

A 9. előadáshoz javasolt feladatok részletesen kidolgozott megoldásai

Kettős integrálok

1. Számítsuk ki az alábbi kettős integrálokat!

$$(a) \int_2^3 \int_1^5 (x + 2y) \, dx dy;$$

$$(b) \int_0^1 \int_0^1 x e^{x+y} \, dy dx;$$

$$(c) \int_1^4 \int_0^1 x \sqrt{x^2 + y} \, dx dy;$$

$$(d) \int_0^1 \int_{x^2}^{x^3} (x^2 + y^2) \, dy dx;$$

$$(e) \int_2^4 \int_y^{10-y} y \, dx dy;$$

$$(f) \int_1^2 \int_x^{2x} \frac{x}{y} \, dx dy.$$

Megoldás:

Fubini tételét használva két egymás utáni egyszeres integrál kiszámítására vezetjük vissza a kettős integrálok kiszámítását.

(a) Téglalap tartományon integrálunk:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \int_1^5 (x + 2y) \, dx dy &= \int_2^3 \left(\int_1^5 (x + 2y) \, dx \right) dy = \int_2^3 \left[\frac{x^2}{2} + 2yx \right]_1^5 dy = \\ &= \int_2^3 \left(\left(\frac{25}{2} + 10y \right) - \left(\frac{1}{2} + 2y \right) \right) dy = \int_2^3 (12 + 8y) \, dy = \\ &= [12y + 4y^2]_2^3 = (36 + 36) - (24 + 16) = 32. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 x e^{x+y} \, dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 x e^{x+y} \, dy dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 x e^{x+y} \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 [x e^{x+y}]_0^1 dx = \int_0^1 (x e^{x+1} - x e^x) \, dx = (e - 1) \int_0^1 x e^x \, dx = \\ &= (e - 1) [x e^x - e^x]_0^1 = e - 1. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \int_0^1 x \sqrt{x^2 + y} \, dx dy &= \int_1^4 \left(\frac{1}{2} \int_0^1 2x (x^2 + y)^{\frac{1}{2}} \, dx \right) dy = \int_1^4 \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (x^2 + y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 dy = \\
&= \frac{1}{3} \int_1^4 \left((1 + y)^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} \right) dy = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{5} (1 + y)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_1^4 = \\
&= \frac{2}{15} \left(\left(5^{\frac{5}{2}} - 32 \right) - \left(2^{\frac{5}{2}} - 1 \right) \right) = \frac{2}{15} \left(25\sqrt{5} - 4\sqrt{2} - 31 \right).
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x^2}^{x^3} (x^2 + y^2) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x^3} (x^2 + y^2) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{x^3} dx = \\
&= \int_0^1 \left(\left(x^5 + \frac{x^9}{3} \right) - \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) \right) dx = \\
&= \left[\frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{30} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} = -\frac{1}{21}.
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \int_y^{10-y} y \, dx dy &= \int_2^4 \left(y \int_y^{10-y} 1 \, dx \right) dy = \int_2^4 y [x]_y^{10-y} dy = \\
&= \int_2^4 (10y - y^2) \, dy = \left[5y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_2^4 = \frac{68}{3}.
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_x^{2x} \frac{x}{y} \, dy dx &= \int_1^2 \left(x \int_x^{2x} \frac{1}{y} \, dy \right) dx = \int_1^2 x [\ln y]_x^{2x} dx = \\
&= \int_1^2 (x \ln(2x) - x \ln x) \, dx = \int_1^2 (x (\ln 2 + \ln x) - x \ln x) \, dx = \\
&= \int_1^2 x \ln 2 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

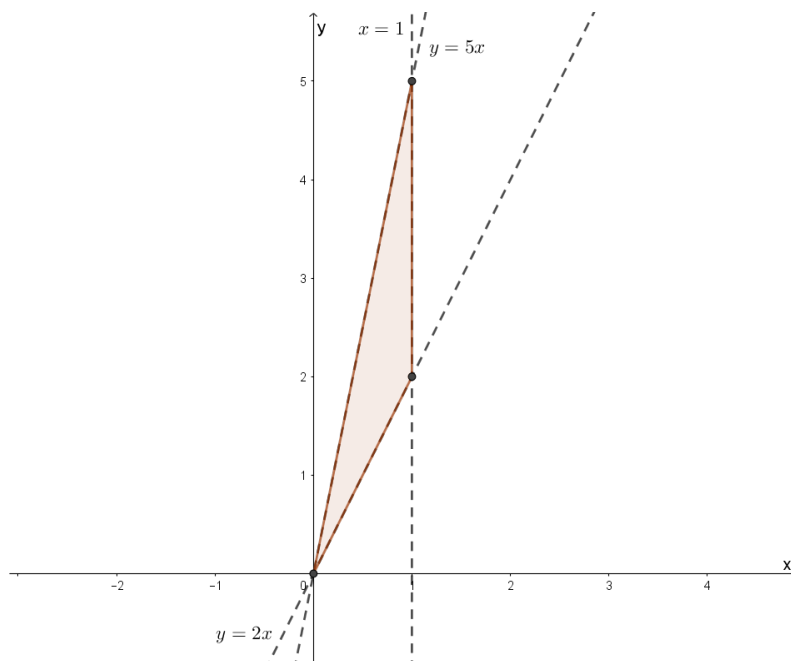
2. Számítsuk ki a

$$\iint_T y^2 dx dy$$

kettős integrált, ahol T az $y = 2x$, az $y = 5x$ és az $x = 1$ egyenesek által határolt tartomány!

Megoldás:

Vázoljuk az integrálási tartományt!



Az $y = 2x$ és az $y = 5x$ egyenesek az origóban metszik egymást. Ha $0 \leq x \leq 1$, akkor $2x \leq y \leq 5x$, azaz

$$\begin{aligned} \iint_T y^2 dx dy &= \int_0^1 \int_{2x}^{5x} y^2 dy dx = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{2x}^{5x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (125x^3 - 8x^3) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 117x^3 dx = \frac{39}{4} [x^4]_0^1 = \frac{39}{4}. \end{aligned}$$

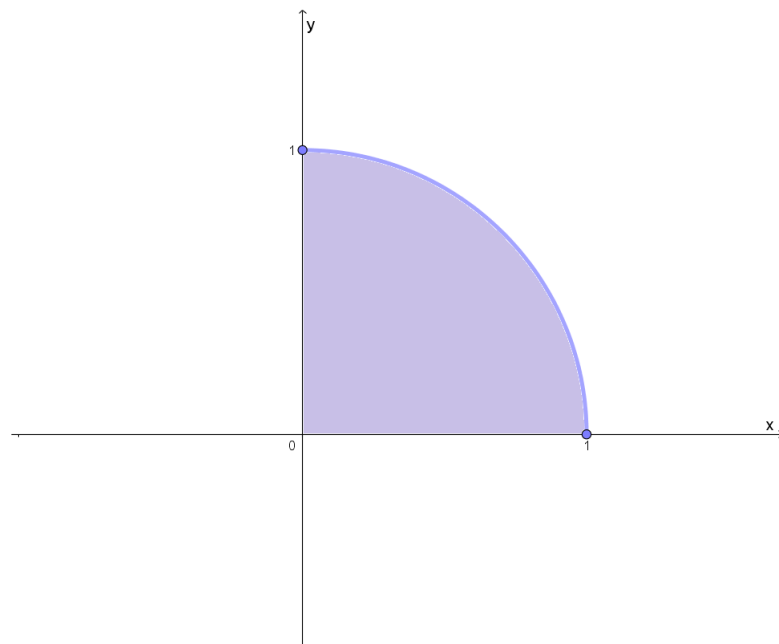
3. Számítsuk ki az $f(x, y) = xy$ kétváltozós függvény kettős integrálját a

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

tartományra!

Megoldás:

A T tartomány az origó középpontú, egység sugarú kör lap első síknegyedbe eső része. Vázoljuk az integrálációs tartományt!



Vagyis:

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\},$$

így

$$\begin{aligned} \iint_T xy \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x (1-x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Oldjuk meg a feladatot poláris koordinátákra való áttéréssel is! Ekkor:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \text{és} \quad dx dy = r dr d\varphi.$$

Tehát:

$$\begin{aligned} \iint_T xy \, dx dy &= \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi \cdot r \, d\varphi dr = \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \\ &= \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \cdot \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. Poláris koordinátákra történő áttéréssel számítsuk ki az alábbi kettős integrálokat!

$$(a) \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx;$$

$$(b) \int_{-2-\sqrt{4-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x dy dx;$$

$$(c) \int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy;$$

$$(d) \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2} dy dx.$$

Megoldás:

(a)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ dx dy = r dr d\varphi \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right\} = \int_0^\pi \int_0^1 r^2 r dr d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\varphi = \int_0^\pi \frac{1}{4} d\varphi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

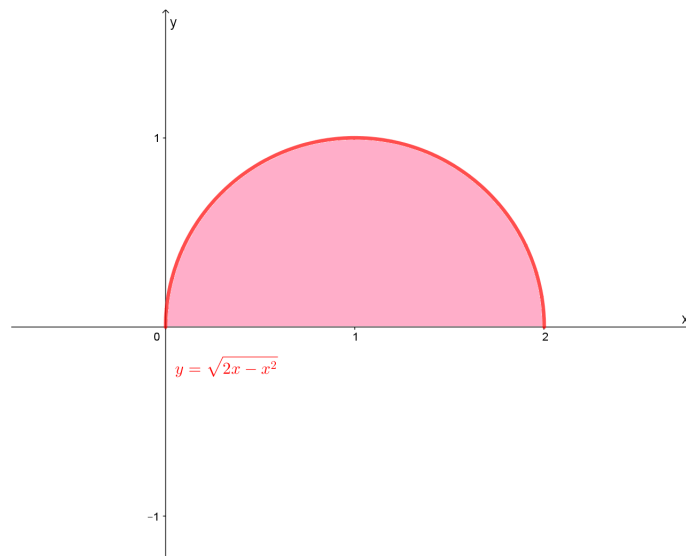
(b)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-2-\sqrt{4-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x dy dx = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ dx dy = r dr d\varphi \end{array} \right\} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^2 (r \cos \varphi) r dr d\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos \varphi) \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 d\varphi = \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = -\frac{16}{3}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ dx dy = r dr d\varphi \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right\} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 e^{r^2} r dr d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left[e^{r^2} \right]_0^3 d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (e^9 - 1) d\varphi = \frac{\pi}{2} (e^9 - 1). \end{aligned}$$

(d) Vázoljuk az integrációs tartományt!



Az $y = \sqrt{2x - x^2}$ görbe poláregyenlete $r = 2 \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, tehát

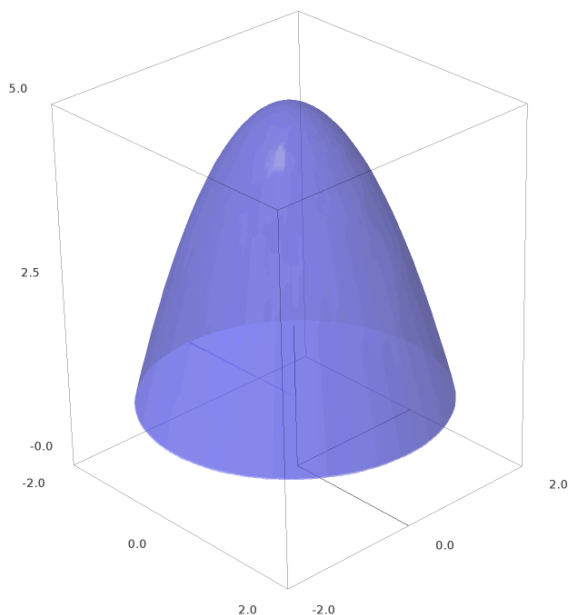
$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2} \, dy \, dx = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{4-(x^2+y^2)} \, dy \, dx = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ dx \, dy = r \, dr \, d\varphi \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} \left(\sqrt{4-r^2} \right) r \, dr \, d\varphi = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} \int_0^{2 \cos \varphi} -2r (4-r^2)^{\frac{1}{2}} \, dr \right) d\varphi = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3} \left[(4-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \left(-\frac{1}{3} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((4 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) d\varphi = \\
 &= \left(-\frac{1}{3} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 \sin^3 \varphi - 8) \, d\varphi = \left(-\frac{8}{3} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi - 1) \, d\varphi = \\
 &= \left(-\frac{8}{3} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi - \cos^2 \varphi \sin \varphi - 1) \, d\varphi = \left(-\frac{8}{3} \right) \left[-\cos \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3} - \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= -\frac{16}{9} + \frac{4}{3} = -\frac{4}{9}.
 \end{aligned}$$

5. Számítsa ki az alábbi felületek által határolt térrész térfogatát:

- (a) $z = 5 - x^2 - y^2$, $z = 1$.
- (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $2z = x^2 + y^2$.
- (c) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (d) $x^2 + y^2 = 4$, $z = x + y + 10$, $z = 0$.

Megoldás:

- (a) A $z = 5 - x^2 - y^2$ felület egy lefelé nyíló paraboloid, amit alulról zár a $z = 1$ vízszintes sík.



Keressük meg a két felület metszetét:

$$\begin{aligned} 5 - x^2 - y^2 &= 1 \\ 4 - x^2 - y^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

Ez egy 2 sugarú, origó középpontú kör, eddig nyílik ki a paraboloid, amíg eléri a $z = 1$ síkot, tehát ezen a körön belül tart a térrész, aminek a térfogatát ki kell számolni. Ezt közrezárják az $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$ és $g(x, y) = 1$ függvények, tehát ezek különbségét

kell integrálni az $x^2 + y^2 \leq 4$ körlemezén. Ezt polárkoordinátára való áttéréssel érdemes számolni.

$$\begin{aligned}
 \mu(V) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (5 - x^2 - y^2 - 1) \, dx dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 (4 - r^2) r \, dr d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 (4r - r^3) \, dr d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} \right) d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} 4 \, d\varphi = 2\pi \cdot 4 = 8\pi.
 \end{aligned}$$

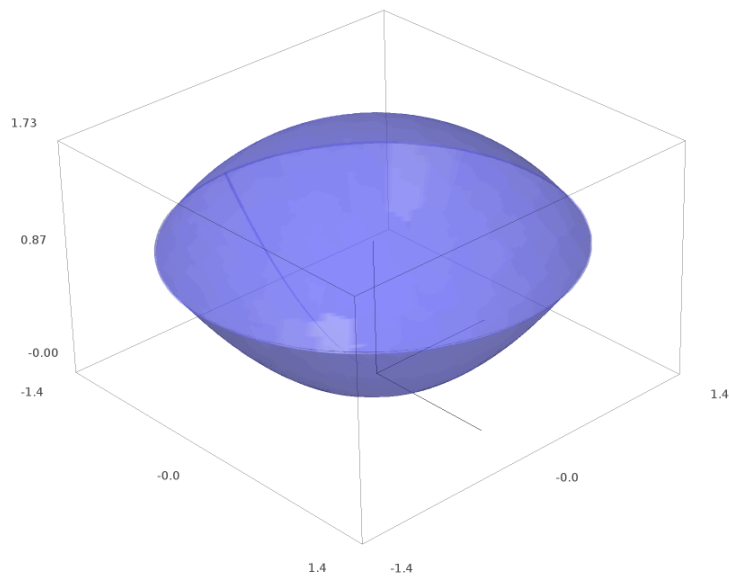
- (b) A $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ egy $\sqrt{3}$ sugarú gömb, a $2z = x^2 + y^2$ pedig egy felfele nyíló paraboloid. Metszetük:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ 2z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

A második egyenletet az elsőbe helyettesítve:

$$\begin{aligned}
 2z + z^2 &= 3 \\
 z^2 + 2z - 3 &= 0,
 \end{aligned}$$

azaz $z_1 = -3$, $z_2 = 1$. A második egyenlet alapján z nem lehet negatív, tehát csak a $z = 1$ síkban van megoldás. Itt egy $\sqrt{2}$ sugarú kör van, ugyancsak a második egyenlet miatt. A paraboloid az origóból indul, és a gömb zárja felül, tehát az origó középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú körlemezén kell integrálni.



A térrészt közrezáró függvényeket megkapjuk, ha kifejezzük z -t a felületeket megadó egyenletekből. A gömb esetében:

$$g(x, y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2},$$

a paraboloid esetében pedig

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} \mu(V) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2} \sqrt{3 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{2} dx dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3 - r^2} - \frac{r^2}{2} \right) r dr d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} r \sqrt{3 - r^2} - \frac{r^3}{2} dr d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{(3 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{-2 \cdot \frac{3}{2}} - \frac{r^4}{8} \right]_0^{\sqrt{2}} d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{(3 - 2)^{\frac{3}{2}}}{-3} - \frac{4}{8} - \frac{(3 - 0)^{\frac{3}{2}}}{-3} d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{-3} - \frac{1}{2} + \sqrt{3} d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{3} - \frac{5}{6} d\varphi = 2\pi \left(\sqrt{3} - \frac{5}{6} \right). \end{aligned}$$

- (c) A $z = 6 - x^2 - y^2$ felület egy lefelé nyíló paraboloid. A z tengelyt $z = 6$ magasságban metszi. A $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ felület egy origó középpontú kúp. Metszetük:

$$\begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases}$$

azaz

$$6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

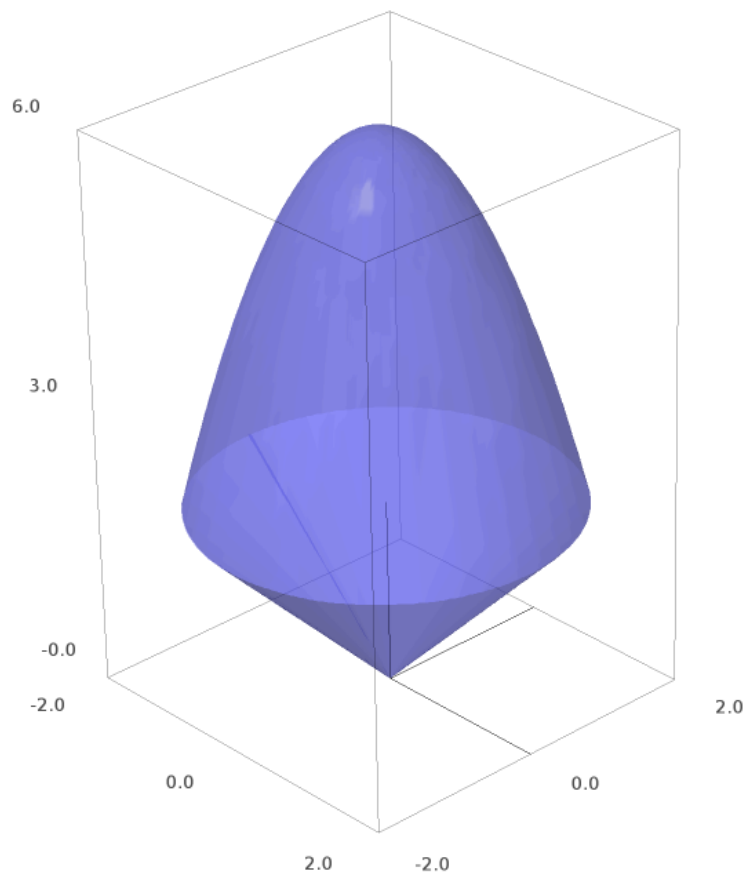
Ha $r^2 = x^2 + y^2$, akkor

$$\begin{aligned} 6 - r^2 &= r \\ r^2 + r - 6, \end{aligned}$$

tehát

$$r_1 = -3 \quad \text{és} \quad r_2 = 2.$$

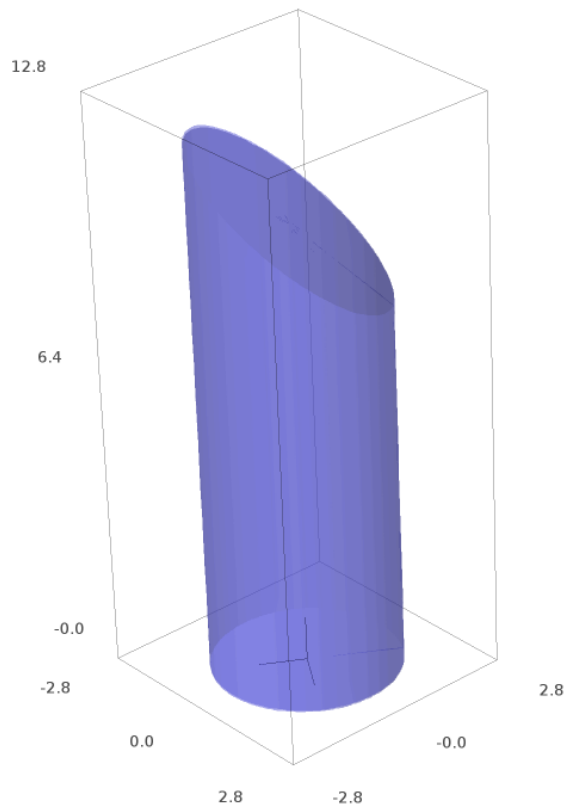
r a z -tengelytől való távolságot fejezi ki, tehát nem lehet negatív, ezért az egyetlen megoldás $r = 2$. Ekkor z értéke is 2. A két felület metszete egy 2 sugarú kör a $z = 2$ síkban. Ezen a körön belül a kúp felső részét a paraboloid zárja.



Az előző két feladathoz hasonlóan:

$$\begin{aligned}
 \mu(V) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} (6 - r^2 - r) \, r \, dr d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} (6r - r^3 - r^2) \, dr d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(3 \cdot 2 - \frac{4}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(5 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) d\varphi \\
 &= 2\pi \left(5 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right).
 \end{aligned}$$

- (d) $x^2 + y^2 = 4$ egy 2 sugarú henger, aminek a z -tengely a tengelye. A $z = x + y + 10$ egy sík egyenlete. Az origó körül pozitív értékeket vesz fel (a +10 miatt), ezért felülről zárja a hengert, a $z = 0$ sík pedig alulról.



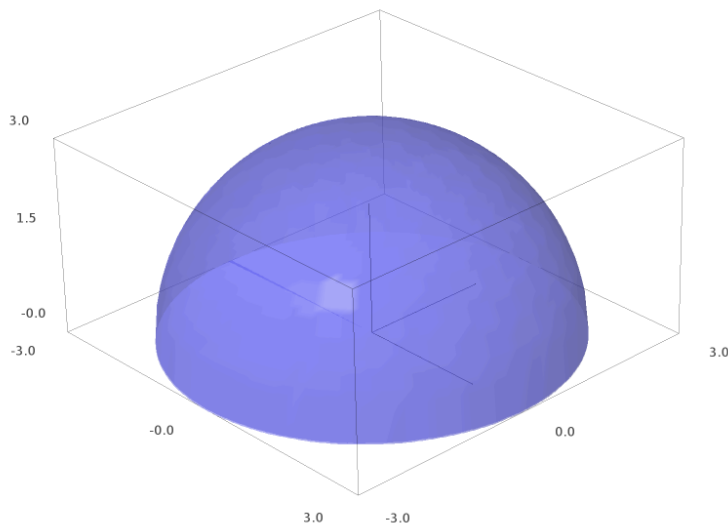
Tehát az $f(x, y) = x + y + 10$ és $g(x, y) = 0$ függvények zárják köre a térrészt, és a henger alapköre felett kell integrálni.

$$\begin{aligned}
 \mu(V) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} x + y + 10 \, dx dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 (r \cos(\varphi) + r \sin(\varphi) + 10)r \, dr d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 r^2 (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) + 10r \, dr d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) + 5r^2 \right]_0^2 d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{2^3}{3} (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) + 5 \cdot 2^2 d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{8}{3} (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) + 20 d\varphi \\
 &= \left[\frac{8}{3} (\sin(\varphi) - \cos(\varphi)) + 20\varphi \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{8}{3} (0 + 1 - (0 + 1)) + 20 \cdot 2\pi = 40\pi.
 \end{aligned}$$

(Az eredmény megfelel annak, hogy a térrész egy 20 egység magas henger kettévágva a felénél egy ferde síkkal.)

6. Számítsa ki integrálszámítás segítségével az $R = 3$ sugarú gömb térfogatát és felszínét!

Megoldás: Egyszerűbb a gömb felső felét számolni, ugyanis azt alulról az xy sík határolja.



Kezdjük a térfogattal. Felülről az a függvény határolja, amit az egyenletből kapunk, a z kifejezésével. A 3 sugarú gömb egyenlete: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, tehát

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

A gömb a 3 sugarú kör felett van, ezért ezen kell integrálni.

$$\begin{aligned} \mu(V_{fg}) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sqrt{9 - x^2 - y^2} \, dxdy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^3 \sqrt{9 - r^2} \cdot r \, dr d\varphi \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^3 \sqrt{9 - r^2} \cdot (-2r) \, dr d\varphi \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{(9 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^3 d\varphi \\ &= -\frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (9 - 3^2)^{\frac{3}{2}} - (9 - 0)^{\frac{3}{2}} d\varphi \\ &= -\frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (-27) d\varphi \\ &= 9 \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 d\varphi = 18\pi. \end{aligned}$$

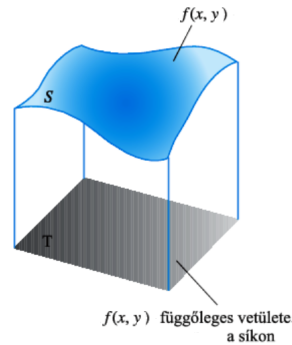
Mivel csak a gömb felét számoltuk, a tényleges térfogat: $\mu(V_g) = 36\pi$.

A felszín kiszámításához ugyancsak az $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ függvényt használjuk.

A felület felszínének számítására az általános képlet:

$$\mu(A) = \iint_T \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \, dxdy,$$

ahol T a $z = f(x, y)$ kétváltozós függvény xy -síkbeli vetülete:



Esetünkben:

$$f'_x = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \quad f'_y = \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}},$$

ezért

$$\begin{aligned} (f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1 &= \frac{x^2}{9-x^2-y^2} + \frac{y^2}{9-x^2-y^2} + 1 \\ &= \frac{x^2 + y^2 + 9 - x^2 - y^2}{9-x^2-y^2} \\ &= \frac{9}{9-x^2-y^2} \end{aligned}$$

és így a félgömb felszíne:

$$\begin{aligned} \mu(A_{fg}) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \, dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \sqrt{\frac{9}{9-x^2-y^2}} \, dx dy \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^3 \sqrt{\frac{9}{9-r^2}} \cdot r \, dr d\varphi \\ &= \frac{3}{-2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^3 (9-r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2r) \, dr d\varphi \\ &= \frac{3}{-2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{(9-r^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{r=0}^3 d\varphi \\ &= -3 \int_{\varphi=0}^{2\pi} (9-9)^{\frac{1}{2}} - (9-0)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ &= 9 \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi = 18\pi. \end{aligned}$$

A gömb felszíne pedig:

$$\mu(A_g) = 36\pi.$$

7. Számítsa ki annak a térrésznek a térfogatát, amelyet a $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, a $z = x^2 + y^2$ paraboloid és az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű henger határol!

Megoldás: A térrészt a paraboloid határolja alulról, és a kúp felülről. Mindkettő egyenletéből ki van fejezve a z , így ezen függvények különbségét kell integrálni. Az integrálás tartományát a henger határozza meg, mivel oldalról ez határolja a térrészt. A henger sugara 3, ezért a 3 sugarú körlap felett kell integrálni.

$$\begin{aligned}\mu(V) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} 16 - \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 + y^2 \, dx dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^3 (16 - r - r^2) r \, dr d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^3 16r - r^2 - r^3 \, dr d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[8r^2 - \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^3 d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} 72 - 9 - \frac{81}{4} d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{171}{4} d\varphi = \frac{171}{2} \pi.\end{aligned}$$

