

A 11. előadáshoz javasolt feladatok részletesen kidolgozott megoldásai

Szétválasztható változójú és erre visszavezethető differenciálegyenletek

1. Oldja meg a következő differenciálegyenleteket!

a) $(2x + 1)y' - 3y = 0;$

b) $(x^2y + 6y)y' + (xy^2 - x) = 0;$

c) $2(xy + x - y - 1) = (x^2 - 2x)y';$

d) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y};$

e) $xy' + (2x^2 - 1) \operatorname{ctg} y = 0;$

f) $yy'e^{2x} = \cos 3x;$

g) $y' = y^2 + 3y - 4;$

h) $y' \sin x = y \ln y;$

i) $(x^2 - 1)y' = 2xy \ln y;$

j) $xy' = y \ln y;$

k) $x^2y' + (x + 5)y = 0;$

l) $xy^2 - x + (x^2 + 4y)y' = 0;$

m) $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0;$

n) $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0;$

o) $(1 - \cos y)y' = 1 + \sin x;$

p) $\sqrt{1 - x^2}y' = 1 + y^2;$

q) $y' \sin 2x + \sin 2y = 0;$

r) $(1 - x^2)y' = \sqrt{1 - y^2};$

Megoldás: Szétválasztható változójú differenciálegyenletről beszélünk, ha átalakítható úgy, hogy az egyik oldalon y' (vagy $\frac{dy}{dx}$) van, és rajta csak y -t tartalmazó szorzótényező, a másik oldalon pedig csak x van. A megoldás azzal indul, hogy erre az alakra hozzuk az egyenletet. Ezután y' -t átírjuk $\frac{dy}{dx}$ -re, és „átszorozunk” dx -szel, majd mindkét oldalt integráljuk.

a)

$$\begin{aligned}(2x + 1)y' - 3y &= 0 \\ (2x + 1)y' &= 3y \\ \frac{1}{y}y' &= \frac{3}{2x + 1}\end{aligned}$$

Az y -nal való osztás miatt feltesszük, hogy $y \neq 0$, és megjegyezzük, hogy egyébként az $y = 0$ konstans függvény megoldás. Folytatjuk az integrálással:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{3}{2x + 1} dx \\ \ln |y| &= \frac{3}{2} \ln |2x + 1| + C\end{aligned}$$

Fejezzük ki y -t:

$$|y| = e^{\frac{3}{2} \ln |2x+1| + C}$$

$$|y| = e^{\frac{3}{2} \ln |2x+1|} \cdot e^C$$

$$y = \pm e^{\frac{3}{2} \ln |2x+1|} \cdot e^C$$

Itt $\pm e^C$ a 0 kivételével tetszőleges konstans lehet. De korábbról tudjuk, hogy az $y = 0$ is megoldás, tehát $\pm e^C$ helyett írhatunk egy általános C konstanst:

$$y = e^{\frac{3}{2} \ln |2x+1|} C$$

Ugyan ez mindig elvégezhető, amikor az integrálás után y az $\ln$ függvényben van. A továbbiakban mindig el is végezzük külön említés nélkül. Most a megoldás tovább egyszerűsíthető:

$$y = e^{\frac{3}{2} \ln |2x+1|} C = e^{\ln(|2x+1|^{\frac{3}{2}})} C = C|2x+1|^{\frac{3}{2}}.$$

b) Rendezzük át az egyenletet a megfelelő alakra.

$$(x^2y + 6y)y' + (xy^2 - x) = 0$$

$$(x^2y + 6y)y' = x - xy^2$$

$$y(x^2 + 6)y' = x(1 - y^2)$$

$$\frac{y}{1 - y^2}y' = \frac{x}{x^2 + 6}.$$

A szokásos $y = \frac{dy}{dx}$ helyettesítés és dx -szel való átszorzás után integráljuk mindkét oldalt:

$$\frac{y}{1 - y^2} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2 + 6}$$

$$\int \frac{y}{1 - y^2} dy = \int \frac{x}{x^2 + 6} dx$$

$$-\frac{1}{2} \ln |1 - y^2| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 6) + C$$

$$\ln |1 - y^2| = -\ln(x^2 + 6) + C$$

$$|1 - y^2| = e^{-\ln(x^2 + 6) + C}$$

$$1 - y^2 = \frac{C}{x^2 + 6}$$

$$y^2 = 1 - \frac{C}{x^2 + 6}$$

$$y = \pm \sqrt{1 - \frac{C}{x^2 + 6}}.$$

c) Most is rendezzük át az egyenletet a megfelelő alakra. Általában segít, ha olyan szorzattá alakításokat keresünk, amelyekben egy-egy szorzótényezőben csak egy változó van.

$$2(xy + x - y - 1) = (x^2 - 2x)y'$$

$$2(x(y + 1) - (y + 1)) = (x^2 - 2x)y'$$

$$\begin{aligned}
2(x-1)(y+1) &= (x^2-2x)y' \\
\frac{1}{y+1}y' &= \frac{2(x-1)}{x^2-2x} \\
\int \frac{1}{y+1}dy &= \int \frac{2x-2}{x^2-2x}dx \\
\ln|y+1| &= \ln|x^2-2x| + C \\
y+1 &= C(x^2-2x) \\
y &= C(x^2-2x) - 1.
\end{aligned}$$

d) Itt a két változó szétválasztásához használni kell az exponenciális függvény $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ azonosságát:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= e^{x-y} \\
\frac{dy}{dx} &= e^x \cdot e^{-y} \\
e^y dy &= e^x dx \\
\int e^y dy &= \int e^x dx \\
e^y &= e^x + C \\
y &= \ln(e^x + C).
\end{aligned}$$

e) A megoldás menete hasonló. Az y' mellett összegben a baloldalon biztosan nem lehet más, ezért a $(2x^2-1)\operatorname{ctg} y$ jobboldalra rendezésével kezdjük:

$$\begin{aligned}
xy' + (2x^2-1)\operatorname{ctg} y &= 0 \\
xy' &= -(2x^2-1)\operatorname{ctg} y \\
\frac{1}{\operatorname{ctg} y}y' &= -\frac{2x^2-1}{x} \\
\int \frac{1}{\operatorname{ctg} y} dy &= -\int \left(2x - \frac{1}{x}\right) dx \\
\ln|\cos y| &= x^2 - \ln|x| + \ln C \\
\cos y &= \frac{Ce^{x^2}}{x} \\
y &= \arccos \frac{Ce^{x^2}}{x}.
\end{aligned}$$

f) Az általános megoldás implicit alakja:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{3}{13} \cdot \frac{\sin 3x}{e^{2x}} - \frac{2}{13} \cdot \frac{\cos 3x}{e^{2x}} + C.$$

m) Ha az egyenletben már eleve dy és dx van y' helyett, akkor arra az alakra kell hozni, amelyben külön tudunk integrálni a két változó szerint. Az egyik oldalon dy csak y -t

tartalmazó szorzóval, a másik oldalon dx csak x -et tartalmazó szorzóval.

$$\begin{aligned}
 (1+y^2)xdx + (1+x^2)dy &= 0 \\
 (1+x^2)dy &= -(1+y^2)xdx \\
 \frac{1}{1+y^2}dy &= -\frac{x}{1+x^2}dx \\
 \int \frac{1}{1+y^2}dy &= -\int \frac{x}{1+x^2}dx \\
 \operatorname{arctg} y &= -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \\
 y &= \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\right).
 \end{aligned}$$

2. Keresse meg a következő differenciálegyenleteknek azt a partikuláris megoldását, amelyik az adott kezdeti feltételt kielégíti:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } xy' = y \ln y; & y(1) = e \\
 \text{b) } y' \sin x = y \ln y; & y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \\
 \text{c) } y' \operatorname{ctgx} + y = 2 & y(0) = -1 \\
 \text{d) } x\sqrt{1-y^2} = yy'\sqrt{1-x^2}; & y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\
 \text{e) } e^{x-y} - e^x - y' = 0; & y(0) = \ln \frac{1}{2}
 \end{array}$$

Megoldás:

A megoldás ugyanúgy történik, mint az előző feladatban, csak a végén a C értéket úgy kell meghatározni, hogy a kezdeti feltétel is teljesüljön.

- a) Megoldjuk az egyenletet, ahogy az előző feladatban:

$$\begin{aligned}
 xy' &= y \ln y \\
 \frac{1}{y \ln y}y' &= \frac{1}{x} \\
 \int \frac{1}{y \ln y}dy &= \int \frac{1}{x}dx \\
 \ln |\ln y| &= \ln |x| + C \\
 \ln y &= Cx \\
 y &= e^{Cx}.
 \end{aligned}$$

A megfelelő C értéket úgy határozzuk meg, hogy egyenletet írunk fel a kezdeti feltételből:

$$y(1) = e^{C \cdot 1} = e$$

$$e^C = e$$

$$C = 1.$$

Tehát a kezdeti feltételnek is megfelelő partikuláris megoldás az $y_p = e^x$.

c) Ugyanúgy járunk el, mint az a) feladatban. Először megoldjuk az egyenletet:

$$\begin{aligned} y' \operatorname{ctg} x + y &= 2 \\ y' \operatorname{ctg} x &= 2 - y \\ \frac{1}{2 - y} y' &= \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \\ \int \frac{1}{2 - y} dy &= \int \operatorname{tg} x dx \\ -\ln |2 - y| &= -\ln |\cos x| + C \\ \ln |2 - y| &= \ln |\cos x| + C \\ 2 - y &= C \cos x \\ y &= 2 - C \cos x. \end{aligned}$$

Majd megkeressük a megfelelő C -t:

$$\begin{aligned} y(0) &= 2 - C \cos 0 = -1 \\ 2 - C &= -1 \\ 3 &= C. \end{aligned}$$

Tehát a kezdeti feltételnek megfelelő partikuláris megoldás az $y_p = 2 - 3 \cos x$.

3. Oldja meg a következő differenciálegyenleteket!

a) $y' = (x + y)^2; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$

b) $y' = \sin(x + 2y);$

c) $y' = (y - x)^2;$

d) $(x - y)^2 y' = 5;$

e) $y' = \cos(x - y);$

f) $y' = \sqrt{2x + 3y + 4};$

g) $(y - x)y' + x + y = 0;$

h) $xy' = y - x \cos^2 \frac{y}{x};$

i) $2xyy' + x^2 - 2y^2 = 0;$

j) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y; \quad (y) = 0;$

k) $(2x^3 + 3xy^2)y' = x^2y + 2y^3; \quad y(1) = 1$

l) $xy^2 - x + (x^2 + 4y)y' = 0;$

Megoldás: Ezekben egyenletekben az a közös, hogy az y' -on kívüli részük kifejezhetőek y és x egyetlen függvényeként. Ezt a függvényt új változóként bevezetve szétválasztható változójú egyenletet kapunk, ha az y' -t is kifejezzük az új függvénnyel. Itt mindegyik esetben vagy $u = ax + by + c$ alakú az új függvény, vagy $u = \frac{y}{x}$. Az utóbbi esetet úgy lehet felismerni, hogy az egyenlet átrendezhető úgy, hogy y és x mindig csak együtt szerepel $\frac{y}{x}$ alakban.

a) Itt az $u = x + y$ a jó függvény. Az y' -t megkaphatjuk az összefüggés deriválásával x szerint, észben tartva, hogy u és y függvény:

$$u' = 1 + y'.$$

Tehát $y' = u' - 1$. Végezzük el a helyettesítést az eredeti $y' = (x + y)^2$ egyenletben, majd oldjuk meg a kapott szétválasztható változójú egyenletet.

$$\begin{aligned} u' - 1 &= u^2 \\ u' &= u^2 + 1 \\ \frac{1}{u^2 + 1} u' &= 1 \\ \int \frac{1}{u^2 + 1} du &= \int 1 dx \\ \operatorname{arctg} u &= x + C \\ u &= \operatorname{tg}(x + C). \end{aligned}$$

Az y -t megkapjuk, ha felhasználjuk az $u = x + y$ összefüggést:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x + C) &= x + y \\ y &= \operatorname{tg}(x + C) - x. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételnek megfelelő megoldást úgy keressük meg, ahogy az előző feladatban:

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + C\right) - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + C\right) &= 0 \\ \frac{\pi}{4} + C &= k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ C &= k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

A tangens periodicitása miatt mindegy, melyik C -t választjuk, legyen a $C = -\frac{\pi}{4}$. Tehát a kezdeti feltételnek megfelelő megoldás:

$$y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - x.$$

f) Vezessük be az $u = 2x + 3y + 4$ függvényt. Ekkor $u' = 2 + 3y'$, azaz

$$y' = \frac{u' - 2}{3}.$$

Az eredeti $y' = \sqrt{2x + 3y + 4}$ egyenletben végezzük el a helyettesítést, majd folytassuk a megoldást a szokásos módon:

$$\frac{u' - 2}{3} = \sqrt{u}$$

$$\begin{aligned}
u' &= 3\sqrt{u} + 2 \\
\frac{1}{3\sqrt{u} + 2} u' &= 1 \\
\int \frac{1}{3\sqrt{u} + 2} du &= \int 1 dx
\end{aligned}$$

A baloldali integrált $v = 3\sqrt{u} + 2$ helyettesítéssel számoljuk. Ekkor $u = \frac{1}{9}(v-2)^2$, tehát $du = \frac{2}{9}(v-2)dv$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{3\sqrt{u} + 2} du &= \frac{2}{9} \int \frac{1}{v} (v-2) dv \\
&= \frac{2}{9} \int 1 - \frac{2}{v} dv \\
&= \frac{2}{9} (v - 2 \ln |v|) \\
&= \frac{2}{9} (3\sqrt{u} + 2 - 2 \ln |3\sqrt{u} + 2|) \\
&= \frac{2}{3} \sqrt{u} + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} \ln |3\sqrt{u} + 2|,
\end{aligned}$$

tehát az egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} \sqrt{u} + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} \ln |3\sqrt{u} + 2| &= x + C \\
3\sqrt{u} + 2 - 2 \ln |3\sqrt{u} + 2| &= \frac{9}{2} x + C.
\end{aligned}$$

Ebből az u -t nem lehet explicit módon kifejezni, ezért befejezésül csak visszahelyettesítünk úgy, hogy y -ra kapjunk összefüggést:

$$3\sqrt{2x+3y+4} + 2 - 2 \ln |3\sqrt{2x+3y+4} + 2| = \frac{9}{2} x + C.$$

g) Az egyenletben csak első hatványon van mindenhol x és y is. Ekkor x -szel végigosztva csak $\frac{y}{x}$ alakban lesz a két változó:

$$\left(\frac{y}{x} - 1\right) y' + 1 + \frac{y}{x} = 0.$$

Így elvégezhetjük az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítést. Érdekes átrendezni az összefüggést $ux = y$ alakra, hogy megkapjuk y' -t: $y' = u'x + u$ (továbbra is figyelembe véve, hogy u függvény, de x csak a változó). Írjuk fel az egyenlet új alakját, és oldjuk meg:

$$\begin{aligned}
(u-1)(u'x + u) + 1 + u &= 0 \\
(u-1)u'x + (u-1)u + 1 + u &= 0 \\
(u-1)u'x + u^2 + 1 &= 0 \\
(u-1)u'x &= -(u^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\frac{u-1}{u^2+1}u' = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{u-1}{u^2+1}du = -\int \frac{1}{x}dx.$$

Számítsuk ki külön a baloldali integrált:

$$\int \frac{u-1}{u^2+1}du = \int \frac{u}{u^2+1}dz - \int \frac{1}{u^2+1}dz = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \arctg u.$$

Az egyenlet megoldása tehát

$$\frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \arctg u = -\ln x + C$$

Az u -t nem tudjuk kifejezni, ezért csak helyettesítsük vissza y -t:

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) - \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = -\ln x + C.$$

i) Itt azt lehet észrevenni, hogy minden tagban az x és y kitevőinek összege 2. Ilyenkor x^2 -tel osztva mindenhol $\frac{y}{x}$ lesz:

$$2xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$$

$$2y'\frac{y}{x} + 1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0.$$

Végezzük el ugyan azt a helyettesítést, mint az előbb, tehát $u = \frac{y}{x}$, $y' = u'x + z$, és oldjuk meg az új egyenletet:

$$2(u'x + u)u + 1 - 2u^2 = 0$$

$$2xu' + 2u^2 + 1 - 2u^2 = 0$$

$$2xu' + 1 = 0$$

$$2xu' = -1$$

$$u' = -\frac{1}{2x}$$

$$\int 1du = -\int \frac{1}{2x}dx$$

$$u = -\frac{1}{2}\ln|x| + C$$

Visszahelyettesítjük u helyére $\frac{y}{x}$ -et megkapjuk a megoldást:

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}\ln|x| + C$$

$$y = -\frac{1}{2}x\ln|x| + Cx$$

4. Írjuk fel az $y = Cx^2$ görbesereg differenciálegyenletét!

Megoldás: A görbesereg differenciálegyenletét úgy kaphatjuk meg, ha deriválással „eltüntetjük” a C konstans. Ehhez ki kell fejezni az egyenletből, majd implicit deriválást kell végezni:

$$\begin{aligned}\frac{y}{x^2} &= C \\ \frac{x^2 y' - 2xy}{x^4} &= 0 \\ xy' - 2y &= 0 \\ y' &= \frac{2y}{x}.\end{aligned}$$

A számolás közben ugyan fel kellett tennünk, hogy $x \neq 0$, de mind a görbesereg egyenletében, mind a kapott differenciálegyenletnél az $x = 0$ esetből adódik az $y = 0$ megoldás.

5. Írjuk fel az $x^2 + y^2 = C$ görbesereg differenciálegyenletét!

Megoldás: Végezzünk implicit deriválást, hogy eltűnjön a C :

$$\begin{aligned}2x + 2yy' &= 0 \\ x + yy' &= 0.\end{aligned}$$

6. Határozzuk meg az

$$y = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

parabolasereg ortogonális trajektóriáinak egyenletét!

Megoldás: Korábban már láttuk, hogy a görbesereg differenciálegyenlete

$$xy' - 2y = 0.$$

y' határozza meg a trajektóriák érintőinek meredekségét. Az ortogonális trajektóriák egyenlete az eredetihez képest merőleges érintőket határoz meg. Általában két egyenes akkor merőleges egymásra, ha a meredekségük szorzata -1 , azaz egy m meredekségű egyenes esetén egy merőleges egyenes meredeksége $-\frac{1}{m}$. Tehát az ortogonális trajektóriák egyenlete úgy adódik, hogy a differenciálegyenletben y' -t kicseréljük $-\frac{1}{y'}$ -re. Mivel $y' = \frac{dy}{dx}$, ez dx és dy cseréjének is felfogható úgy, hogy az egyiknek előjelét is megfordítjuk. A (dx, dy) tekinthető az érintő egyenes irányvektorának, tehát ez megfelel annak, ahogy egy vektorra merőleges vektort kapunk. Az ortogonális trajektóriák egyenlete tehát

$$-\frac{x}{y'} - 2y = 0.$$

Átrendezve:

$$x + 2yy' = 0.$$

Oldjuk meg a kapott differenciálegyenletet!

$$\begin{aligned}2yy' &= -x \\2 \int y \, dx &= - \int x \, dx \\y^2 &= -\frac{x^2}{2} + \frac{K}{2} \\x^2 + 2y^2 &= K, \quad K > 0\end{aligned}$$

A parabolasereg ortogonális trajektóriái egy ellipszissereg tagjai.

7. Írjuk fel az $xy = C$ egyenletű hiperbolák ortogonális trajektóriáinak egyenletét!

Megoldás: A görbesereg differenciálegyenletét úgy kapjuk meg, ha differenciáljuk a görbesereg egyenletét az x változó szerint:

$$y + xy' = 0.$$

Az ortogonális trajektória differenciálegyenletét úgy kapjuk, hogy y' helyére $-\frac{1}{y'}$ -t helyettesítünk:

$$y + x \left(-\frac{1}{y'} \right) = 0.$$

Oldjuk meg a kapott differenciálegyenletet!

$$\begin{aligned}y &= \frac{x}{y'} \\yy' &= x \\\int y \, dy &= \int x \, dx \\\frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} + \frac{K}{2} \\y^2 - x^2 &= K, \quad K \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Az ortogonális trajektóriák egyenlete szintén hiperbolasereg. Megjegyezzük továbbá, hogy $K = 0$ esetén az $y = \pm x$ egyenespár is megoldás.