A 8. előadáshoz javasolt feladatok részletesen kidolgozott megoldásai

Parciális deriváltak

1. Határozzuk meg az alábbi függvények elsőrendű parciális deriváltjait!

(a) $f(x,y)=x^3+4xy-y^2+6$;

(b) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$;

(c) $f(x,y)=x^y$;

(d) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$;

(e) $f(x,y)=e^{xy}$;

(f) $f(x,y,z)=x\operatorname{arctg}\dfrac{z}{y}$;

(g) $f(x,y)=\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^7$;

(h) $f(x,y,z)=2^{x^2-2y^2+\cos\sqrt{z}}$.

Megoldás:

(a) Ha $f(x,y)=x^3+4xy-y^2+6$, akkor

$$f'_x=3x^2+4y \qquad \text{és} \qquad f'_y=\ 4x-2y.$$

(b) Ha $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, akkor

$$f'_x=\frac{2x}{x^2+y^2} \qquad \text{és} \qquad f'_y=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

(c) Ha $f(x,y)=x^y$, akkor

$$f'_x=yx^{y-1} \qquad \text{és} \qquad f'_y=x^y\ln\,(x).$$

(d) Ha $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$, akkor

$$f'_x=\ \frac{1}{x-y}-\frac{x+y}{(x-y)^2} \qquad \text{és} \qquad f'_y=\ \frac{x+y}{(x-y)^2}+\frac{1}{x-y}.$$

(e) Ha $f=e^{xy}$, akkor

$$f'_x=ye^{xy} \qquad \text{és} \qquad f'_y=xe^{x\ y}.$$

(f) Ha $f(x,y,z)=x\operatorname{arctg}\left(\dfrac{z}{y}\right)$, akkor

$$f'_x=\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{y}\right), \qquad f'_y=-\frac{xz}{y^2\ \left(\dfrac{z^2}{y^2}+1\right)} \qquad \text{és} \qquad f'_z=\frac{x}{y\ \left(\dfrac{z^2}{y^2}+1\right)}.$$

(g) Ha $f(x,y)=\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^7$, akkor

$$f'_x=7\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^6 \qquad \text{és} \qquad f'_y=7\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^6.$$

(h) Ha $f(x,y,z)=2^{x^2-2y^2+\cos\left(\sqrt{z}\right)}$, akkor

$$f'_x=x\ \ln(2)\cdot 2^{x^2-2y^2+\cos\left(\sqrt{z}\right)+1},\quad f'_y=\ y\ln(2)\cdot\left(-2^{x^2-2y^2+\cos\left(\sqrt{z}\right)+2}\right),$$

$$f'_z=-\frac{\ln(2)\cdot\sin\left(\sqrt{z}\right)2^{x^2-2y^2+\cos\left(\sqrt{z}\right)-1}}{\sqrt{z}}.$$

2. Határozzuk meg az f''_{xy} és az f'''_{yxy} parciális deriváltakat, ha $f(x,y)=x^3y^5-2x^2y^3+8x$!

Megoldás:

(a) Először az x-szerinti elsőrendű parciális deriváltat határozzuk meg, majd ennek az y változó szerinti parciális deriváltját:

$$f'_x=3x^2y^5-4xy^3+8 \qquad \text{és} \qquad f''_{xy}=(f'_x)'_y=15x^2y^4-12xy^2.$$

(b) Felhasználjuk, hogy $f'''_{yxy}=(f''_{xy})'_y$, így

$$f'''_{yxy}=(15x^2y^4-12xy^2)'_y=60x^2y^3-24xy.$$

3. Határozzuk meg az $f''_{xx}(1,0,1)$ és az $f'''_{yyx}(1,1,1)$ értékeket, ha $f(x,y,z)=e^{xz-y^2}$!

Megoldás:

(a) Ha $f(x,y,z)=e^{xz-y^2}$, akkor

$$f'_x=ze^{xz-y^2} \qquad \text{és} \qquad f''_{xx}=z^2\ e^{xz-y^2}.$$

Azaz:

$$f''_{xx}(1,0,1)=e.$$

(b) Először f'''_{yyx}-t határozzuk meg:

$$f'_y=-2ye^{xz-y^2},\quad f''_{yy}=\ 4y^2e^{xz-y^2}-2e^{xz-y^2},\quad f'''_{yyx}=4y^2ze^{xz-y^2}-2ze^{xz-y^2}.$$

Tehát:

$$f'''_{yyx}(1,1,1)=2.$$

4. Igazoljuk, hogy a $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ kétváltozós függvény teljesíti a $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ egyenlőséget!

   Megoldás: Ha $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, akkor

$$z'_x = \frac{1}{y\,\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)}, \qquad z''_{xx} = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$
$$z'_y = -\frac{x}{y^2\,\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)}, \qquad z''_{yy} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

   Így:

$$z''_{xx} + z''_{yy} = 0.$$

5. Mivel egyenlő a

$$-\frac{x}{y}\cdot f'_x + y\cdot f''_{yy}$$

   kifejezés, ha $f(x,y) = y\cdot \ln\sqrt{xy}$?

   Megoldás: Ha $f(x,y) = y\ln\left(\sqrt{xy}\right)$, akkor

$$f'_x = \frac{y}{2x}, \qquad f'_y = \ln\left(\sqrt{xy}\right) + \frac{1}{2}, \qquad \text{és} \qquad f'_{yy} = \frac{1}{2y}.$$

   Tehát

$$-\frac{x}{y}\cdot f'_x + y\cdot\ f''_{yy} = -\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{2x} + y\cdot\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0.$$

6. Mivel egyenlő az

$$x\cdot f'_x + y\cdot f'_y$$

   kifejezés, ha $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y}$?

   Megoldás: Először az elsőrendű parciális deriváltakat adjuk meg:

$$f'_x = -\frac{y}{(x+y)^2}, \qquad f'_y = \frac{x}{(x+y)^2}.$$

   Azaz:

$$x\,f'_x + y\,f'_y = -\frac{xy}{(x+y)^2} + \frac{xy}{(x+y)^2} = 0.$$

7. Mivel egyenlő a $2x\cdot f'_x - y\cdot f'_y$ kifejezés, ha $f(x,y) = 2\ln\dfrac{x}{y} + \dfrac{xy^2}{2}$?

   Megoldás:

$$f'_x = \frac{2}{x} + \frac{y^2}{2}, \qquad f'_y = xy - \frac{2}{y},$$
$$2x\,f'_x - y\,f'_y = 2x\left(\frac{2}{x}+\frac{y^2}{2}\right) - y\,\left(xy - \frac{2}{y}\right) = 6.$$

8. Számítsuk ki az alábbi iránymenti deriváltakat!

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $P(2,1)$, $\mathbf{v} = (3,4)$.

   (b) $f(x,y) = \sin(x+y)$; $P\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$, $\mathbf{v} = \left(\sqrt{3}, 1\right)$.

   (c) $f(x,y) = xe^y - ye^x$; $P(0,0)$, $\mathbf{v} = (2,5)$.

   (d) $f(x,y) = \dfrac{\ln x}{\ln y}$; $P(e, e^2)$, $\mathbf{v} = (12,5)$.

   (e) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$; $P(1,1)$, a $\mathbf{v}$ vektor $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ szöget zár be az x- tengely pozitív irányával.

   (f) $f(x,y)$ =sh$(x+y)$ch$(x-y)$; $P(0,0)$, a $\mathbf{v}$ vektor $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ szöget zár be az x- tengely pozitív irányával.

   (g) $f(x,y) = 2^{\sqrt{x^2+y}}$; $P(3,7)$, a $\mathbf{v}$ vektor $\varphi = \pi$ szöget zár be az x- tengely pozitív irányával.

   (h) $f(x,y) = \sqrt{xy}$; $P(1,4)$, a $\mathbf{v}$ vektor $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ szöget zár be az x- tengely pozitív irányával.

Megoldás: A megoldás menete mindegyik feladatban azonos. Kiszámoljuk a függvény parciális deriváltjait, kiértékeljük őket a P pontban. A kapott számok a gradiens-vektor koordinátái. Ennek skaláris szorzata a $\frac{\mathbf{v}}{\|v\|}$ vektorral az iránymenti derivált értéke.

(a) $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$, tehát

$$f'_x(2,1) = 4, \quad f'_y(2,1) = 2.$$

A gradiens vektor a P pontban: $\nabla f_P = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Továbbá

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Így az iránymenti derivált:

$$D_{\mathbf{v}} f(P) = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \nabla f_P \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{5}(4 \cdot 3 + 2 \cdot 4) = 4.$$

(b) Hasonlóan: $f'_x = \cos(x+y)$, $f'_y = \cos(x+y)$,

$$f'_x\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad f'_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

A gradiens vektor a P pontban: $\nabla f_P = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$, és

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2.$$

Tehát az iránymenti derivált:

$$D_{\mathbf{v}} f(P) = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \nabla f_P \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}.$$

(c) $f'_x = -ye^x + e^y$, $f'_y = xe^y - e^x$,

$$\begin{aligned}
&f'_x(0,0) = 1, \quad f'_y(0,0) = -1,\\
&\nabla f_P = \mathbf{i} - \mathbf{j},\\
&\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}\\
&D_{\mathbf{v}} f(P) = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \nabla f_P \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{29}}(1 \cdot 2 - 1 \cdot 5) = -\frac{3}{29}\sqrt{29}.
\end{aligned}$$

(d) $f'_x = \dfrac{1}{x \ln(y)}$, $f'_y = -\dfrac{\ln x}{y \ln(y)^2}$,

$$\begin{aligned}
&f'_x(e, e^2) = \frac{1}{2}e^{-1}, \quad f'_y(e, e^2) = -\frac{1}{4}e^{-2},\\
&\nabla f_P = \frac{1}{2}e^{-1}\mathbf{i} - \frac{1}{4}e^{-2}\mathbf{j},\\
&\|\mathbf{v}\| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13\\
&D_{\mathbf{v}} f(P) = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \nabla f_P \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}e^{-1} \cdot 12 - \frac{1}{4}e^{-2} \cdot 5\right) = \frac{6}{13}e^{-1} - \frac{5}{52}e^{-2}.
\end{aligned}$$

(e) A gradiens-vektort ugyan úgy számoljuk: $f'_x = \dfrac{y}{(x+y)^2}$, $f'_y = -\dfrac{x}{(x+y)^2}$,

$$\begin{aligned}
&f'_x(1,1) = \frac{1}{4}, \quad f'_y(1,1) = -\frac{1}{4},\\
&\nabla f_P = \frac{1}{4}\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

A $\mathbf{v}$ vektor pedig

$$\mathbf{v} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j},$$

Ezzel a megadással mindig $\|\mathbf{v}\| = 1$.

$$D_{\mathbf{v}} f(P) = \nabla f_P \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}.$$

(f) $f'_x = \cosh(x+y)\cosh(x-y) + \sinh(x+y)\sinh(x-y)$, $f'_y = \cosh(x+y)\cosh(x-y) - \sinh(x+y)\sinh(x-y)$,

$$\begin{aligned}
&f'_x(0,0) = 1, \quad f'_y(0,0) = 1,\\
&\nabla f_P = \mathbf{i} + \mathbf{j}.
\end{aligned}$$

A $\mathbf{v}$ vektor pedig

$$\mathbf{v} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$$

és így,

$$D_{\mathbf{v}} f(P) = \nabla f_P \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

(g) $f'_x = \dfrac{2^{\sqrt{x^2+y}} x \ln(2)}{\sqrt{x^2+y}}$, $f'_y = \dfrac{2^{\sqrt{x^2+y}} \ln(2)}{2\sqrt{x^2+y}}$,

$$\begin{aligned}
&f'_x(3,7) = 12\ln(2), \quad f'_y(3,7) = 2\ln(2),\\
&\nabla f_P = 12\ln(2)\,\mathbf{i} + 2\ln(2)\,\mathbf{j},\\
&\mathbf{v} = \cos(\pi)\,\mathbf{i} + \sin(\pi)\,\mathbf{j} = -1\cdot\mathbf{i} + 0\cdot\mathbf{j} = -\mathbf{i},\\
&D_{\mathbf{v}} f(P) = \nabla f_P \cdot \mathbf{v} = 12\ln(2)\cdot -1 + 2\ln(2)\cdot 0 = -12\ln(2).
\end{aligned}$$

(h) $f'_x = \dfrac{y}{2\sqrt{xy}}$, $f'_y = \dfrac{x}{2\sqrt{xy}}$,

$$\begin{aligned}
&f'_x(1,4) = 1, \quad f'_y(1,4) = \frac{1}{4},\\
&\nabla f_P = \mathbf{i} + \frac{1}{4}\mathbf{j},\\
&\mathbf{v} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j},\\
&D_{\mathbf{v}} f(P) = \nabla f_P \cdot \mathbf{v} = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

9. Írjuk fel az alábbi felületek esetén a felületi normálist, valamint az érintősík egyenletét a megadott pontban!

   (a) $f(x,y) = x^3y^2 - 2y$; $P(1,2,0)$

   (b) $z = e^{xy}\sin(x+y)$; $P\left(\frac{\pi}{6}, 0, \frac{1}{2}\right)$

   (c) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; $P(1,0,0)$

   (d) $z = x^2e^{-y}$; $P(1,0,1)$

   (e) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$; $P(2,-1,3)$

   (f) $xyz - 4z^3 = -30$; $P(1,1,2)$

   (g) $xe^y\cos z = 1$; $P(1,1,1)$

   (h) $z^x + z^y = 12$; $P(2,3,2)$

   Megoldás:

   Az (a) és (c) feladatokban a felületet kétváltozós függvény gráfja adja meg, azaz a felület egy pontjának a z koordinátája az $f(x,y)$ függvényérték. A többi feladatban a felületet egyenlet határozza meg. Ennek általános alakja $F(x,y,z) = 0$. Először az utóbbi eset megoldását nézzük meg, mert az első eset erre visszavezethető.

   Az $F(x,y,z) = 0$ felület normálisát minden pontban a gradiens vektor adja meg. Egy P ponton átmenő érintősík azokból az (x,y,z) pontokból áll, amelyekre $(x,y,z) - P$ merőleges a gradiensre, vagyis, amikor
$$\nabla F_P \cdot ((x,y,z) - P) = 0.$$

Ha $P = (p_x, p_y, p_z)$, meg is kapjuk az érintősík egyenletét:

$$\begin{aligned}
\nabla F_P \cdot ((x, y, z) - (p_x, p_y, p_z)) &= 0 \\
(F'_x(P), F'_y(P), F'_z(P)) \cdot (x - p_x, y - p_y, z - p_z) &= 0 \\
F'_x(P)(x - p_x) + F'_y(P)(y - p_y) + F'_z(P)(z - p_z) &= 0.
\end{aligned}$$

Ennek gyakran használt átrendezett alakja:

$$F'_x(P)x + F'_y(P)y + F'_z(P)z = F'_x(P)p_x + F'_y(P)p_y + F'_z(P)p_z.$$

Amikor a felületet függvénnyel adjuk meg, akkor $z = f(x, y)$, azaz $f(x, y) - z = 0$, tehát az előző megoldás alkalmazható $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ és $p_z = f(p_x, p_y)$ választással. Ekkor $F'_x = f'_x$, $F'_y = f'_y$, $F'_z = -1$, tehát a felületi normális $(f'_x, f'_y, -1)$ és:

$$f'_x(P)(x - p_x) + f'_y(P)(y - p_y) - (z - f(p_x, p_y)) = 0$$

vagy

$$f'_x(P)x + f'_y(P)y - z = f'_x(P)p_x + f'_y(P)p_y - f(p_x, p_y).$$

Ugyan ez a megoldás alkalmazható akkor is, amikor a felület egyenlettel van megadva, de abból ki van fejezve a z, hiszen az egyenlet ekkor $z = f(x, y)$ alakú. Ilyenek a (b), (d) és (e) feladatok.

(a) $f'_x = 3x^2y^2$, $f'_y = 2x^3y - 2$, és

$$f'_x(1, 2) = 12, \quad f'_y(1, 2) = 2.$$

Tehát a felületi normális a P pontban $(12, 2, -1)$, és az érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned}
12x + 2y - z &= 12 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 0 \\
12x + 2y - z &= 16.
\end{aligned}$$

(b) Mivel z ki van fejezve az egyenletből, ugyan úgy járhatunk el, mint az előző feladatban, csak $f(x, y) = e^{xy} \sin(x + y)$ választással.

$$\begin{aligned}
&f'_x = ye^{xy} \sin(x + y) + \cos(x + y)\, e^{xy}, \quad f'_y = xe^{xy} \sin(x + y) + \cos(x + y)\, e^{xy}, \\
&f'_x\left(\frac{\pi}{6}, 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'_y\left(\frac{\pi}{6}, 0\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Tehát a felületi normális a P pontban $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$, és az érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) y - z &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 0 - \frac{1}{2} \\
\frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) y - z &= \frac{1}{12}\sqrt{3}\pi - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(c) A megoldás menete azonos az (a) feladatéval.
$f'_x = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f'_y = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, és

$$f'_x(1,0) = 1, \quad f'_y(1,0) = 0.$$

Tehát a felületi normális a P pontban $(1,0,-1)$, és az érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 0 \cdot y - z &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 \\ x - z &= 1. \end{aligned}$$

(d) A feladat ugyan úgy oldható meg, mint a (b), $f(x,y) = x^2 e^{-y}$ választással.

$$\begin{aligned} f'_x &= 2xe^{-y}, \quad f'_y = -x^2 e^{-y}, \\ f'_x(1,0) &= 2, \quad f'_y(1,0) = -1. \end{aligned}$$

Tehát a felületi normális a P pontban $(2,-1,-1)$, és az érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned} 2x - 1 \cdot y - z &= 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 1 \\ 2x - y - z &= 1. \end{aligned}$$

(e) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ választással.

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{2y}{(x+y)^2}, \quad f'_y = \frac{-2x}{(x+y)^2}, \\ f'_x(2,-1) &= -2, \quad f'_y(2,-1) = -4. \end{aligned}$$

Tehát a felületi normális a P pontban $(-2,-4,-1)$, és az érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned} -2x - 4y - z &= -2 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) - 3 \\ -2x - 4y - z &= -3 \\ 2x + 4y + z &= 3. \end{aligned}$$

(f) Rendezzük 0-ra az egyenletet:

$$xyz - 4z^3 + 30 = 0.$$

Azaz $F(x,y,z) = xyz - 4z^3 + 30$. Ekkor

$$F'_x = yz, \quad F'_y = xz, \quad F'_z = xy - 12z^2$$

és

$$f'_x(1,1,2) = 2, \quad f'_y(1,1,2) = 2, \quad f'_z(1,1,2) = -47.$$

Tehát a felületi normális a P pontban $(2,2,-47)$, és az érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned} 2x + 2y - 47z &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 47 \cdot 2 \\ 2x + 2y - 47z &= -90. \end{aligned}$$

(g) Ugyan úgy járunk el, mint az előző feladatban. 0-ra rendezve az egyenletet:

$$xe^y\cos(z) - 1 = 0.$$

Azaz $F(x, y, z) = xe^y\cos(z) - 1$.

$$F'_x = e^y\cos(z), \quad F'_y = xe^y\cos(z), \quad F'_z = -xe^y\sin(z),$$
$$f'_x(1,1,1) = e\cos(1), \quad f'_y(1,1,1) = e\cos(1), \quad f'_z(1,1,1) = -e\sin(1).$$

Tehát a felületi normális a P pontban $(e\cos(1), e\cos(1), -e\sin(1))$, és az érintősík egyenlete:

$$e\cos(1)x + e\cos(1)y - e\sin(1)z = e\cos(1)\cdot 1 + e\cos(1)\cdot 1 - e\sin(1)\cdot 1$$
$$\cos(1)x + \cos(1)y - \sin(1)z = 2\cos(1) - \sin(1).$$

(h) Most is rendezzük 0-ra az egyenletet:

$$z^x + z^y - 12 = 0.$$

Azaz $F(x, y, z) = z^x + z^y - 12$.

$$F'_x = z^x\ln(z), \quad F'_y = z^y\ln(z), \quad F'_z = xz^{x-1} + yz^{y-1},$$
$$f'_x(2,3,2) = 4\ln(2), \quad f'_y(2,3,2) = 8\ln(2), \quad f'_z(2,3,2) = 16.$$

Tehát a felületi normális a P pontban $(4\ln(2), 8\ln(2), 16)$, és az érintősík egyenlete:

$$4\ln(2)x + 8\ln(2)y + 16z = 4\ln(2)\cdot 2 + 8\ln(2)\cdot 3 + 16\cdot 2$$
$$4\ln(2)x + 8\ln(2)y + 16z = 32\ln(2) + 32$$
$$\ln(2)x + 2\ln(2)y + 4z = 8\ln(2) + 8$$

10. Adott az $f(x, y) = \cos\dfrac{\pi y}{x^2 + y^2}$ kétváltozós függvény.

(a) Írja fel az f függvény $P_0(2, 2)$ pontbeli gradiensét!

(b) Határozza meg az f függvény iránymenti deriváltját a $P_0(2, 2)$ ponton átmenő $\underline{v} = (1, 1)$ irányvektorú egyenes mentén!

(c) Írja fel a $z = f(x, y)$ felület $P_0(2, 2)$ pontbeli érintősíkját!

Megoldás:

$f'_x = -\dfrac{2\pi xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $f'_y = \dfrac{\pi(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$, és

$$f'_x(2,2) = -\frac{\pi}{8}, \quad f'_y(2,2) = 0.$$

Tehát a gradiens a P_0 pontban: $\nabla f_P = -\frac{\pi}{8}\mathbf{i}$. A v vektor hossza

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

és az iránymenti derivált:

$$D_{\underline{v}} f(P) = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \nabla f_P \cdot \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\pi}{8} \cdot 1 + 0 \cdot 1 \right) = -\frac{\sqrt{2}\pi}{16}.$$

Az érintősíkot úgy határozzuk meg, mint az előző feladatban. A felületi normális a P_0 pontban $(-\frac{\pi}{8}, 0, -1)$. Figyelembe véve, hogy $p_z = f(2,2) = \frac{\pi}{4}$, érintősík egyenlete:

$$-\frac{\pi}{8}x + 0 \cdot y - z = -\frac{\pi}{8} \cdot 2 + 0 \cdot 2 - \frac{\pi}{4}$$
$$-\frac{\pi}{8}x - z = -\frac{\pi}{2}$$
$$\pi x + 8z = 4\pi.$$

11. Számítsa ki az $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y^2}$ függvény $P_0(0,1)$ pontjában

   (a) az iránymenti deriváltat az $a = (2,\, 2\sqrt{3})$ irányban;
   (b) a $z = f(x,y)$ felület P_0 pontbeli érintősíkját!

Megoldás: A megoldás menete azonos az előző feladatéval.

$f'_x = \dfrac{1}{y^2\left(\frac{x^2}{y^4}+1\right)}$, $f'_y = -\dfrac{2\,x}{y^3\left(\frac{x^2}{y^4}+1\right)}$, és

$$f'_x(0,1) = 1, \quad f'_y(0,1) = 0.$$

Tehát a gradiens a P_0 pontban: $\nabla f_{P_0} = 1\mathbf{i}$. A v vektor hossza

$$\|a\| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4,$$

és az iránymenti derivált:

$$D_a f(P) = \frac{1}{\|a\|} \nabla f_P \cdot a = \frac{1}{4} \left(1 \cdot 2 + 0 \cdot 2\sqrt{3} \right) = \frac{1}{2}.$$

A felületi normális a P_0 pontban $(1, 0, -1)$. Figyelembe véve, hogy $p_z = f(0,1) = 0$, az érintősík egyenlete:

$$1 \cdot 2x + 0 \cdot y - z = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0$$
$$x - z = 0.$$

12. Határozzuk meg az alábbi $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvények Hesse-mátrixát!

   (a) $f(x,y) = x^3y + xy^3$;
   (b) $f(x,y) = e^{x-y}$;
   (c) $f(x,y) = \sin(xy)$;
   (d) $f(x,y) = x^y$;
   (e) $f(x,y) = \ln(1+xy)$.

Megoldás: Egy $f(x,y)$ függvény Hesse-mátrixa:

$$\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

(a)

$$\begin{bmatrix} 6\,xy & 3\,x^2+3\,y^2 \\ 3\,x^2+3\,y^2 & 6\,xy \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ -e^{x-y} & e^{x-y} \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} -y^2\sin(xy) & -xy\sin(xy)+\cos(xy) \\ -xy\sin(xy)+\cos(xy) & -x^2\sin(xy) \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} x^{y-2}(y-1)y & x^{y-1}y\log(x)+x^{y-1} \\ x^{y-1}y\log(x)+x^{y-1} & x^y\log(x)^2 \end{bmatrix}$$

(e)

$$\begin{bmatrix} -\frac{y^2}{(xy+1)^2} & \frac{1}{(xy+1)^2} \\ \frac{1}{(xy+1)^2} & -\frac{x^2}{(xy+1)^2} \end{bmatrix}$$

A kétváltozós függvény szélsőértéke

13. Határozzuk meg az alábbi többváltozós skalárértékű függvények ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$) lokális szélsőértékeit!

   (a) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2$;

   (b) $f(x,y) = (x-1)^2 + 4(y-3)^2$;

   (c) $f(x,y) = x^2 - y + e^y$;

   (d) $f(x,y) = x^4 - 3y^3 - 2xy$;

   (e) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + xy$;

   (f) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$.

Megoldás:

(a) A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele az elsőrendű parciális deriváltak eltűnése. Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltakból álló egyenletrendszert, majd oldjuk meg!

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 6x+2y=0 \\ f'_y &= 2x+2y=0 \end{aligned}\right\}$$

Innen $x = 0$ és $y = 0$. Tehát az egyetlen stacionárius pont: $P\,(0,0)$.

Határozzuk meg a másodrendű parciális deriváltakat!

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= (6x + 2y)'_x = 6, \\ f''_{xy} &= f''_{yx} = (2x + 2y)'_x = 2, \\ f''_{yy} &= (2x + 2y)'_y = 2. \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix:

$$H\,(x,y) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad H\,(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

ami pozitív definit, mert a determinánsa:

$$|H(0,0)| = 6 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 8 > 0$$

és $f''_{xx}\,(0,0) = 6 > 0$. Tehát $P\,(0,0)$ lokális minimumhely.

$$f_{min.} = 0.$$

(b) Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltakból álló egyenletrendszert, majd oldjuk meg!

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2\,(x-1) = 0 \\ f'_y &= 8\,(y-3) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Innen $x = 1$ és $y = 3$. Tehát az egyetlen stacionárius pont a $P\,(1,3)$.

Határozzuk meg a másodrendű parciális deriváltakat!

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= (2x - 2)'_x = 2, \\ f''_{xy} &= f''_{yx} = (2x - 2)'_y = 0, \\ f''_{yy} &= (8y - 24)'_y = 8. \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix:

$$H\,(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad H\,(1,3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},$$

ami pozitív definit, mert a determinánsa:

$$|H(1,3)| = 2 \cdot 8 - 0 \cdot 0 = 16 > 0$$

és $f''_{xx}\,(0,0) = 2 > 0$. Tehát $P\,(1,3)$ lokális minimumhely.

$$f_{min.} = f(1,3) = 0.$$

(c) Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltakból álló egyenletrendszert, majd oldjuk meg!

$$\left.\begin{array}{ll} f'_x & = 2x = 0 \\ f'_y & = -1 + e^y = 0 \end{array}\right\}$$

Innen $x = 0$ és $y = 0$. Tehát az egyetlen stacionárius pont az origó: $P(0,0)$.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx} = 2, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 0, \quad f''_{yy} = e^y.$$

Tehát a Hesse-mátrix:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & e^y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ami pozitív definit, mert a determinánsa:

$$|H(0,0)| = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 2 > 0$$

és $f''_{xx}(0,0) = 2 > 0$. Tehát $P(0,0)$ lokális minimumhely.

$$f_{min.} = f(0,0) = 1.$$

(d) Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltakból álló egyenletrendszert, majd oldjuk meg!

$$\left.\begin{array}{ll} f'_x & = 4x^3 - 2y = 0 \\ f'_y & = -9y^2 - 2x = 0 \end{array}\right\}$$

Ekkor $y = 2x^3$ és

$$-9y^2 - 2x = -9\left(2x^3\right)^2 - 2x = -36x^6 - 2x = -2x\left(18x^5 + 1\right) = 0,$$

ahonnan

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad x_2 = \sqrt[5]{\frac{-1}{18}}, \quad y_2 = 2\sqrt[5]{\frac{-1}{18^3}}.$$

Tehát a stacionárius pontok:

$$P_1(0,0) \qquad \text{és} \qquad P_2\left(\sqrt[5]{\frac{-1}{18}}, 2\sqrt[5]{\frac{-1}{18^3}}\right).$$

Határozzuk meg a másodrendű parciális deriváltakat!

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 12x^2, \\ f''_{xy} &= f''_{yx} = -2, \\ f''_{yy} &= -18y. \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & -2 \\ -2 & -18y \end{bmatrix}$$

A P_1 pontban:

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

ami indefinit, mert a determinánsa negatív:

$$|H(0,0)| = 0 \cdot 0 - (-2)(-2) = -4 < 0.$$

Tehát $P_1\,(0,0)$-ben nincs lokális szélsőérték, P_1 nyeregpont.

A P_2 pontban:

$$H\left(\sqrt[5]{\frac{-1}{18}}, 2\sqrt[5]{\frac{-1}{18^3}}\right) = \begin{bmatrix} 12\sqrt[5]{\frac{1}{18^2}} & -2 \\ -2 & 36\sqrt[5]{\frac{1}{18^3}} \end{bmatrix},$$

ami pozitív definit, mert a determinánsa:

$$\left|H\left(\sqrt[5]{\frac{-1}{18}}, 2\sqrt[5]{\frac{-1}{18^3}}\right)\right| = 12\sqrt[5]{\frac{1}{18^2}} \cdot 36\sqrt[5]{\frac{1}{18^3}} - (-2)(-2) = 12 \cdot 36 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{18^5}} - 4 = 20 > 0$$

és

$$f''_{xx}\left(\sqrt[5]{\frac{-1}{18}}, 2\sqrt[5]{\frac{-1}{18^3}}\right) = 12\sqrt[5]{\frac{1}{18^2}} > 0.$$

Tehát $P_2\left(\sqrt[5]{\frac{-1}{18}}, 2\sqrt[5]{\frac{-1}{18^3}}\right)$ lokális minimumhely.

(e) Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltakból álló egyenletrendszert, majd oldjuk meg!

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= \frac{-1}{x^2} + y = 0 \\ f'_y &= \frac{-1}{y^2} + x = 0 \end{aligned}\right\}$$

Tehát:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

és

$$\frac{-1}{y^2} + x = \frac{-1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} + x = -x^4 + x = x\left(-x^3 + 1\right) = 0,$$

ahonnan

$$x_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 1.$$

Az $x_1 = 0$ helyen nincs értelmezve az f függvény, így itt nem lehet lokális szélsőérték. Mivel

$$y_2 = 1,$$

ezért az egyetlen stacionárius pont: $P(1,1)$.
Határozzuk meg a másodrendű parciális deriváltakat!

$$f''_{xx} = \frac{2}{x^3},$$
$$f''_{xy} = f''_{yx} = 1,$$
$$f''_{yy} = \frac{2}{y^3}.$$

A Hesse-mátrix:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad H(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

ami pozitív definit, mert a determinánsa

$$|H(1,1)| = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$$

és $f''_{xx}(1,1) = 2 > 0$. Tehát $P(1,1)$ lokális minimumhely és $f_{min.} = f(1,1) = 3$.

(f) Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltakból álló egyenletrendszert, majd oldjuk meg!

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y &= -3x + 3y^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$y = x^2$, így

$$-3x + 3y^2 = -3x + 3\left(x^2\right)^2 = -3x + 3x^4 = 3x\left(-1 + x^3\right) = 0,$$

ahonnan

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 1, \quad y_2 = 1.$$

A stacionárius pontok: $P_1(0,0)$ és $P_2(1,1)$.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx} = 6x,$$
$$f''_{xy} = f''_{yx} = -3,$$
$$f''_{yy} = 6y.$$

A Hesse-mátrix:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

A P_1 pontban:

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},$$

ami indefinit, mert a determinánsa:

$$|H(0,0)| = 0 \cdot 0 - (-3) \cdot (-3) = -9 < 0.$$

Tehát $P_1(0,0)$ -ben nincs lokális szélsőérték, azaz P_1 nyeregpont.

A P_2 pontban:

$$H(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},$$

ami pozitív definit, mert a determinánsa:

$$|H(1,1)| = 6 \cdot 6 - (-3) \cdot (-3) = 27 > 0$$

és $f''_{xx}(1,1) = 6 > 0$. Tehát $P_2(1,1)$ lokális minimumhely és $f_{min.} = f(1,1) = -1$.

14. Legyen $f(x,y) = x^3 - 2y^2 - 4x^2 + 5y - 3x + 7$ függvény adott. Hol van a függvénynek lokális maximuma vagy minimuma?

Megoldás: Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltakból álló egyenletrendszert, majd oldjuk meg!

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 - 8x - 3 = 0 \\ f'_y &= -4y + 5 = 0 \end{aligned}\right\}$$

A $3x^2 - 8x - 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6},$$

tehát

$$x_1 = 3 \qquad \text{és} \qquad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Továbbá

$$y = \frac{5}{4},$$

ahonnan

$$x_1 = 3, \quad y_1 = \frac{5}{4} \qquad \text{és} \qquad x_2 = -\frac{1}{3}, \quad y_2 = \frac{5}{4}.$$

A stacionárius pontok: $P_1\left(3, \frac{5}{4}\right)$ és $P_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{4}\right)$.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx} = 6x - 8,$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = 0,$$

$$f''_{yy} = -4.$$

A Hesse-mátrix:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x-8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

A P_1 pontban:

$$H\left(3, \frac{5}{4}\right) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

ami indefinit, mert a determinánsa:

$$\left| H\left(3, \frac{5}{4}\right) \right| = -40 < 0.$$

Tehát $P_1\left(3, \frac{5}{4}\right)$-ben nincs lokális szélsőérték. P_1 nyeregpont.

A P_2 pontban:

$$H\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{4}\right) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

ami pozitív definit, mert a determinánsa:

$$\left| H\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{4}\right) \right| = 40 > 0$$

és $f''_{xx}\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{4}\right) = -10 < 0$. Tehát $P_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{4}\right)$ lokális maximumhely.

15. Mutassuk meg, hogy az $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$ kétváltozós függvénynek nincs sem lokális maximuma, sem pedig lokális minimuma!

Megoldás: Végezzük el a szorzást!

$$f(x, y) = (x - y)(1 - xy) = x - y - x^2y + xy^2.$$

Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltakból álló egyenletrendszert, majd oldjuk meg!

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 1 - 2xy + y^2 = 0 \\ f'_y &= -1 - x^2 + 2xy = 0 \end{aligned}\right\}$$

Azaz

$$\begin{aligned} 2xy &= 1 + y^2 \\ 2xy &= 1 + x^2, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} 1 + y^2 &= 1 + x^2 \\ y^2 &= x^2 \\ y &= \pm x, \end{aligned}$$

vagyis

$$\pm 2x^2 = 1 + x^2.$$

$-3x^2 \neq 1$, így

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 1 + x^2 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1. \end{aligned}$$

A stacionárius pontok: $P_1\,(1,1)$, $P_2\,(1,-1)$, $P_3\,(-1,1)$ és $P_4\,(-1,-1)$.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} &f''_{xx} = -2y, \\ &f''_{xy} = f''_{yx} = -2x + 2y, \\ &f''_{yy} = 2x. \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix:

$$H\,(x,y) = \begin{bmatrix} -2y & -2x+2y \\ -2x+2y & 2x \end{bmatrix}$$

A Hesse-mátrix determinánsa:

$$|H(x,y)| = -4xy - 4(y-x)^2.$$

f-nek nincs sem lokális maximuma, sem lokális minimuma, mert

$$|H(1,1)| = |H(-1,-1)| = -4 < 0 \qquad \text{és} \qquad |H(-1,1)| = |H(1,-1)| = -12 < 0.$$

16. Adjuk meg azokat az x, y, z pozitív valós számokat, amelyekre $x+y+z = 18$ és xyz maximális!

Megoldás: Ha $x + y + z = 18$, akkor $z = 18 - x - y$ és

$$xyz = xy(18 - x - y) = 18xy - x^2y - xy^2.$$

Tehát az

$$f(x,y) = 18xy - x^2y - xy^2$$

kétváltozós függvény lokális maximumát keressük, ha $x, y > 0$ és $x + y < 18$. Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltakból álló egyenletrendszert, majd oldjuk meg!

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 18y - 2xy - y^2 = 0 \\ f'_y &= 18x - x^2 - 2xy = 0 \end{aligned}\right\}$$

Azaz

$$(y - x)(18 - x - y) = 0.$$

Mivel $z = 18 - x - y > 0$, ezért $x = y$. Visszahelyettesítés után $x = y = z = 6$ adódik. Tehát egyetlen stacionárius pont van: P(6,6).

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx} = -2y,$$
$$f''_{xy} = f''_{yx} = 18 - 2x - 2y,$$
$$f''_{yy} = -2x.$$

A Hesse-mátrix:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} -2y & 18 - 2x - 2y \\ 18 - 2x - 2y & -2x \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad H(6,6) = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix},$$

A Hesse-mátrix determinánsa a stacionárius pontban:

$$|H(6,6)| = 144 - 36 = 108 > 0,$$

továbbá $f''_{xx}(6,6) = -12 < 0$, vagyis a P(6,6) pontban az $f(x,y)$ kétváltozós függvénynek lokális maximuma van, ennek értéke:

$$f_{max.} = 6^3 = 1296.$$

A keresett számok tehát: $x = y = z = 6$.