\cos\varphi}$ ellipszis paraméteres egyenletrendszerét!

$$\begin{cases} x(\varphi) = \dfrac{4}{4-\cos\varphi}\cdot\cos\varphi, \\ y(\varphi) = \dfrac{4}{4-\cos\varphi}\cdot\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{4(4\cos\varphi - 1)}{(4-\cos\varphi)^2} \qquad \text{és} \qquad \frac{dx}{d\varphi} = \frac{-16\sin\varphi}{(4-\cos\varphi)^2}.$$

A láncszabály alapján:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1-4\cos\varphi}{4\sin\varphi}.$$

Ha $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$, akkor

$$x_0 = x(\varphi_0) = \frac{4}{4-\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{4}{7} \qquad \text{és} \qquad y_0 = y(\varphi_0) = \frac{4}{4-\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

továbbá

$$\frac{dy}{dx}(\varphi_0) = \frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1-4\cos\frac{\pi}{3}}{4\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Tehát az érintő meredeksége az ellipszis $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ pontjában, vagyis a $P_0\left(\frac{4}{7}, \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ pontban $\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$. Az érintőegyenes Descartes-koordinátás egyenlete:

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(x - \frac{4}{7}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

A polárkoordinátás egyenlet felírásához alkalmazzuk a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket! Az

$$r \sin\varphi = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(r\cos\varphi - \frac{4}{7}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

egyenlet ekvivalens az

$$r = \frac{4}{\cos\varphi + 2\sqrt{3}\sin\varphi}$$

egyenlettel, amely az érintőegyenes polárkoordinátás egyenlete.

2.2.9. A $\frac{dy}{dx}$ derivált előállításához írjuk fel az $r = \frac{1}{\varphi}$ hiperbolikus spirális paraméteres egyenletrendszerét!

$$\begin{cases} x(\varphi) = \dfrac{1}{\varphi}\cdot\cos\varphi, \\[2mm] y(\varphi) = \dfrac{1}{\varphi}\cdot\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Ekkor

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{\varphi\cos\varphi - \sin\varphi}{\varphi^2} \qquad \text{és} \qquad \frac{dx}{d\varphi} = -\frac{\varphi\sin\varphi + \cos\varphi}{\varphi^2}.$$

A láncszabály alapján:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{\varphi\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

Ha $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, akkor

$$x_0 = x(\varphi_0) = 0 \qquad \text{és} \qquad y_0 = y(\varphi_0) = \frac{2}{\pi}$$

valamint

$$\frac{dy}{dx}(\varphi_0) = \frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

A normális meredeksége a $P_0\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ pontban:

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\pi}{2}.$$

A normális Descartes-koordinátás egyenlete:

$$y = -\frac{\pi}{2}x + \frac{2}{\pi}.$$

A polárkoordinátás egyenlet felírásához alkalmazzuk a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket! Az

$$r\sin\varphi = -\frac{\pi}{2}r\cos\varphi + \frac{2}{\pi}$$

egyenlet ekvivalens az

$$r = \frac{4}{\pi^2\cos\varphi + 2\pi\sin\varphi}$$

egyenlettel, amely a P_0 ponthoz húzott normális egyenes polárkoordinátás egyenlete.

2.2.10. Első lépésként írjuk fel az $r = \sin 2\varphi$ görbéhez a $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ pontba húzott érintőegyenes egyenletét! A $\frac{dy}{dx}$ derivált előállításához írjuk fel az $r = \sin 2\varphi$ görbe (négyes rozetta) paraméteres egyenletrendszerét!

$$\begin{cases} x(\varphi) = \sin 2\varphi \cdot \cos\varphi, \\ y(\varphi) = \sin 2\varphi \cdot \sin\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$\frac{dy}{d\varphi} = 2\cos 2\varphi\sin\varphi + \sin 2\varphi\cos\varphi \qquad \text{és} \qquad \frac{dx}{d\varphi} = 2\cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi.$$

A láncszabály alapján:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\cos 2\varphi\sin\varphi + \sin 2\varphi\cos\varphi}{2\cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi}.$$

Ha $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$, akkor

$$x_0 = x(\varphi_0) = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} \qquad \text{és} \qquad y_0 = y(\varphi_0) = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

továbbá

$$\frac{dy}{dx}(\varphi_0) = \frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Tehát az érintő meredeksége a görbe $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ pontjában, vagyis a $P_0\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ pontban $\frac{5}{\sqrt{3}}$. Az érintőegyenes Descartes-koordinátás egyenlete:

$$y = \frac{5}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4},$$

azaz

$$y = \frac{5}{\sqrt{3}}x - \sqrt{3}.$$

Második lépésként keressük meg a két egyenes metszéspontját! A $\varphi = 0$ egyenes éppen az x-tengely, azaz Descartes-koordinátás egyenlete $y = 0$. Megoldva az

$$\begin{cases} y = \frac{5}{\sqrt{3}}x - \sqrt{3}, \\ y = 0 \end{cases}$$

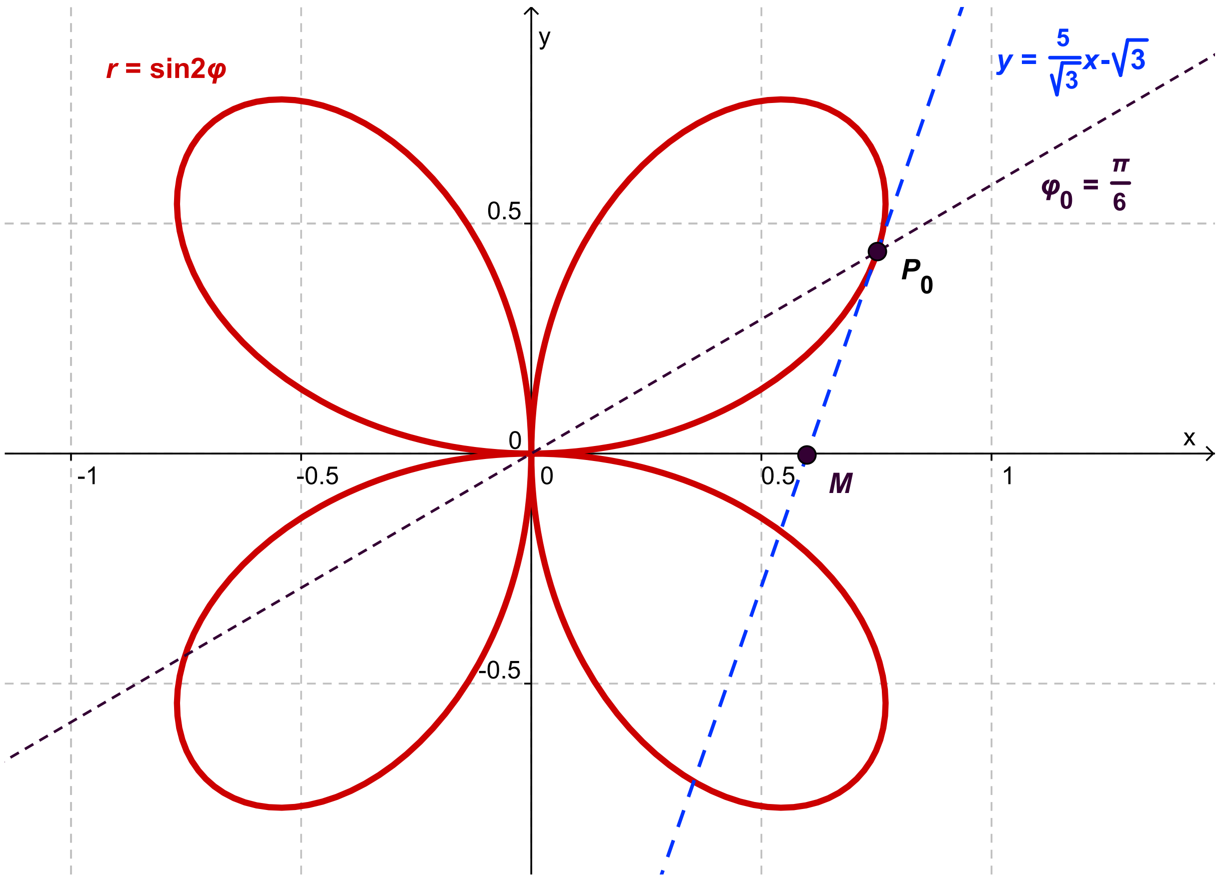
egyenletekből álló egyenletrendszert, azaz a

$$\frac{5}{\sqrt{3}}x - \sqrt{3} = 0$$

egyenletet, $x = \frac{3}{5}$ adódik. A két egyenes tehát az

$$M\left(\frac{3}{5}, 0\right)$$

pontban metszi egymást.



2.2.11. A feladatra két megoldást adunk.

I. megoldás:

Első lépésként írjuk fel az $r = 1 - \cos\varphi$ görbe (kardioid) paraméteres egyenletrendszerét!

$$\begin{cases} x(\varphi) = (1-\cos\varphi)\cdot\cos\varphi, \\ y(\varphi) = (1-\cos\varphi)\cdot\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$\frac{dy}{d\varphi} = \cos\varphi + \sin^2\varphi - \cos^2\varphi = \cos\varphi - \cos 2\varphi \qquad \text{és} \qquad \frac{dx}{d\varphi} = -\sin\varphi + 2\cos\varphi\sin\varphi = -\sin\varphi + \sin 2\varphi$$

A láncszabály alapján:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\cos\varphi - \cos 2\varphi}{-\sin\varphi + \sin 2\varphi}.$$

Ha $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos\varphi_0 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{és} \qquad \sin\varphi_0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

valamint

$$x_0 = x(\varphi_0) = (1-\cos\varphi_0)\cdot\cos\varphi_0 = 0 \qquad \text{és} \qquad y_0 = y(\varphi_0) = (1-\cos\varphi_0)\cdot\sin\varphi_0 = 1.$$

Továbbá

$$\frac{dy}{dx}(\varphi_0) = \frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi}{-\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi} = -1.$$

Tehát az érintő meredeksége a görbe $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ pontjában, vagyis a $P_0\,(0,1)$ pontban -1. Az érintőegyenes Descartes-koordinátás egyenlete:

$$y = -x + 1,$$

azaz

$$x + y = 1.$$

Az érintőegyenes egyenlete poláris koordinátákkal:

$$r(\cos\varphi + \sin\varphi) = 1.$$

II. megoldás:

Írjuk fel az $r = 1 - \cos\varphi$ görbe (kardioid) Descartes-koordinátás implicit egyenletét! Az $r = 1 - \cos\varphi$ egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg r-rel! Az

$$r^2 = r - r\cos\varphi$$

egyenlet esetén alkalmazzuk a két koordináta-rendszer közötti összefüggéseket! Ekkor az

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x$$

implicit alakú egyenlethez jutunk. Állítsuk elő az y' deriváltat ($y = y(x)$)! Alkalmazva a deriválási szabályokat az alábbi egyenlethez jutunk:

$$2x + 2yy' = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 2yy') - 1,$$

ahonnan

$$y' = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2x - 1}{2y - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

Ha $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$, akkor

$$x_0 = x(\varphi_0) = 0 \qquad \text{és} \qquad y_0 = y(\varphi_0) = 1,$$

azaz a $P_0(0, 1)$ pontbeli érintő egyenletét keressük. Az érintő meredeksége:

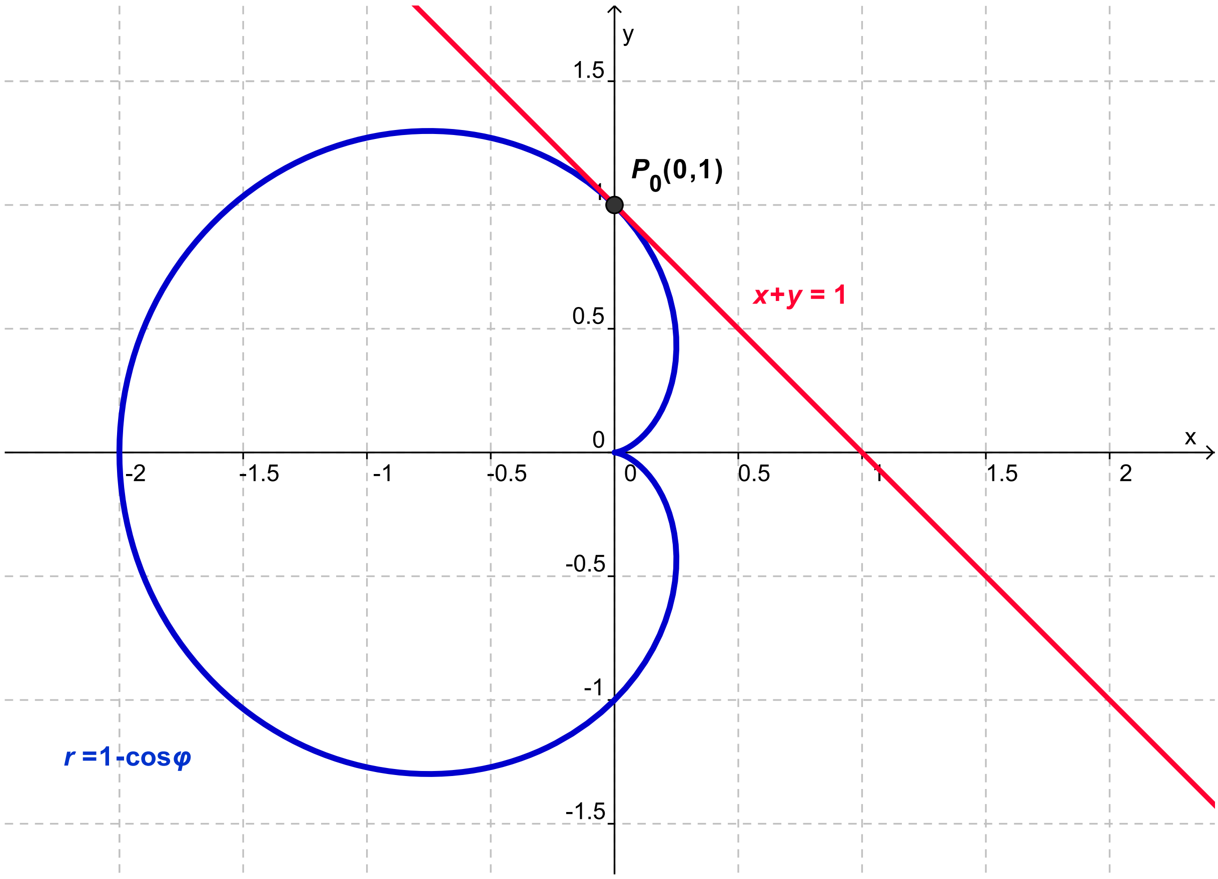
$$y'|_{P_0} = \frac{-1}{2-1} = -1.$$

Az érintőegyenes Descartes-koordinátás egyenlete:

$$y = -x + 1,$$

azaz

$$x + y = 1.$$



2.2.12. Először a vízszintes érintőket, vagyis az x-tengellyel párhuzamos érintőket keressük meg. Nyilvánvaló, hogy ezen érintők meredeksége 0. Írjuk fel az $r = 1+\sin\varphi$ görbe (kardioid) paraméteres egyenletrendszerét!

$$\begin{cases} x(\varphi) = (1+\sin\varphi)\cdot\cos\varphi, \\ y(\varphi) = (1+\sin\varphi)\cdot\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Ekkor

$$\frac{dy}{d\varphi} = \cos\varphi + 2\cos\varphi\sin\varphi = \cos\varphi + \sin 2\varphi \qquad \text{és} \qquad \frac{dx}{d\varphi} = -\sin\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi - \sin\varphi.$$

A láncszabály alapján:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\cos\varphi + \sin 2\varphi}{\cos 2\varphi - \sin\varphi}.$$

Azonnal adódik, hogy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\cos\varphi + \sin 2\varphi}{\cos 2\varphi - \sin\varphi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi + \sin 2\varphi = 0,$$

azaz

$$\cos\varphi(1 + 2\sin\varphi) = 0.$$

$\cos\varphi = 0$, ha

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{vagy} \qquad \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

A $P_1\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ polárkoordinátás megadású pontban van vízszintes érintő, ennek Descartes-koordinátás egyenlete $y = 2$. A $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ esetén a $\frac{dy}{dx}$ tört nevezője is zérus, így ezen a helyen nincs vízszintes érintő. A

$$2\sin\varphi = -1,$$

azaz

$$\sin\varphi = -\frac{1}{2}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi[$$

egyenlet gyökei:

$$\varphi_3 = \frac{7\pi}{6} \qquad \text{és} \qquad \varphi_4 = \frac{11\pi}{6}.$$

Vízszintes érintő húzható tehát a

$$P_3\left(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6}\right) \qquad \text{és} \qquad P_4\left(\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$$

polárkoordinátás megadású pontokban is a kardioidhoz. Mindkét érintő Descartes-koordinátás egyenlete

$$y = -\frac{1}{4}.$$

A függőleges, vagyis az y-tengellyel párhuzamos érintőket akkor kapjuk, ha a $\frac{dy}{dx}$ tört nevezője zérus, azaz

$$\cos 2\varphi - \sin\varphi = 0.$$

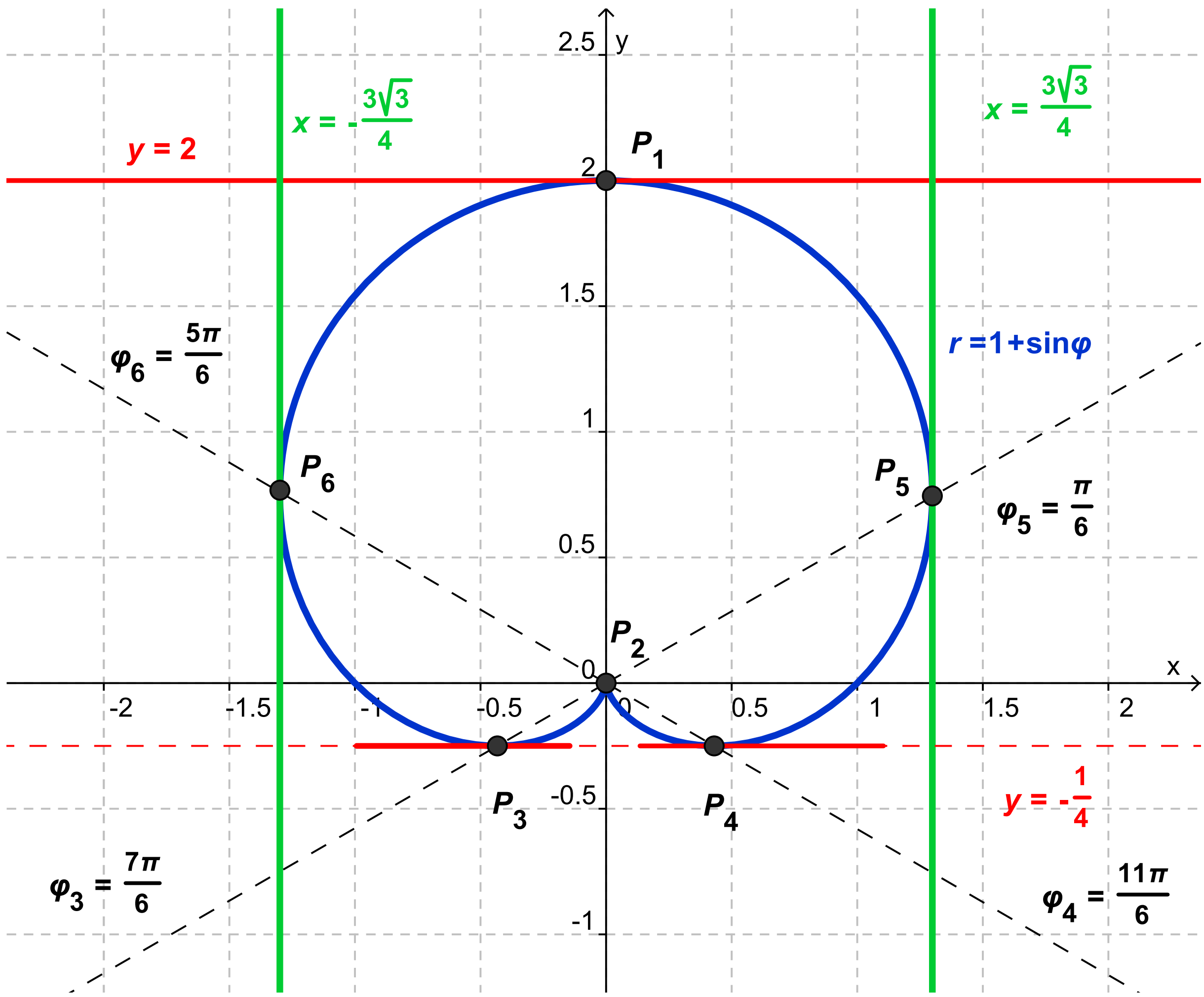
A trigonometrikus egyenletet megoldva megkapjuk a már ismert $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ gyököt (ekkor az érintő éppen az y-tengely), valamint a

$$\varphi_5 = \frac{\pi}{6} \qquad \text{és} \qquad \varphi_6 = \frac{5\pi}{6}$$

gyököket. Függőleges érintő tehát a

$$P_5\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}\right) \qquad \text{és} \qquad P_6\left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

polárkoordinátás megadású pontokban is húzható az $r = 1 + \sin\varphi$ kardioidhoz. A P_5 pontba húzott érintő Descartes-koordinátás egyenlete $x = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, a P_6 pontba húzott érintő Descartes-koordinátás egyenlete pedig $x = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$.



Irodalomjegyzék

[1] Császár Á.: *Valós analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[2] Denkinger G.: *Analízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[3] Denkinger G., Gyurkó L.: *Analízis gyakorlatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

[4] Dömötör F., Huszthy L., Raisz Péterné, Szalontai I., Tóth B.: *Egyváltozós függvények analízise*, Példatár, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 2009.

[5] Kelemen J.: *Matematika I.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

Debrecen, 2006.

[6] Kovács J., Takács G., Takács M.: *Analízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

[7] Mendelson E.: *Matematikai példatár az analízis témaköréből*, PANEM - McGRAW-HILL, Budapest, 1995.

[8] Monostori I. (szerk.): *Matematika példatár I-II. kötet (A matematika alapjai, Egyváltozós valós függvények)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[9] Rontó M., Lengyelné Szilágyi Sz.: *Kalkulus*, Elektronikus jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2011.