

A 7. előadáshoz javasolt feladatok végeredményei, részletesen kidolgozott megoldásai

Többszörös függvények

1. Feladat. Határozzuk meg az

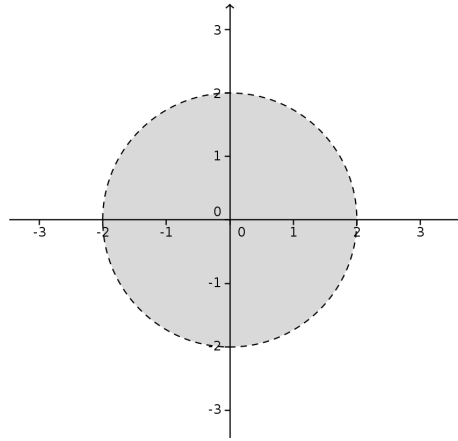
$$f(x, y) = \frac{x + 2y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

függvény értelmezési tartományát.

Megoldás. A függvény az osztás és a négyzetgyök miatt nincs mindenhol értelmezve. A nevezőben nem lehet nulla, és a négyzetgyök alatt nem lehet negatív érték. Tehát két megkötésünk van:

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} \neq 0 \quad \text{és} \quad 4 - x^2 - y^2 \geq 0.$$

Mivel csak a 0-nak 0 a négyzetgyöke, elég azt kikötni, hogy $4 - x^2 - y^2 > 0$. Ha az (x, y) számpárokat az $\mathbb{R}^2$ sík pontjainak tekintjük, a kikötés egy tartományt határoz meg. Az egyenlőtlenséget átrendezve $x^2 + y^2 < 4$ adódik. Tehát $x^2 + y^2 = r^2 < 4$, azaz a megoldások olyan origó középpontú körök pontjai, amelyek sugara kisebb mint $\sqrt{4} = 2$. Ez az origó középpontú, 2 sugarú körlemez a határa nélkül.



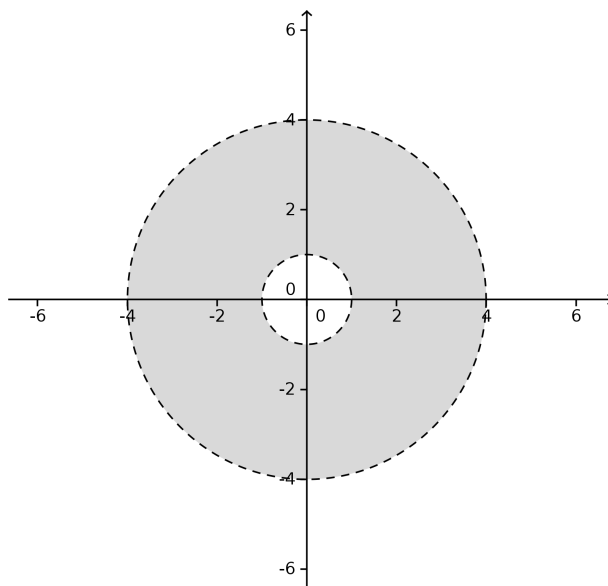
□

2. Feladat. Adjuk meg az $f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2) + \ln(x^2 + y^2 - 1)$ függvény értelmezési tartományát!

Megoldás. A logaritmusfüggvények csak pozitív számokra vannak értelmezve, tehát

$$16 - x^2 - y^2 > 0 \quad \text{és} \quad x^2 + y^2 - 1 > 0.$$

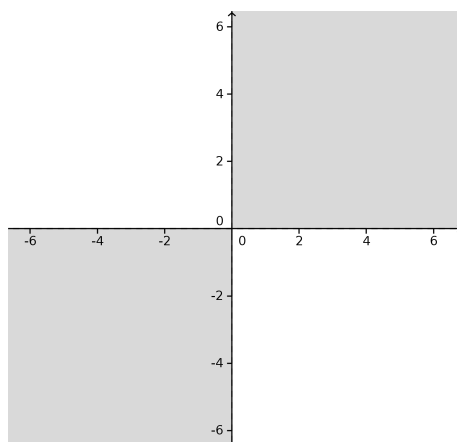
Átrendezve, $1 < x^2 + y^2 < 16$. Az előző feladathoz hasonlóan kapjuk, hogy az értelmezési tartomány az 1-nél nagyobb, de 4-nél kisebb sugarú körökből álló körgyűrű:



□

3. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = e^x \ln(xy)$ függvény értelmezési tartományát!

Megoldás. A függvény értelmezési tartományában a logaritmusfüggvény okoz megkötést, mert az $\ln$ függvény csak pozitív számokra van értelmezve. Azaz $xy > 0$. Tehát vagy $x > 0$ és $y > 0$, vagy $x < 0$ és $y < 0$. Ez az első és a harmadik síknegyed, a határok nélkül:



□

4. Feladat. Határozzuk meg, hogy $\mathbb{R}^3$ mely legbővebb részhalmazán értelmezhető az

$$f(x, y, z) = \sqrt{z - x^2 - y^2} + \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z}$$

függvény!

Megoldás. Négyzetgyök alatt nem lehet negatív szám, tehát

$$z - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \text{és} \quad 4 - x^2 - y^2 - z \geq 0,$$

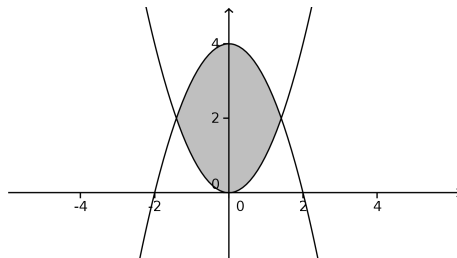
azaz

$$z \geq x^2 + y^2 \quad \text{és} \quad 4 - x^2 - y^2 \geq z.$$

Ezeket az alakzatokat könnyű úgy szemléltetni, hogy bevezetjük az $r^2 = x^2 + y^2$ összefüggést teljesítő r változót, ami az $\mathbb{R}^3$ pontjainak a z tengelytől való távolságát fejezi ki. Így a

$$z \geq r^2 \quad \text{és} \quad 4 - r^2 \geq z$$

egyenlőtlenségeket kapjuk. Mindkét alakzat forgásszimmetrikus a z tengely körül. Ezért minden z tengelyre illeszkedő síkkal ugyan az a metszete:



□

5. Feladat. *Ábrázoljuk az alábbi felületek által határolt testeket!*

(a) $z = 5 - x^2 - y^2$, $z = 1$.

(b) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$.

(c) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(d) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 4$.

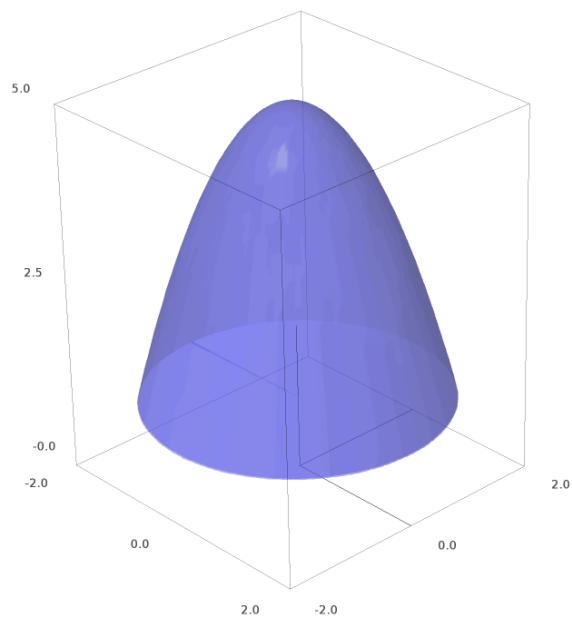
(e) $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

Megoldás. Érdemes meghatározni a határoló felületek közös részét. Ezt az egyenletekből alkotott egyenletrendszerek megoldásával tehetjük meg.

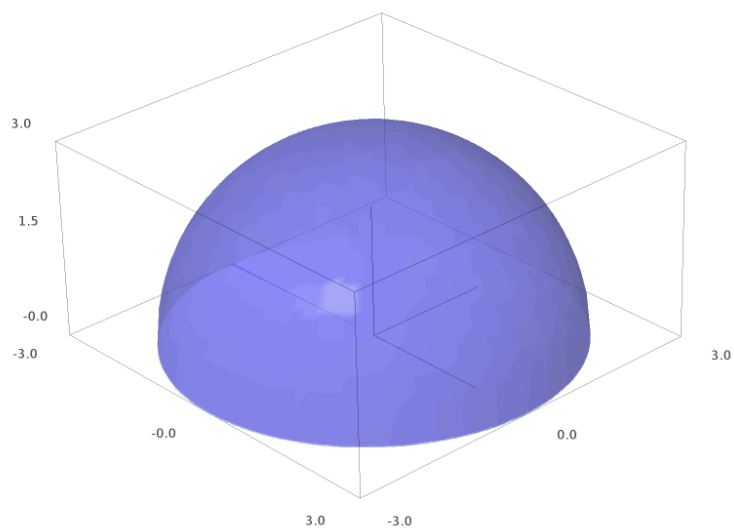
(a) Oldjuk meg a

$$\begin{cases} z = 5 - x^2 - y^2, \\ z = 1 \end{cases}$$

egyenletrendszert. Ekkor $5 - x^2 - y^2 = 1$, azaz $4 = x^2 + y^2$. Tehát a két felület metszete egy 2 sugarú kör a $z = 1$ síkban, középpontja a sík és a z -tengely metszéspontja. A $z = 5 - x^2 - y^2$ felület egy lefelé nyíló paraboloid.



- (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ egy origó középpontú, 3 sugarú gömb egyenlete. A $z \geq 0$ feltétel azt jelenti, hogy csak a nemnegatív z koordinátájú pontokat kell tekinteni, azaz a gömb felső felét:



(c) Keressük meg a felületek metszetét:

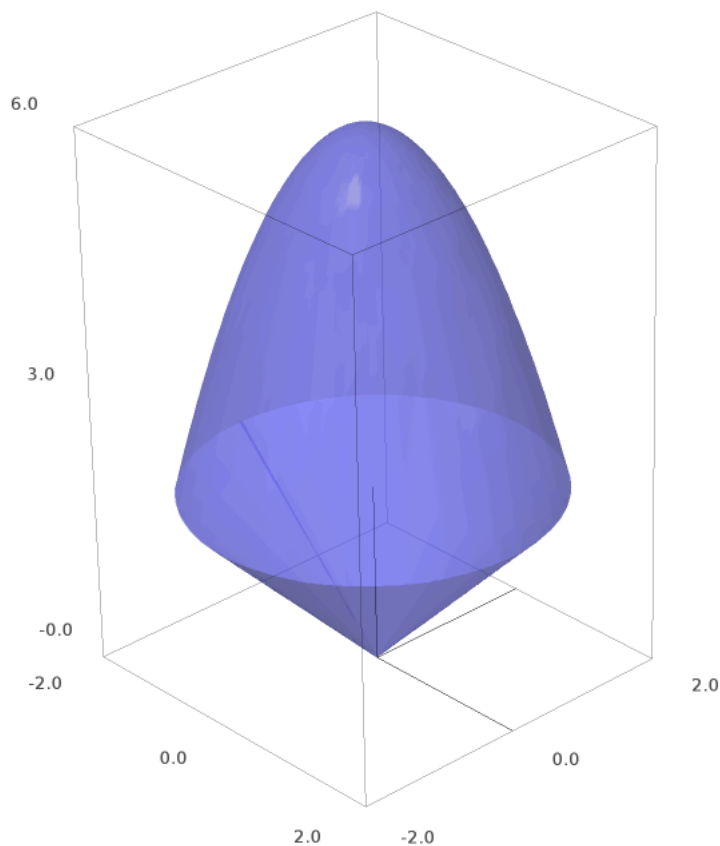
$$\begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Tehát $6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ha $r^2 = x^2 + y^2$ (mint a 4. feladat megoldásában), akkor

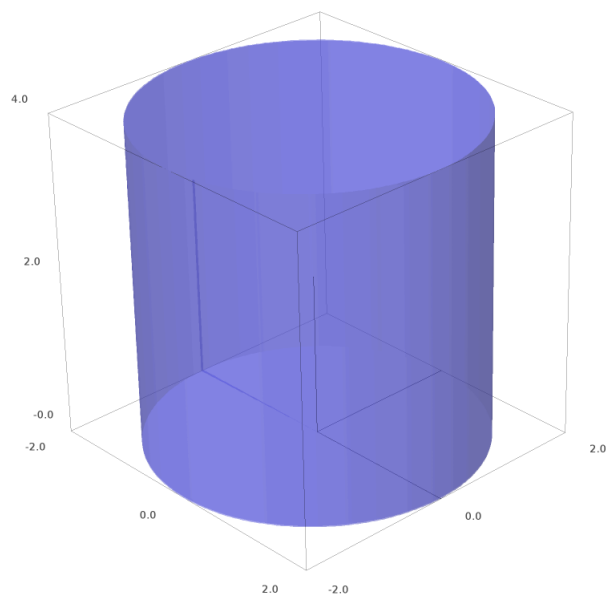
$$6 - r^2 = r$$

$$0 = r^2 + r - 6.$$

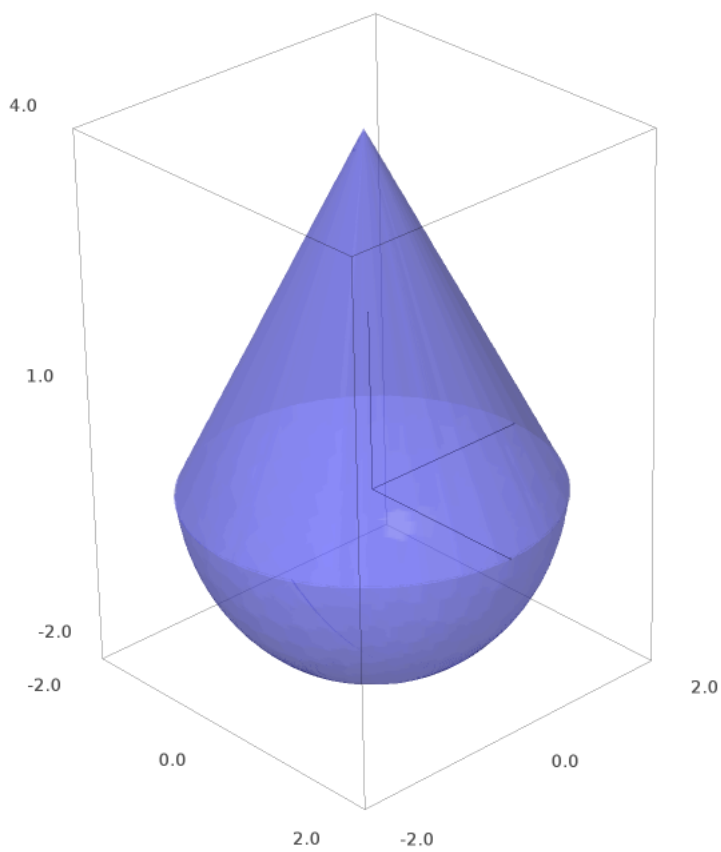
Azaz $r = 2$ vagy $r = -3$, de a sugár negatív nem lehet. Tehát a két felület egy 2 sugarú körben metszi egymást. A második egyenlet szerint ekkor a z koordináta értéke is 2. A $z = 6 - x^2 - y^2$ egy lefelé nyíló paraboloid, a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ felület pedig egy felfele nyíló kúp, aminek a csúcsa az origó:



(d) Az $x^2 + y^2 = 4$ egy 2 sugarú henger, tengelye a z tengely. A $z = 0$, $z = 4$ síkok adják a henger alját és tetejét:



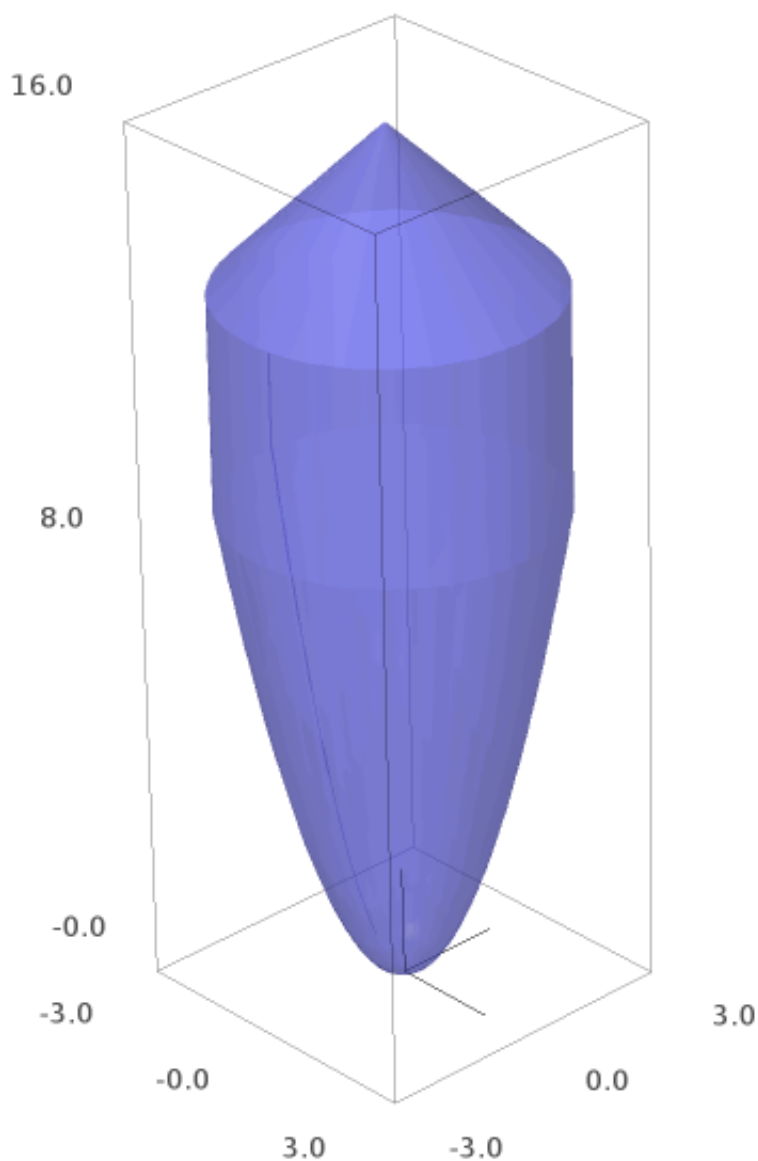
- (e) A $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ felület egy 2 sugarú gömb alsó fele, a $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ felület pedig egy lefelé nyíló kúp, aminek a csúcsa a $(0, 0, 4)$ pont:



□

6. Feladat. *Ábrázoljuk azt a térrészt, amelyet a $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, a $z = x^2 + y^2$ paraboloid és az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű henger határol!*

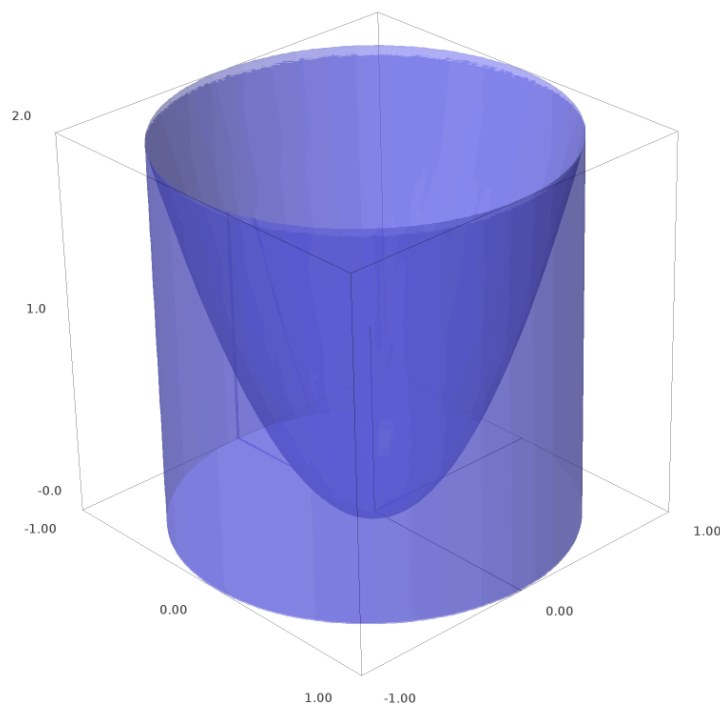
Megoldás. Megint használjuk a 4. feladatban bevezetett r sugarat az $r^2 = x^2 + y^2$ összefüggés szerint. Ekkor a kúp, a paraboloid és a henger egyenlete rendre $z = 16 - r$, $z = r^2$, $r = 3$. Tehát a kúp és a henger $z = 13$ magasságban, a paraboloid és a henger pedig $z = 9$ magasságban találkozik.



□

7. Feladat. Vázoljuk az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű henger, az xy -sík és az $z = 2(x^2 + y^2)$ egyenletű paraboloid által meghatározott testet!

Megoldás. A $x^2 + y^2 = 1$ és a $z = 2(x^2 + y^2)$ paraboloid a $z = 2$ síkban metszi egymást.



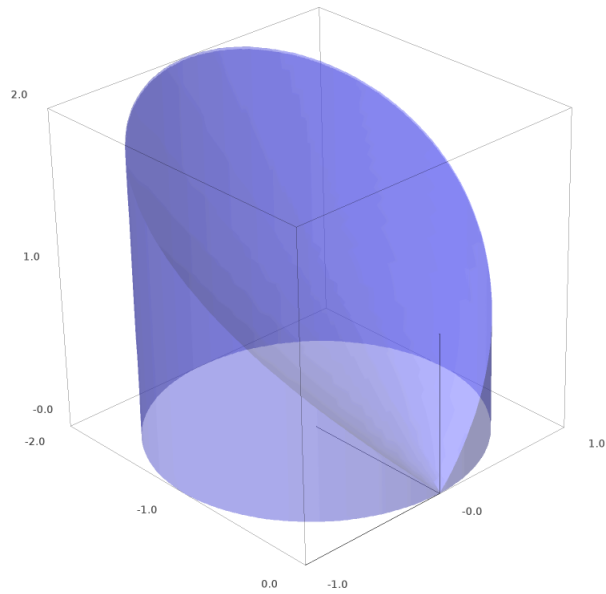
□

8. Feladat. Ábrázoljuk azt a térrészt, amelyet a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp és az $x^2 + y^2 = 2x$ egyenletű henger határolnak!

Megoldás. Alakítsuk át a henger egyenletét.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2x \\ x^2 - 2x + y^2 &= 0 \\ (x - 1)^2 - 1 + y^2 &= 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

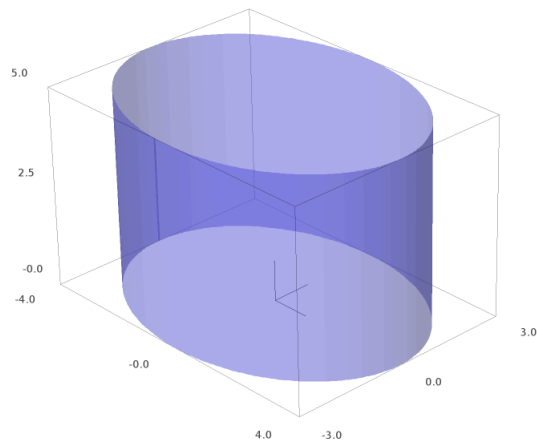
Ez egy 1 sugarú henger, aminek a tengelye a $x = 1, y = 0$ függőleges egyenes.



□

9. Feladat. Vázoljuk az $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ egyenletű hengert.

Megoldás. A henger alapja egy ellipszis, mivel az $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ egyenletben az egység sugarú körhöz képest az x koordinátákat négyszerezni, az y koordinátákat pedig háromszorozni kell.



□

10. Feladat. Határozzuk meg az

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-2}{-4}$$

egyenes, és az

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$$

ellipszoid metszéspontjait!

Megoldás. Egyenletekkel megadott alakzatok közös pontjai mindig az egyenletekből alkotott egyenletrendszer megoldásaiként adódnak.

Az egyenes egyenletrendszeréből bármelyik változót ki tudjuk fejezni bármelyik másikkal. Például az

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y+2}{-6}$$

egyenletből kifejezhető y :

$$\begin{aligned} -2(x-6) &= y+2 \\ -2x+12 &= y+2 \\ -2x+10 &= y \\ y &= -2x+10. \end{aligned}$$

Az $\frac{x-6}{3} = \frac{z-2}{-4}$ egyenletből pedig kifejezhető z :

$$\begin{aligned} \frac{x-6}{3} &= \frac{z-2}{-4} \\ -4(x-6) &= 3(z-2) \\ -4x+24 &= 3z-6 \\ -4x+30 &= 3z \\ z &= -\frac{4}{3}x+10 \end{aligned}$$

Az y -ra és z -re kapott formulákat az ellipszis egyenletébe helyettesítve egyismeretlenes egyenletet kapunk.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{81} + \frac{(-2x+10)^2}{36} + \frac{\left(-\frac{4}{3}x+10\right)^2}{9} &= 1 \\ \frac{x^2}{81} + \frac{4(-x+5)^2}{36} + \frac{\left(-\frac{4}{3}x+10\right)^2}{9} &= 1 \\ \frac{x^2}{81} + \frac{(-x+5)^2}{9} + \frac{\left(-\frac{4}{3}x+10\right)^2}{9} &= 1 \\ x^2 + 9(-x+5)^2 + 9\left(-\frac{4}{3}x+10\right)^2 &= 81 \\ x^2 + 9(-x+5)^2 + (-4x+30)^2 &= 81 \\ x^2 + 9x^2 - 90x + 225 + 16x^2 - 240x + 900 &= 81 \\ 26x^2 - 330x + 1044 &= 0 \\ 13x^2 - 165x + 522 &= 0 \end{aligned}$$

A másodfokú egyenletek megoldóképletét használva:

$$x_{1,2} = \frac{165 \pm \sqrt{165^2 - 4 \cdot 13 \cdot 522}}{26} = \frac{165 \pm 9}{26},$$

tehát $x_1 = \frac{87}{13}$, $x_2 = 6$. Az y és z koordinátákra kapott formulák szerint

$$\begin{aligned} y_1 &= -2x_1 + 10 = -2 \cdot \frac{87}{13} + 10 = -\frac{44}{13} \\ z_1 &= -\frac{4}{3}x_1 + 10 = -\frac{4}{3} \cdot \frac{87}{13} + 10 = -\frac{4 \cdot 29}{13} + 10 = \frac{14}{13}, \end{aligned}$$

tehát az egyik metszéspont koordinátái $(\frac{87}{13}, -\frac{44}{13}, \frac{14}{13})$. Hasonlóan

$$\begin{aligned} y_2 &= -2x_2 + 10 = -2 \cdot 6 + 10 = -2 \\ z_2 &= -\frac{4}{3}x_2 + 10 = -\frac{4}{3} \cdot 6 + 10 = 2, \end{aligned}$$

és a másik metszéspont $(6, -2, 2)$. □

11. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $2x - y - 2z = 10$ síknak és a $2z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ paraboloidnak egyetlen közös pontja van! Adjuk meg a pont koordinátáit!

Megoldás. A sík egyenletét átrendezve $2z = 2x - y - 10$. Ezt behelyettesítve a paraboloid egyenletébe:

$$\begin{aligned} 2x - y - 10 &= \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \\ 72x - 36y - 360 &= 4x^2 + 9y^2 \\ 4x^2 + 9y^2 - 72x + 36y + 360 &= 0 \\ 4(x^2 - 18x) + 9(y^2 + 4y) + 360 &= 0 \\ 4((x - 9)^2 - 81) + 9((y + 2)^2 - 4) + 360 &= 0 \\ 4(x - 9)^2 - 324 + 9(y + 2)^2 - 36 + 360 &= 0 \\ 4(x - 9)^2 + 9(y + 2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ez csak úgy állhat fenn, ha $x = 9$ és $y = -2$. Ekkor

$$2z = 2x - y - 10 = 18 + 2 - 10 = 10,$$

azaz $z = 5$. Tehát egyetlen közös pont van, melynek koordinátái $(9, -2, 5)$. □

12. Feladat. Igazoljuk, hogy $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} 2x - 3y = -4$.

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$. Olyan $\delta > 0$ -t kell találni, hogy ha

$$|(x, y) - (1, 2)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(2x - 3y) - (-4)| < \varepsilon,$$

azaz, ha

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |2x - 3y + 4| < \varepsilon.$$

Legyen $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Ha $\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} < \delta$, akkor $|x - 1| < \delta$ és $|y - 2| < \delta$, így

$$|2x - 3y + 4| = |2(x - 1) - 3(y - 2)| \leq 2|x - 1| + 3|y - 2| < 2\delta + 3\delta = 5\delta = \varepsilon.$$

□

13. Feladat. *Határozzuk meg a*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$$

határértékeket, ha léteznek!

Megoldás. (a) Ha $y = mx$ és $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, akkor

$$\frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{2xm^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m^2}{1 + m^2}x \rightarrow 0.$$

Ez azonban nem elég ahhoz, hogy $\frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, ha $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Legyen $\varepsilon > 0$, továbbá

$$|(x, y) - (0, 0)| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad y^2 \leq x^2 + y^2.$$

Így

$$\left| \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ha $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, valamint $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, akkor

$$\left| \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta = \varepsilon,$$

azaz

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

(b) Legyen $y = mx$. Ekkor

$$\frac{2xy^2}{x^2 + y^4} = \frac{2x(m^2x^2)}{x^2 + m^4x^4} = \frac{2m^2x}{1 + m^4x^2} \rightarrow \frac{0}{1} = 0,$$

ha $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Azonban, ha x -et y^2 -tel helyettesítjük, akkor

$$\frac{2xy^2}{x^2 + y^4} = \frac{2y^4}{y^2 + y^4} = 1.$$

Vagyis, ha $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ az $x = y^2$ parabola mentén, akkor

$$\frac{2xy^2}{x^2 + y^4} \rightarrow 1.$$

Ezért a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$$

határérték nem létezik.

□

14. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ határérték nem létezik!

Megoldás. Legyen $y = mx$. Ekkor

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

Mivel $\frac{1-m^2}{1+m^2}$ az m -től függ, így különböző meredekségű egyenesek mentén közelítve az origót $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ más-más számokhoz tart, ezért a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

határérték nem létezik. □

15. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$$

határértékeket, ha léteznek!

Megoldás. (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$, mert

$$0 \leq \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq x^2 y^2,$$

vagyis $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, ha $(x,y) \rightarrow 0$.

(b) Legyen $y = mx$. Ekkor

$$\frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} = \frac{x^2 (m^2 x^2)}{x^4 + m^4 x^4} = \frac{m^2}{1 + m^4}.$$

A határérték tehát nem létezik. □

16. Feladat. Folytonossá tehető-e az origóban az $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ kétváltozós függvény?

Megoldás. f nem tehető folytonossá, mert a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

határérték nem létezik, ugyanis ha $y = mx$, akkor

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{mx^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

□