

A 12. előadáshoz javasolt feladatok részletesen kidolgozott megoldásai

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

1. Oldja meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket!

- a) $y' = y \operatorname{ctg} x + \sin x$; b) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;
c) $y' = \frac{3y}{x} + x$; d) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$;
e) $y' + 2y \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x$; f) $y' + \frac{y}{x} = e^x + \frac{3e^x}{x}$;
g) $y' - \frac{3}{x}y = 2$; h) $xy' - y = e^x(x^2 + x^3)$;
i) $y = xy' + y' \ln y$; j) $(x - 2)y' = y + 2(x - 2)^2$.

Megoldás:

- Az $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$ DE általános megoldása:

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C e^{-\int p(x) dx}.$$

Ezt a képletet sajnos igen nehéz megjegyezni.

- Ha $q(x) = 0$ nagy negatív x -ekre, akkor a megoldás felírható mint

$$y(x) = y_{hom}(x) + \int_{-\infty}^x G(x, s) q(s) ds,$$

ahol $y_{hom}(x)$ a homogén DE megoldása, míg $G(x, s)$ -re teljesül, hogy

$$\left(\frac{d}{dx} + p(x) \right) G(x, s) = 0, \quad G(s, s) = 1.$$

A lineáris rendszerek elméletében ez egy alapvető formula.

Praktikus szempontból viszont jobb az állandó variálásának a módszerét használni.

a: A homogén egyenlet

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x) \operatorname{ctg}(x), \quad \frac{dy}{dx} = y(x) \operatorname{ctg}(x), \quad \implies \int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{ctg}(x) dx \\ &\implies \ln |y| = \ln(\sin(x)) + K \end{aligned}$$

$y(x)$ megoldása

$$y(x) = c \cdot \sin(x).$$

Itt $c = \pm e^K$ vagy $c = 0$. Az inhomogén

$$y'(x) = y(x) \operatorname{ctg}(x) + \sin(x)$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$y(x) = c(x) \sin(x), \quad y'(x) = \sin(x)c'(x) + c(x) \cos(x).$$

Ekkor

$$\sin(x)c'(x) = \sin(x) \implies c(x) = \int 1 \, dx = c_1 + x.$$

Tehát az általános megoldás:

$$y(x) = (c_1 + x) \sin(x)$$

b: A homogén egyenlet

$$y'(x) = -2xy(x)$$

$y(x)$ megoldása

$$y(x) = c_1 e^{-x^2}.$$

Az inhomogén

$$y'(x) = -2xy(x) + xe^{-x^2}$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$y(x) = e^{-x^2} c(x), \quad y'(x) = e^{-x^2} c'(x) - 2e^{-x^2} xc(x).$$

Ekkor

$$e^{-x^2} (x - c'(x)) = 0 \implies c(x) = c_1 + \frac{x^2}{2}.$$

Tehát az általános megoldás:

$$y(x) = e^{-x^2} \left(c_1 + \frac{x^2}{2} \right)$$

c: A homogén egyenlet

$$y'(x) = \frac{3y(x)}{x}$$

$y(x)$ megoldása

$$y(x) = c_1 x^3.$$

Az inhomogén

$$y(x) = c_1 x^3 + x$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$y(x) = x^3 c(x), \quad y'(x) = x^3 c'(x) + 3x^2 c(x).$$

Ekkor

$$x^3 c'(x) = x \quad \implies \quad c(x) = c_1 - \frac{1}{x}.$$

Tehát az általános megoldás:

$$y(x) = x^3 \left(c_1 - \frac{1}{x} \right).$$

d: A homogén egyenlet

$$y'(x) = -y(x) \operatorname{tg} x$$

$y(x)$ megoldása

$$y'(x) = -y(x) \operatorname{tg}(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y(x)(-\operatorname{tg}(x))$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\operatorname{tg}(x) dx$$

$$\ln |y| = \ln(\cos(x)) + \ln c_1$$

$$y(x) = c_1 \cos(x).$$

Az inhomogén

$$y'(x) = \frac{1}{\cos(x)} - y(x) \operatorname{tg}(x)$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$y(x) = c(x) \cos(x).$$

Ekkor

$$y'(x) = \cos(x)c'(x) - c(x) \sin(x)$$

és visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe:

$$\cos(x)c'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \implies \quad c(x) = c_1 + \operatorname{tg}(x).$$

Tehát az általános megoldás:

$$y(x) = \cos(x) (c_1 + \operatorname{tg}(x)).$$

e: A homogén egyenlet

$$y'(x) = -2y(x) \operatorname{sh}(x)$$

$y(x)$ megoldása

$$y(x) = c_1 e^{-2 \operatorname{ch}(x)}.$$

Az inhomogén

$$y'(x) = sh(x) - 2y(x) sh(x)$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$y(x) = c(x)e^{-2ch(x)}, \quad y'(x) = e^{-2ch(x)}c'(x) - 2c(x)sh(x)e^{-2ch(x)}.$$

Ekkor

$$sh(x) = e^{-2ch(x)}c'(x) \implies c(x) = c_1 + \frac{1}{2}e^{2ch(x)}.$$

Tehát az általános megoldás:

$$y(x) = e^{-2ch(x)} \left(c_1 + \frac{1}{2}e^{2ch(x)} \right).$$

f: A homogén egyenlet

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x}$$

$y(x)$ megoldása

$$y(x) = \frac{c_1}{x}.$$

Az inhomogén

$$y'(x) = e^x \left(\frac{3}{x} + 1 \right) - \frac{y(x)}{x}$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$y(x) = \frac{c(x)}{x}, \quad y'(x) = \frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2}.$$

Ekkor

$$\frac{e^x(x+3) - c'(x)}{x} = 0 \implies c(x) = c_1 + e^x(x+2).$$

Tehát az általános megoldás:

$$y(x) = \frac{c_1 + e^x(x+2)}{x}.$$

g: A homogén egyenlet

$$y'(x) = \frac{3y(x)}{x}$$

$y(x)$ megoldása

$$y(x) = c_1 x^3.$$

Az inhomogén

$$y'(x) = \frac{3y(x)}{x} + 2$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$y(x) = x^3 c(x), \quad y'(x) = x^3 c'(x) + 3x^2 c(x).$$

Ekkor

$$x^3 c'(x) = 2 \quad \implies \quad c(x) = c_1 - \frac{1}{x^2}.$$

Tehát az általános megoldás:

$$y(x) = x^3 \left(c_1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

h: A homogén egyenlet

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$y(x)$ megoldása

$$y(x) = c_1 x.$$

Az inhomogén

$$y'(x) = e^x (x^2 + x) + \frac{y(x)}{x}$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$y(x) = x c(x), \quad y'(x) = x c'(x) + c(x).$$

Ekkor

$$x (e^x (x + 1) - c'(x)) = 0 \quad \implies \quad c(x) = c_1 + e^x x.$$

Tehát az általános megoldás:

$$y(x) = x (c_1 + e^x x).$$

2. Keresse meg az alábbi differenciálegyenletek adott kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását!

- a) $y' - \frac{1}{x \ln x} y = x \ln x; \quad y(e) = \frac{e^2}{2}$
- b) $y' - \frac{y}{x} - 2x^2 = 0; \quad y(1) = -1$
- c) $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x \quad y(0) = 0$
- d) $y' + \frac{y}{1+x} = \frac{1+2x}{1+x} \quad y(0) = 2$
- e) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2}{x} + \frac{3}{2}; \quad y(1) = 0$

Megoldás:

a: A homogén egyenlet

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x \ln(x)}$$

$y(x)$ megoldása

$$y(x) = c_1 \ln(x).$$

Az inhomogén

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x \ln(x)} + x \ln(x)$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$y(x) = c(x) \ln(x), \quad y'(x) = \ln(x)c'(x) + \frac{c(x)}{x}.$$

Ekkor

$$x \ln(x) = \ln(x)c'(x) \implies c(x) = c_1 + \frac{x^2}{2}.$$

Tehát az általános megoldás:

$$y(x) = \left(c_1 + \frac{x^2}{2}\right) \ln(x).$$

A kezdeti feltétel

$$y(e) = \frac{e^2}{2}$$

teljesül, ha

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x).$$

b: A homogén egyenlet

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$y(x)$ megoldása

$$y(x) = c_1 x.$$

Az inhomogén

$$y'(x) = 2x^2 + \frac{y(x)}{x}$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$y(x) = xc(x), \quad y'(x) = xc'(x) + c(x).$$

Ekkor

$$2x^2 = xc'(x) \implies c(x) = c_1 + x^2.$$

Tehát az általános megoldás:

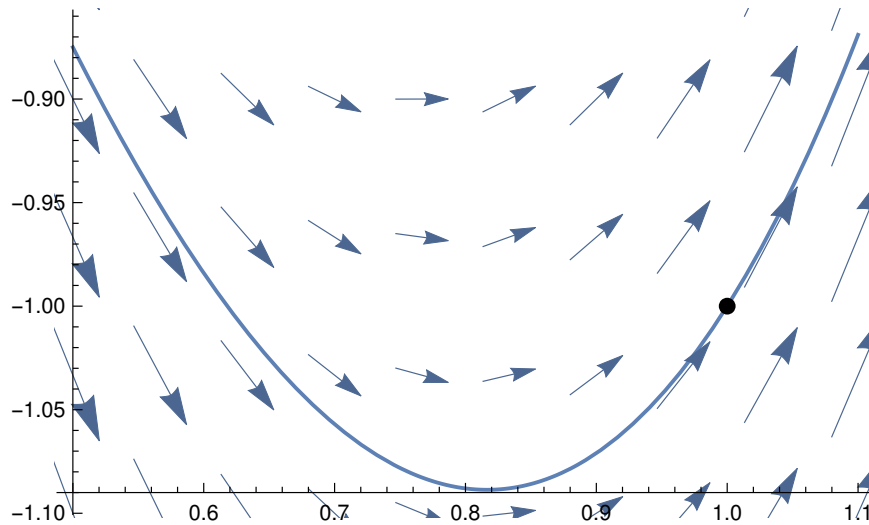
$$y(x) = x(c_1 + x^2).$$

A kezdeti feltétel

$$y(1) = -1$$

teljesül, ha

$$y(x) = x^3 - 2x.$$



A DE-hez tartozó $(x, y) \rightarrow (1, 2x^2 + y/x)$ vektormező. A partikuláris megoldás áthalad az $(1, -1)$ ponton.

c: A homogén egyenlet

$$y'(x) = y(x) \left(-\sec^2(x) \right)$$

$y(x)$ megoldása

$$y(x) = c_1 e^{-\tan(x)}.$$

Az inhomogén

$$y'(x) = \tan(x) \sec^2(x) - y(x) \sec^2(x)$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$y(x) = c(x)e^{-\tan(x)}, \quad y'(x) = e^{-\tan(x)}c'(x) - c(x)e^{-\tan(x)}\sec^2(x).$$

Ekkor

$$\tan(x) \sec^2(x) = e^{-\tan(x)}c'(x) \implies c(x) = c_1 + e^{\tan(x)}(\tan(x) - 1).$$

Tehát az általános megoldás:

$$y(x) = e^{-\tan(x)} \left(c_1 + e^{\tan(x)}(\tan(x) - 1) \right).$$

A kezdeti feltétel

$$y(1) = -1$$

teljesül, ha

$$y(x) = \tan(x) - \tan(1)e^{\tan(1)-\tan(x)} - 1.$$

d: A homogén egyenlet

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x+1}$$

$y(x)$ megoldása

$$y(x) = \frac{c_1}{x+1}.$$

Az inhomogén

$$y'(x) = \frac{2x+1}{x+1} - \frac{y(x)}{x+1}$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$y(x) = \frac{c(x)}{x+1}, \quad y'(x) = \frac{c'(x)}{x+1} - \frac{c(x)}{(x+1)^2}.$$

Ekkor

$$\frac{-c'(x) + 2x + 1}{x+1} = 0 \quad \implies \quad c(x) = c_1 + x^2 + x.$$

Tehát az általános megoldás:

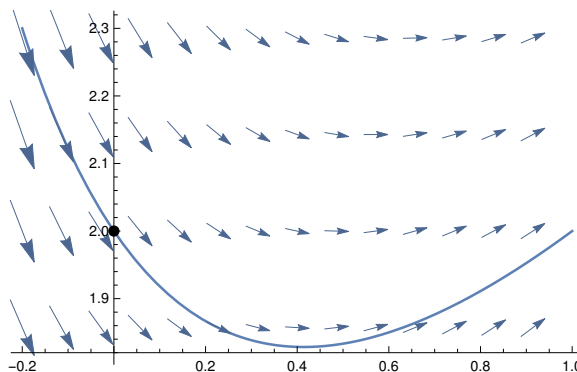
$$y(x) = \frac{c_1 + x^2 + x}{x+1}.$$

A kezdeti feltétel

$$y(0) = 2$$

teljesül, ha

$$y(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x+1}.$$



A DE-hez tartozó $(x, y) \rightarrow (1, (2x+1)/(x+1) - y/(x+1))$ vektormező. A partikuláris megoldás áthalad a $(0, 2)$ ponton.

3. Alkalmas helyettesítéssel vezesse vissza az alábbi differenciálegyenleteket lineáris differenciálegyenletre! Oldja is meg az egyenleteket!

a) $xe^{-y} y' = x - e^{-y};$

b) $x^2 y' \cos y + 1 = 2x \sin y;$

c) $xyy' + y^2 + 1 = x.$

Megoldás:

a: A

$$xe^{-y(x)}y'(x) = x - e^{-y(x)}$$

DE az

$$z(x) = -e^{-y(x)}, \quad z'(x) = e^{-y(x)}y'(x)$$

helyettesítéssel a következő alakú lesz:

$$xz'(x) = z(x) + x.$$

A homogén egyenlet

$$z'(x) = \frac{z(x)}{x}$$

$z(x)$ megoldása

$$z(x) = c_1 x.$$

Az inhomogén

$$z'(x) = \frac{z(x)}{x} + 1$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$z(x) = xc(x), \quad z'(x) = xc'(x) + c(x).$$

Ekkor

$$xc'(x) = 1 \quad \implies \quad c(x) = c_1 + \ln(x).$$

Tehát az általános megoldás:

$$z(x) = x(c_1 + \ln(x)).$$

Ebből visszakaphatjuk $y(x)$ -t:

$$y(x) = -\ln(x(-c_1 - \ln(x))).$$

b: A

$$x^2 y'(x) \cos(y(x)) = 2x \sin(y(x)) - 1$$

DE az

$$z(x) = \sin(y(x)), \quad z'(x) = y'(x) \cos(y(x))$$

helyettesítéssel a következő alakú lesz:

$$x^2 z'(x) = 2xz(x) - 1.$$

A homogén egyenlet

$$z'(x) = \frac{2z(x)}{x}$$

$z(x)$ megoldása

$$z(x) = c_1 x^2.$$

Az inhomogén

$$z'(x) = \frac{2z(x)}{x} - \frac{1}{x^2}$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$z(x) = x^2 c(x), \quad z'(x) = x^2 c'(x) + 2xc(x).$$

Ekkor

$$x^3 c'(x) + \frac{1}{x} = 0 \quad \implies \quad c(x) = c_1 + \frac{1}{3x^3}.$$

Tehát az általános megoldás:

$$z(x) = x^2 \left(c_1 + \frac{1}{3x^3} \right).$$

Ebből visszakaphatjuk $y(x)$ -t:

$$y(x) = \arcsin \left(2c_1 x^2 + \frac{1}{3x} \right).$$

c: A

$$xy(x)y'(x) + y(x)^2 + 1 = x$$

DE az

$$z(x) = z(x) = \frac{y(x)^2}{2}, \quad z'(x) = z'(x) = y(x)y'(x)$$

helyettesítéssel a következő alakú lesz:

$$xz'(x) = -2z(x) + x - 1.$$

A homogén egyenlet

$$z'(x) = -\frac{2z(x)}{x}$$

$z(x)$ megoldása

$$z(x) = \frac{c_1}{x^2}.$$

Az inhomogén

$$z'(x) = -\frac{2z(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$z(x) = \frac{c(x)}{x^2}, \quad z'(x) = \frac{c'(x)}{x^2} - \frac{2c(x)}{x^3}.$$

Ekkor

$$x = \frac{c'(x)}{x} + 1 \quad \implies \quad c(x) = c_1 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}.$$

Tehát az általános megoldás:

$$z(x) = \frac{c_1 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}}{x^2}.$$

Ebből visszakaphatjuk $y(x)$ -t:

$$y(x) = \pm \frac{\sqrt{c_2 + \frac{2x^3}{3} - x^2}}{x}.$$

Bernoulli-féle differenciálegyenletek

4. Oldjuk meg az

$$xy' - 2y = 4x^3 \sqrt{y}$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Általános elmélet:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1.$$

$$z = y^{1-n}, \quad z' = (1-n)y^{-n}y', \quad y = z^{1/(1-n)}, \quad y' = \frac{1}{1-n}z^{n/(1-n)}z',$$

$$\frac{1}{1-n}z^{n/(1-n)}z' + pz^{1/(1-n)} = qz^{n/(1-n)},$$

$$z' + (1-n)pz = (1-n)q.$$

Tehát a Bernoulli DE visszavezethető egy inhomogén lineáris DE megoldására.

Az

$$y'(x) - \frac{2y(x)}{x} = 4x^2 \sqrt{y(x)}$$

DE a

$$z(x) = \sqrt{y(x)}, \quad z'(x) = \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}}$$

helyettesítéssel a következő alakú lesz:

$$z'(x) - \frac{z(x)}{x} = 2x^2.$$

A homogén egyenlet

$$z'(x) - \frac{z(x)}{x} = 0$$

$z(x)$ megoldása

$$z(x) = c_1 x.$$

Az inhomogén

$$z'(x) - \frac{z(x)}{x} = 2x^2$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$z(x) = xc(x), \quad z'(x) = xc'(x) + c(x).$$

Ekkor

$$xc'(x) = 2x^2.$$

Tehát az általános megoldás:

$$c(x) = c_1 + x^2..$$

Ebből visszakaphatjuk $z(x)$ -t:

$$z(x) = x(c_1 + x^2),$$

így

$$y(x) = x^2(c_1 + x^2)^2.$$

5. Keressük meg az alábbi, Bernoulli-féle differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y' - \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)y = x^3y^2;$

(b) $y' - y = xy^5;$

(c) $xy' - y = xy^3(1 + \ln x);$

(d) $x^2y' + xy + \sqrt{y} = 0;$

(e) $y' = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2y};$

(f) $yy' + y^2 \operatorname{tg} x = \cos^2 x;$

(g) $y' + y \operatorname{tg} x + \frac{2y^3}{\cos x} = 0;$

(h) $y' + \frac{y}{x} = 2y^2.$

Megoldás:

a:

A

$$\left(-2x^4 - \frac{1}{x}\right)y(x) + y'(x) = x^3y(x)^2$$

DE az

$$z(x) = \frac{1}{y(x)}, \quad z'(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)^2}$$

helyettesítéssel a következő alakú lesz:

$$z'(x) - \left(-2x^4 - \frac{1}{x}\right) z(x) = -x^3.$$

A homogén egyenlet

$$z'(x) - \left(-2x^4 - \frac{1}{x}\right) z(x) = 0$$

$z(x)$ megoldása

$$z(x) = \frac{c_1 e^{-\frac{2x^5}{5}}}{x}.$$

Az inhomogén

$$z'(x) - \left(-2x^4 - \frac{1}{x}\right) z(x) = -x^3$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$z(x) = \frac{e^{-\frac{2x^5}{5}} c(x)}{x}, \quad z'(x) = \frac{e^{-\frac{2x^5}{5}} c'(x)}{x} - 2e^{-\frac{2x^5}{5}} x^3 c(x) - \frac{e^{-\frac{2x^5}{5}} c(x)}{x^2}.$$

Ekkor

$$-x^3 = \frac{e^{-\frac{2x^5}{5}} c'(x)}{x}.$$

Tehát az általános megoldás:

$$c(x) = c_1 - \frac{1}{2} e^{\frac{2x^5}{5}}.$$

Ebből visszakaphatjuk $z(x)$ -t:

$$z(x) = \frac{e^{-\frac{2x^5}{5}} \left(c_1 - \frac{1}{2} e^{\frac{2x^5}{5}}\right)}{x},$$

így

$$y(x) = -\frac{2e^{\frac{2x^5}{5}} x}{e^{\frac{2x^5}{5}} - 2c_1}.$$

b:

A

$$y'(x) - y(x) = xy(x)^5$$

DE a

$$z(x) = \frac{1}{y(x)^4}, \quad z'(x) = -\frac{4y'(x)}{y(x)^5}$$

helyettesítéssel a következő alakú lesz:

$$z'(x) + 4z(x) = -4x.$$

A homogén egyenlet

$$z'(x) + 4z(x) = 0$$

$z(x)$ megoldása

$$z(x) = c_1 e^{-4x}.$$

Az inhomogén

$$z'(x) + 4z(x) = -4x$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$z(x) = e^{-4x}c(x), \quad z'(x) = e^{-4x}c'(x) - 4e^{-4x}c(x).$$

Ekkor

$$-4x = e^{-4x}c'(x).$$

Tehát az általános megoldás:

$$c(x) = c_1 - 4e^{4x} \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{16} \right).$$

Ebből visszakaphatjuk $z(x)$ -t:

$$z(x) = e^{-4x} \left(c_1 - 4e^{4x} \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{16} \right) \right),$$

így

$$y(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4c_1 e^{-4x} - 4x + 1}}.$$

h:

A

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 2y(x)^2$$

DE az

$$z(x) = \frac{1}{y(x)}, \quad z'(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)^2}$$

helyettesítéssel a következő alakú lesz:

$$z'(x) - \frac{z(x)}{x} = -2.$$

A homogén egyenlet

$$z'(x) - \frac{z(x)}{x} = 0$$

$z(x)$ megoldása

$$z(x) = c_1 x.$$

Az inhomogén

$$z'(x) - \frac{z(x)}{x} = -2$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$z(x) = xc(x), \quad z'(x) = xc'(x) + c(x).$$

Ekkor

$$xc'(x) = -2.$$

Tehát az általános megoldás:

$$c(x) = c_1 - 2 \ln(x).$$

Ebből visszakaphatjuk $z(x)$ -t:

$$z(x) = x(c_1 - 2 \ln(x)),$$

így

$$y(x) = \frac{1}{c_1 x - 2x \ln(x)}.$$

6. Keressük meg az

$$xy' + y = \frac{\ln x}{y^3}, \quad y(1) = 2, \quad (x > 0)$$

kezdetiérték feladat megoldását!

Megoldás:

Az

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{xy(x)^3}$$

DE a

$$z(x) = y(x)^4, \quad z'(x) = 4y(x)^3 y'(x)$$

helyettesítéssel a következő alakú lesz:

$$z'(x) + \frac{4z(x)}{x} = \frac{4 \ln(x)}{x}.$$

A homogén egyenlet

$$z'(x) + \frac{4z(x)}{x} = 0$$

$z(x)$ megoldása

$$z(x) = \frac{c_1}{x^4}.$$

Az inhomogén

$$z'(x) + \frac{4z(x)}{x} = \frac{4 \ln(x)}{x}$$

egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$z(x) = \frac{c(x)}{x^4}, \quad z'(x) = \frac{c'(x)}{x^4} - \frac{4c(x)}{x^5}.$$

Ekkor

$$4x^2 \ln(x) = \frac{c'(x)}{x}.$$

Tehát az általános megoldás:

$$c_1 + 4 \left(\frac{1}{4} x^4 \ln(x) - \frac{x^4}{16} \right).$$

Ebből visszakaphatjuk $z(x)$ -t:

$$z(x) = \frac{c_1 + 4 \left(\frac{1}{4} x^4 \ln(x) - \frac{x^4}{16} \right)}{x^4}$$

így

$$y(x) = \frac{\sqrt[4]{\frac{4c_1}{x^4} + 4 \ln(x) - 1}}{\sqrt{2}}.$$

Az $y(1) = 2$ kezdeti feltétel teljesül, ha

$$y(x) = \frac{\sqrt[4]{-x^4 + 4x^4 \ln(x) + 65}}{\sqrt{2}x}.$$