

Matematika I.

Feladatgyűjtemény

GEMAN011B

Anyagmérnök BSc szakos hallgatók részére



Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia
2016

1 A teljes indukció

1. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőségeket!

(a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1};$

(b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2);$

(c) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2};$

(d) $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3};$

(e) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2;$

(f) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2};$

(g) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1;$

(h) $1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + \dots + n! \cdot n = (n+1)! - 1;$

(i) $1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \dots - \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{n!}.$

2. Bizonyítsa be, hogy n darab egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2 + n + 2}{2}$ részre osztja!

3. Bizonyítsa be, hogy n darab kör a síkot legfeljebb $n^2 - n + 2$ részre osztja!

4. Adott n darab egyenes úgy, hogy bármely kettőnek van közös pontja. Bizonyítsa be, hogy akkor az egyenesek vagy mindannyian egy síkban vannak, vagy mindannyian egy ponton haladnak át!

2 A binomiális tétel

1. Mutassa meg, hogy $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ és $k \leq n$ esetén fennáll az

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

összefüggés!

2. Bizonyítsa be teljes indukcióval a Newton-féle binomiális tételt!

3. Hány kételemű részhalmaza van egy nyolc elemű halmaznak?

Megoldás: $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 28$

4. Hány 5 elemű részhalmaza van egy 10 elemű halmaznak?

Megoldás: $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$

5. Az $(1 + \sqrt{2})^n$ kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésének második tagja 110. Mekkora a kifejtés utolsó előtti tagja? (A hatványok binomiális tétel szerinti kifejtésében k -adik tagon ($k = 0, 1, \dots, n$) mindig azt a tagot értjük, amelynek együtthatója $\binom{n}{k}$.)

Megoldás:

A 2. tag:

$$\begin{aligned}\binom{n}{2}(\sqrt{2})^2 &= \binom{n}{2} \cdot 2 = 110 \\ \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot 2 &= 110 \\ n(n-1) &= 110 \\ n^2 - n - 110 &= 0 \\ n_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 440}}{2} = \frac{1 \pm 21}{2} \Rightarrow n = 11\end{aligned}$$

A másik gyök nem ad megoldást, mert negatív.

Az utolsó előtti tag:

$$\binom{n}{n-1}(\sqrt{2})^{n-1} = \binom{11}{10}(\sqrt{2})^{10} = 11 \cdot 2^5 = 352.$$

6. Fejtsse ki a binomiális tétel alapján az $(x^2 - 2y^3)^5$ hatványt!

7. Határozza meg az $\left(\frac{a}{x} - \sqrt{x}\right)^{16}$ hatvány binomiális tétel szerinti kifejtésének középső tagját!

8. Írja fel a $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ hatvány binomiális tétel szerinti kifejtésének negyedik tagját!

9. Számítsa ki a $(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x})^n$ hatványkitevőjét, ha a binomiális tétel szerinti kifejtésének második tagjában $\sqrt{x^5}$ szerepel!

10. Mekkora x értéke, ha a $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^6$ kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésének középső tagja $\frac{5}{9}$? Oldja meg a feladatot Pascal-háromszög felhasználásával is!

11. Számítsa ki az $E(x) = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{12}$ kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésének azon tagját, amely nem tartalmazza x -et!

12. Adott $F(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3} \right)^{17}$. Határozza meg binomiális tétel szerinti kifejtésének azon tagját, amelyik nem tartalmazza x -et!
13. A $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{x} \right)^{12}$ hatvány binomiális tétel szerinti kifejtésének hányadik tagjában lesz x együtthatója 7?
14. A $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}} \right)^{18}$ hatvány binomiális tétel szerinti kifejtésének hányadik tagjában lesz x és y kitevője egyenlő egymással?
15. Számítsa ki a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ összeget!
16. Az $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^m$ binomiális tétel szerinti kifejtésében az együtthatók összege 128. Írja fel a kifejtésnek azt a tagját, amelyben x ötödik hatványon szerepel!
17. Határozza meg az alábbi összegeket!
- $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n};$
 - $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n};$
 - $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \dots + (n+1)\binom{n}{n};$
 - $\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} + \dots + (n-1)\binom{n}{n}.$

3 Komplex számok

1. Határozza meg a $z = -1 + i$ komplex szám valós részét, képzetes részét, komplex konjugáltját, hosszát, trigonometrikus alakját!

Megoldás:

A $z = -1 + i$ komplex szám

valós része: $\operatorname{Re} z = a = -1;$

képzetes része: $\operatorname{Im} z = b = 1;$

konjugáltja: $\bar{z} = -1 - i;$

hossza: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2};$

argumentuma: $\cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4};$

trigonometrikus alakja: $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$

2. Írja fel algebrai alakban az alábbi komplex számokat és számítsa ki az abszolút értéket!

(a) $(1 + 2i)(1 - 2i)(3 + 4i)$;

(b) $\operatorname{Im}(1 - 2i)(3 + 4i)$;

(c) $\frac{2+i}{1-i} + \frac{2-i}{1+i} + i$;

(d) $\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^3$.

3. Írja át trigonometrikus alakba az alábbi komplex számokat!

(a) $1 + i$;

(b) $-\sqrt{3} - i$;

(c) $\frac{\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^4}{\left(\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^4}$;

(d) $\frac{(1+i)(-1-i\sqrt{3})}{3\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right)}$;

(e) $\frac{2}{(2-i)(\sqrt{8} + \sqrt{2}i)}$;

(f) $\sqrt{\frac{2i(1-i+i^2-i^5)}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}}$.

4. Végezze el az alábbi műveleteket! Az eredményt algebrai alakban adja meg!

(a) $i^{\frac{1}{2}}$;

(b) $(1+i)^7$;

(c) $1^{\frac{1}{5}}$;

(d) $\sqrt[3]{-8}$;

(e) $\sqrt[4]{\frac{-2-2i}{i}}$;

(f) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$;

(g) $(1+i)^5$;

(h) $\frac{\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^4 (2+2i)^2}{(i+1)}$;

(i) $\sqrt{3} - i$.

5. Oldja meg a $z^3 - 64i = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán! A megoldásokat írja fel algebrai alakban is!

Megoldás:

$$z^3 - 64i = 0,$$

azaz

$$z = \sqrt[3]{64i}.$$

Tehát a $64i$ -ből, mint komplex számból kell harmadik gyököt vonni.

$$r = 64 \quad \text{és} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ ezért}$$

$$z = \sqrt[3]{64i} = \sqrt[3]{64} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2$$

A gyökök:

$$k = 0, \quad z_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} + 2i;$$

$$k = 1, \quad z_2 = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -2\sqrt{3} + 2i;$$

$$k = 2, \quad z_3 = 4 \left(\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) = 4(0 - i) = -4i.$$

6. Oldja meg a következő egyenleteket! A megoldásokat írja fel algebrai alakban is ($z \in \mathbb{C}$)!

(a) $z^2 - i = -1;$

(b) $z^3 - i = -\sqrt{3};$

(c) $z^5 + 16z - z^4 - 16z = 0;$

(d) $(z - i)^3 + (1 + i)^6 = 0;$

(e) $iz^3 + i = z^3 - 1;$

(f) $z^6 + 1 - i\sqrt{3} = 0;$

(g) $z^2 - i = -1;$

(h) $z^4 + 5 = 0;$

(i) $z^2 = \sqrt{\frac{2i \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{1 + i - i^2 + i^5}};$

(j) $z^3 = \sqrt{\frac{(1 - i)^3}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}};$

(k) $z^4 = \sqrt{\frac{(1 + i) \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)}{1 + i - i^2 - i^5}}.$

4 Vektorok

1. Legyen $\underline{a} = (5, -8, 3)$; $\underline{b} = (10, 4, 2)$. Számolja ki a két vektor skaláris szorzatát és közrezárt szögét!
2. Legyen $\underline{a} = (2, -1, 3)$; $\underline{b} = (1, 0, 7)$. Számolja ki a két vektor vektoriális szorzatát! Mekkora a két vektor által kifeszített háromszög területe?
3. Számítsa ki az $\underline{a} = (1, 3, -2)$; $\underline{b} = (0, 2, 5)$ és a $\underline{c} = (4, 0, -3)$ vektorok vegyes szorzatát! Mekkora a megadott vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata?
4. Legyen $\underline{a} = (3, 5, -1)$, $\underline{b} = (2, -1, 1)$ és $\underline{c} = (5, -2, 8)$.
 - (a) $\underline{ab} = ?$;
 - (b) $\underline{a} \times \underline{b} = ?$;
 - (c) $\underline{abc} = ?$;
 - (d) Írja fel azt a vektort koordinátás alakban, amely párhuzamos a $\underline{c}$ vektorral, azzal ellentétes irányú, hossza pedig akkora, mint $\underline{a} + \underline{b}$ hossza!
5. Legyen $\underline{a} = (-5, 4, 1)$, $\underline{b} = (1, 3, 2)$, és $\underline{c} = (2, 1, 1)$.
 - (a) $\underline{ac} = ?$;
 - (b) $\underline{c} \times \underline{b} = ?$;
 - (c) $\underline{acb} = ?$;
 - (d) Mekkora szöget zár közre az $\underline{a}$ vektor a $\underline{c}$ vektorral?
6. Legyen $\underline{a} = (2, 5, -4)$, $\underline{b} = (3, 0, 7)$.
 - (a) $\underline{ab} = ?$;
 - (b) $\underline{a} \times \underline{b} = ?$;
 - (c) $(\underline{a} - \underline{i})(\underline{a} + \underline{i}) = ?$
7. Legyen $\underline{a} = (3, 5, -2)$; $\underline{b} = (2, -2, 1)$. Határozzuk meg $\underline{a}$ vetületvektorát $\underline{b}$ -n, majd $\underline{b}$ vetületvektorát $\underline{a}$ -n !
8. Adott az $\underline{a} = -2\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$; $\underline{b} = \underline{i} + 2\underline{k}$ és a $\underline{c} = \underline{i} + t\underline{j} + 2\underline{k}$ vektor. Számítsuk ki az
 - (a) $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét;
 - (b) a $\underline{b}$ vektor $\underline{a}$ vektorral párhuzamos összetevőjét;
 - (c) a t paraméter értékét, ha a közös kezdőpontból felmért $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 5 egység!
 - (d) Írja fel a $P(1, 2, 3)$ ponton átmenő és a $\underline{b}$ vektorral párhuzamos egyenes egyenletét! Hol dőfi ez az egyenes az xy -síkot?

9. Adott az $\underline{a} = \underline{i} - 2\underline{j} - 3\underline{k}$; $\underline{b} = 2\underline{i} + \underline{j}$ és a $\underline{c} = \underline{i} - \underline{j} + t\underline{k}$ vektor. Számítsuk ki az
- $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorok által bezárt szög szinuszát;
 - a $\underline{b}$ vektor $\underline{a}$ vektorra merőleges összetevőjét;
 - a t paraméter értékét, ha a közös kezdőpontból felmért $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 5 egység!
 - Írja fel a $P(1, 2, 3)$ ponton átmenő és az $\underline{a}$ vektorra merőleges sík egyenletét! Hol dőfi ezt a síkot az y -tengely?
10. Legyen $\underline{v}_1 = 3\underline{i} + 2\underline{j} - 5\underline{k}$; $\underline{v}_2 = -\underline{i} + 4\underline{j} + \underline{k}$; $\underline{v}_3 = 6\underline{i} + 2\underline{k}$. Határozzuk meg
- $\underline{v}_1$ vetületvektorát $\underline{v}_3$ -on;
 - $\underline{v}_2$ és $\underline{v}_3$ szögét;
 - a $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_3$ által kifeszített paralelogramma területét;
 - $\underline{v}_2$ -nek a $\underline{v}_1$ -re eső és arra merőleges komponensét;
 - a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ által kifeszített gúla térfogatát!
11. Komplanárisak-e az $\underline{a} = (-1, 3, 2)$; $\underline{b} = (4, -6, 2)$ és $\underline{c} = (-3, 12, 11)$ vektorok?

5 Egyenesek és síkok

- Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $P_0(3, -2, 1)$ pontra és párhuzamos a $\underline{v} = (-1, 3, -4)$ vektorral!
- Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P_0(5, 1, -3)$ ponton és párhuzamos a $\underline{v} = (3, 18, -6)$ vektorral!
- Legyen egy egyenes egyenlete $x - 3 = -\frac{1}{5}y = \frac{z + 8}{16}$, írja fel az egyenes irányvektorát!
- Legyen $P_0(2, 5, -8)$, $\underline{n} = (3, -1, 4)$. Írja fel a sík egyenletét!
- Melyik pontban dőfi a $3x - y + 4z = -31$ síkot az $x - 3 = -\frac{1}{5}y = \frac{z + 8}{16}$ egyenes?
- Határozza meg az $\underline{r}(t) = (3, -2, 1) + t(-1, 3, -4)$ egyenes és a $2x - 5y + 2z + 7 = 0$ sík dőféspontját!
- Az S síkra az origóból bocsátott merőleges talppontja a $P(2, -1, -1)$ pont. Írja fel az S sík egyenletét!
- Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $M(3, 4, -5)$ pontra és párhuzamos az $\underline{a} = (3, 1, -1)$ és a $\underline{b} = (1, -2, 1)$ vektorokkal!
- Számolja ki az $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ és az $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$ síkpár által bezárt szöget!

10. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(1, 7, -5)$ pontra és az

$$x = 2 - y = \frac{z + 4}{2}$$

egyenesre!

11. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $x - y + z = 0$ és $x + 2y + z = 3$ síkok metszévonalával és átmegy a $P_0(2, 5, -4)$ ponton!
12. A $4x + 25y - 12z + 48 = 0$ síkot a z -tengely az M pontban dőfi. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a síkra és átmegy az M ponton! Mekkora a $Q(0, 0, 8)$ pont és a sík távolsága?
13. Számítsa ki annak a gúlának a térfogatát, amelyet a $30x + 12y + 5z - 60 = 0$ sík a koordinátságokkal közrezár. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a síkra és átmegy az origón! Határozza meg az egyenes és a sík dőféspontját!

6 Mátrixok és determinánsok

1. Írja fel a következő lineáris kombinációk által előállított mátrixot:

(a) $A + 2B - C$, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) $2A - 3B$, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Végezze el a következő szorzásokat!

(a) $(AB)C = ?$ és $A(BC) = ?$, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) $AB = ?$ $AC = ?$ $CA = ?$ $C^2 = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Számítsa ki az alábbi determinánsok értékét!

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix};$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 & 14 \\ 7 & 4 & -1 & 19 \\ 1 & 2 & 6 & -2 \end{vmatrix};$$

$$(d) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix};$$

$$(e) \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(f) \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix};$$

$$(g) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(h) \begin{vmatrix} \binom{n}{1} & \binom{n}{2} \\ \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} \end{vmatrix};$$

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 6 & 1 \\ 10 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(j) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

i)

4. Oldja meg a következő egyenleteket!

$$(a) \begin{vmatrix} \binom{n}{1} & \binom{n}{2} \\ \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} \end{vmatrix} = 0, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(b) \begin{vmatrix} z & i & 3 \\ 1+i & 3 & z \\ -i & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$(c) \begin{vmatrix} z & i & i^2 \\ -z & iz & 1 \\ \frac{1}{i} & \binom{3}{2} & 2i \end{vmatrix} = 0, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$(d) \begin{vmatrix} \cos^2 x & \sin 2x & 2 \cos x \\ \cos x & \operatorname{tg} x & -1 \\ -\sin x & 1 & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = 3, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(e) \begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ 1+i & 2+i & -2-2i \\ 2-i & 1-i & -4+2i \end{vmatrix} = 0, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$(f) \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^2 - \begin{vmatrix} 3-i & 1 & 2 \\ 3 & 1-i & 2 \\ 3 & 1 & 2-i \end{vmatrix} - 6 = 0$$

6. Állapítsa meg a következő mátrixok rangját!

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -9 & -6 \end{bmatrix};$$

$$(b) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix};$$

$$(c) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(d) \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(e) \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \\ 2 & -1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix};$$

$$(f) \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(g) \quad G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & -7 & -4 & 2 & -8 \end{bmatrix};$$

$$(h) \quad D \cdot E.$$

7. Számítsa ki az alábbi determináns pontos értékét!

$$\begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & \ln 1 & i^2 \\ \ln e^2 & i^7 & (1+i)^5 \\ \frac{1}{i} & \binom{5}{3} & -i^3 \end{vmatrix}$$

7 Lineáris egyenletrendszerek

1. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 5 \\ 2x + 3y + z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= 11 \end{aligned}$$

2. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} y - 3z + 4k = -5 \\ x - 2z + 3k = -4 \\ 3x + 2y - 5k = 12 \\ 4x + 3y - 5z = 5 \end{cases}$$

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + z = 2, \\ x + 2z = 0, \\ -x + 3y + 2z = 1; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + y = 0, \\ 2x + y - z = 2, \\ x + 4y + z = 1; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 5x + y - z = 0, \\ 2x + y - 3z = 0, \\ 4x + y + z = 0. \end{cases}$$

4. Vizsgálja meg a megoldhatóság szempontjából (az A és B valós paraméterek értékétől függően) az

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x + y - 3z = 0, \\ Ax - 3y + z = B \end{cases}$$

egyenletrendszert, és egyben adja meg a megoldásokat is, ha azok léteznek!

5. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x + 4y - z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 6x_5 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - x_3 - x_5 = -2 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

6. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\text{a) } \begin{cases} x + 4y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ 5x - 8y - z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 2x_5 = -1 \\ 4x_3 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 8 \\ x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$$

7. Határozza meg a p és q valós paraméterek értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek

- (a) egyetlen;
- (b) végtelen sok;
- (c) ne legyen megoldása!

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ px + 2y + 3z = 2 \\ x - 3y - 2z = q \end{cases}$$

8. Vizsgálja meg a ν paraméter függvényében az alábbi egyenletrendszer megoldhatóságát. A megoldható esetekben oldja meg az egyenletrendszert Gauss-módszerrel!

$$\begin{cases} x + y - 5z = 0 \\ 3x - 8y - 4z = \nu \\ -2x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

9. Vizsgálja meg a β paraméter függvényében az alábbi egyenletrendszer megoldhatóságát. A megoldható esetekben oldja meg az egyenletrendszert Gauss-módszerrel!

$$\begin{cases} -4x - 2y + 2z = 0 \\ 4x + y + 2z = 1 \\ 2x + \beta y - z = \beta \end{cases}$$