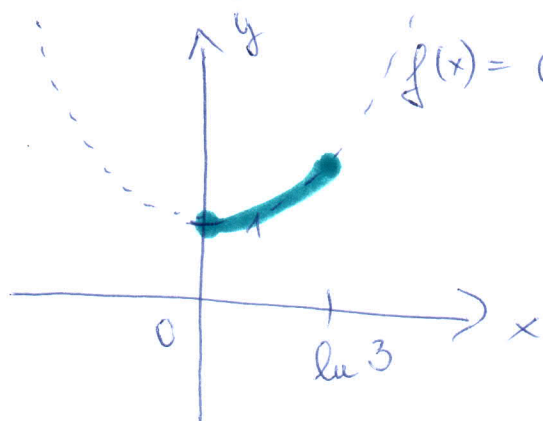


I. Görbel hosszának számítása

Héplégyűjtési képlet:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

- 1.) Adja meg az $f(x) = \operatorname{ch} x$ ívhosszát,
ha $x \in [0, \ln 3]$!



$$f(x) = \operatorname{ch} x$$

$$f'(x) = \operatorname{sh} x$$

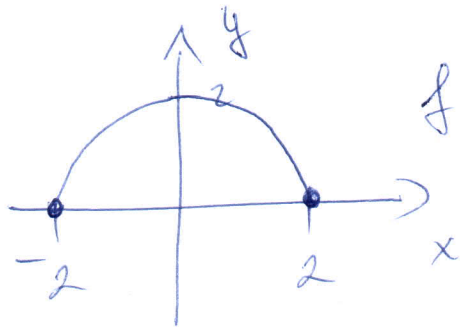
$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$$

$$s = \int_0^{\ln 3} \sqrt{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int_0^{\ln 3} |\operatorname{ch} x| dx =$$

$$= \int_0^{\ln 3} \operatorname{ch} x dx = [\operatorname{sh} x]_0^{\ln 3} = \operatorname{sh}(\ln 3) - \underbrace{\operatorname{sh} 0}_0 =$$

$$= \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

2.) Számítsa ki az $y = \sqrt{4-x^2}$ félkör ív
hosszát!



$$f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) =$$

$$x \in [-2, 2]$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

A görög alatti mennyiség:

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{x^2}{4-x^2} = \frac{4-x^2+x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$$

így:

$$\Delta = \int_{-2}^2 \sqrt{\frac{4}{4-x^2}} dx = 2 \cdot \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$= \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} = \sin t \\ x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \end{array} \right\} =$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t dt = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\cos t|} \cdot \cos t dt$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \underline{\underline{2\pi}}$$

Képletgyűjteménybe:

Ha a görbe paraméteres megadása:

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\}, \quad t_A \leq t \leq t_B, \quad \text{ahol}$$

$$\Delta = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt$$

3.) Számítsa ki az $y = \sqrt{4 - x^2}$ félkörökív hosszát úgy, hogy paraméterezze a görbét!

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{array} \right\}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\dot{x}(t) = -2 \sin t$$

$$\dot{y}(t) = 2 \cos t$$

$$[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 = 4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t = 4$$

$$\Delta = \int_0^{\pi} \sqrt{4} dt = 2 \cdot [t]_0^{\pi} = 2(\pi - 0) = \underline{\underline{2\pi}}$$

i.) Számítsa ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= e^t \sin t \\ y(t) &= e^t \cos t \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenlőbrendűrendszerrel adott görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban!

$$\dot{x}(t) = e^t \sin t + e^t \cos t$$

$$\dot{y}(t) = e^t \cos t - e^t \sin t$$

$$\begin{aligned} [\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 &= e^{2t} \sin^2 t + 2e^{2t} \sin t \cos t + \\ &+ e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \cos^2 t - 2e^{2t} \sin t \cos t + e^{2t} \sin^2 t = \\ &= e^{2t} \cdot \underbrace{(2\sin^2 t + 2\cos^2 t)}_2 = 2e^{2t} \end{aligned}$$

$$\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 \cdot e^{2t}} dt = \sqrt{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t dt =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left[e^t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \cdot \left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^0 \right) =$$

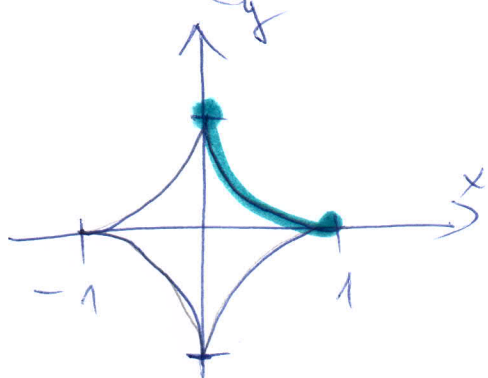
$$= \underline{\underline{\sqrt{2} \cdot \left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right)}}$$

5.) feladatsa ki az

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe voluménát, ha $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$!

Vázolja a görbét!



$$\dot{x}(t) = 3 \cdot \cos^2 t \cdot (-\sin t)$$

$$\dot{y}(t) = 3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t$$

Összegző görbe

$$\begin{aligned} [\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 &= 9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t = \\ &= 9 \cos^2 t \cdot \sin^2 t (\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1) = 9 \cos^2 t \cdot \sin^2 t \end{aligned}$$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cdot \cos^2 t \cdot \sin^2 t} \, dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin t \, dt$$

$$= 3 \cdot \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \left(\underbrace{\sin^2 \frac{\pi}{2}}_1 - 0 \right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Képletgyűjteménybe:

Ha a görbe polárkoordináták megadásával:
az: $r = r(\varphi)$, $\varphi_A \leq \varphi \leq \varphi_B$, akkor

$$\Delta = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{r^2 + [r']^2} d\varphi$$

6.) Számítsa ki az origó középpontú
2 sugarú kör területét!

A kör polárkoordináták egyenlete:

$$r=2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Ekkor $r' = 0$, így

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 + 0} d\varphi = 2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \\ &= \underline{\underline{4\pi}}. \end{aligned}$$

7.) Határozza meg az $r = e^{\varphi}$ spirális
volumént, ha $\varphi \in [0, \ln 2]$!

$$r = e^{\varphi}$$

$$r' = e^{\varphi}$$

$$r^2 + [r']^2 = e^{2\varphi} + e^{2\varphi} = 2 \cdot e^{2\varphi}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{2 \cdot e^{2\varphi}} d\varphi = \sqrt{2} \cdot \int_0^{\ln 2} e^{\varphi} d\varphi = \\ &= \sqrt{2} \cdot [e^{\varphi}]_0^{\ln 2} = \sqrt{2} \cdot (e^{\ln 2} - e^0) = \\ &= \sqrt{2} \cdot (2 - 1) = \underline{\underline{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

8.) Várrolja az $r = 4 \sin \varphi$ görbét és
számítsa ki az volumént!

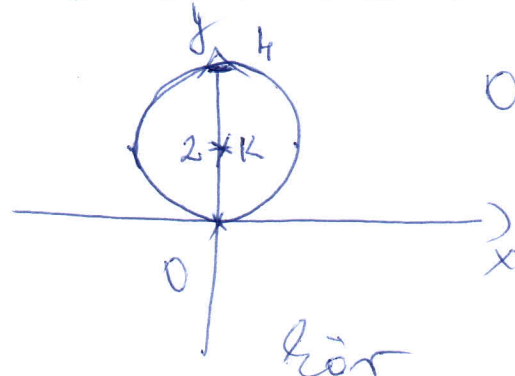
$$r = 4 \sin \varphi \quad | \cdot r$$

$$r^2 = 4r \sin \varphi$$

$$x^2 + y^2 = 4y$$

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$K(0,2), \quad r_z = 2$$



$$r = 4 \sin \varphi$$

$$r' = 4 \cos \varphi$$

$$r^2 + [r']^2 = 16 \sin^2 \varphi + 16 \cos^2 \varphi = 16,$$

$$\Delta = \int_0^{\pi} \sqrt{16} \, d\varphi = 4 [\varphi]_0^{\pi} = \underline{\underline{4\pi}}.$$

g.) Vázolja az $r = 6 \cdot \cos \varphi$ görbét és számítsa ki a területét!

$$r = 6 \cos \varphi \quad / \cdot r$$

$$r^2 = 6r \cos \varphi$$

$$x^2 + y^2 = 6x$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 9$$

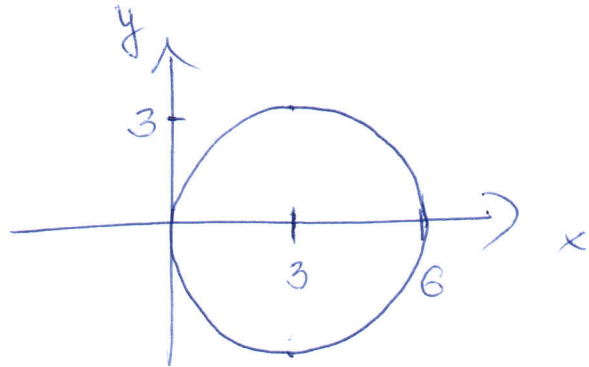
$$K(3,0), \quad r_z = 3$$

$$r' = -6 \sin \varphi$$

$$r^2 + [r']^2 = 36 \cos^2 \varphi + 36 \sin^2 \varphi = 36$$

$$\Delta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{36} \, d\varphi = 6 \cdot [\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) =$$

$$= \underline{\underline{6\pi}}.$$



Kör

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

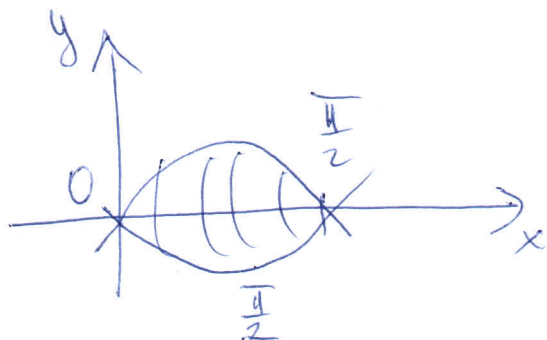
II. Forgásteresztet térfogatának kitétele

Képletgyűjtemény:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx \quad (x\text{-teng. körül forg.})$$

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d g^2(y) dy \quad (y\text{-teng. körül forg.})$$

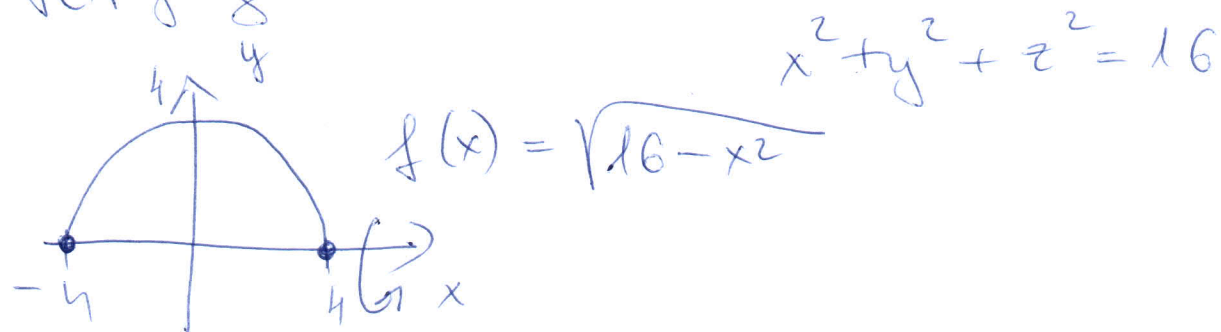
- 1.) Forgassa meg az $y = \sin 2x$ függvényt az x -tengely körül! Mekkora a keletkező forgástereszt térfogata, ha $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$?



$$f(x) = \sin 2x$$
$$f^2(x) = \sin^2 2x$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4x}{2} dx =$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left[x - \frac{\sin 4x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{4}}}$$

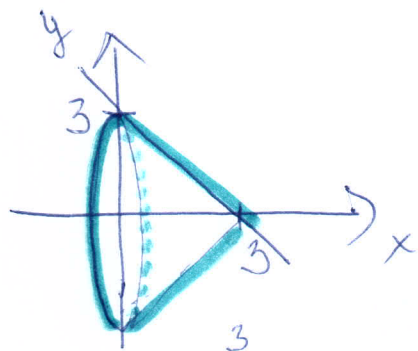
2.) Számítsa ki a 4 sugarú gömb térfogatát!



$$V_x = \pi \cdot \int_{-4}^4 (16 - x^2) dx = \pi \cdot \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^4 =$$

$$= \pi \cdot \left[\left(64 - \frac{64}{3} \right) - \left(-64 + \frac{64}{3} \right) \right] = \underline{\underline{\frac{256\pi}{3}}}$$

3.) Számítsa ki annak a kúpnak a térfogatát, amely az $f(x) = 3 - x$ ^{x-ig. körüli} függvény forgatásakor keletkezik, ha $x \in [0, 3]$!



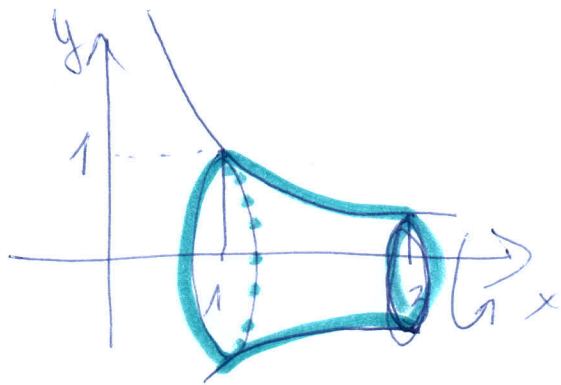
$$f(x) = 3 - x$$

$$f^2(x) = (3 - x)^2 = 9 - 6x + x^2$$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^3 (9 - 6x + x^2) dx = \pi \cdot \left[9x - 3x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^3 =$$

$$= \pi \cdot (27 - 27 + 9) = \underline{\underline{9\pi}}$$

- 4.) Adott az $xy=1$ hiperbola $x \in [1, 3]$ intervallum feletti íve. Forgassuk meg az x -tengely körül és számítsuk ki a keletkező forgástest térfogatát!

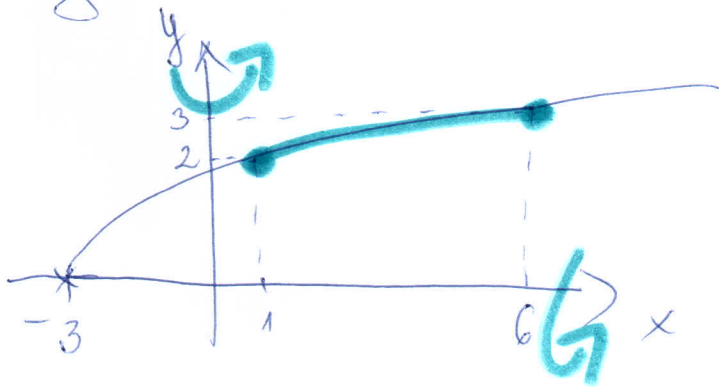


$$xy=1$$

$$f(x) = y = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \cdot \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \pi \cdot \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^3 = -\pi \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

- 5.) Adott az $y = \sqrt{x+3}$ függvény $x \in [1, 6]$ intervallum feletti íve. Forgassuk meg először az x -tengely, majd az y -tg. körül és mindkét esetben számítsuk ki a keletkező forgástest térfogatát!



$$a) f(x) = \sqrt{x+3}$$

$$f^2(x) = x+3$$

$$V_x = \pi \int_1^6 (x+3) dx =$$

$$\begin{aligned} &= \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} + 3x \right]_1^6 = \pi \cdot \left[\left(\frac{36}{2} + 18 \right) - \left(\frac{1}{2} + 3 \right) \right] = \frac{65\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$b) \quad y = \sqrt{x+3}$$

$$y^2 = x+3$$

$$x = y^2 - 3$$

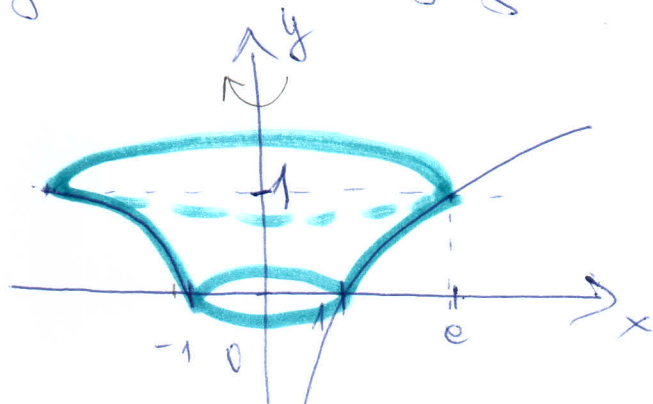
$$g(y) = y^2 - 3, \quad y \in [2, 3]$$

$$V_y = \pi \cdot \int_2^3 (y^2 - 3)^2 dy = \pi \cdot \int_2^3 (y^4 - 6y^2 + 9) dy =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{y^5}{5} - 6 \cdot \frac{y^3}{3} + 9y \right]_2^3 = \pi \cdot \left(\frac{108}{5} - \frac{42}{1} \right) =$$

$$= \frac{66\pi}{5}$$

6.) Adott az $y = \ln x$ függvény $x \in [1, e]$ íve. Forgassuk meg az y -tengely körül! Mekkora a keletkező forgástest térfogata?



$$y = \ln x$$

$$x = e^y$$

$$y \in [0, 1]$$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 e^{2y} dy = \pi \cdot \left[\frac{e^{2y}}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \cdot (e^2 - 1)$$

III. Forgástest palástfelszínének területa

Képletgyűjteménybe:

$$y = f(x) \quad a \leq x \leq b$$

$$A_x = 2\pi \cdot \int_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (x\text{-teng. körüli forg.)}$$

$$A_y = 2\pi \cdot \int_a^b |x| \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (y\text{-teng. körüli forg.)}$$

1.) Az $f(x) = \cosh x$ görbe $0 \leq x \leq 1$ körüli forgással meg az x -, majd az y -teng. körüli és számítsuk ki a felülről forgástest palástjának felszínét!

$$\begin{aligned} a) A_x &= 2\pi \cdot \int_0^1 \cosh x \cdot \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = 2\pi \int_0^1 \cosh^2 x dx = \\ &= \pi \cdot \int_0^1 (1 + \cosh 2x) dx = \pi \cdot \left[x + \frac{\sinh 2x}{2} \right]_0^1 = \\ &= \underline{\underline{\pi \cdot \left(1 + \frac{\sinh 2}{2} \right)}}. \end{aligned}$$

$$b) A_y = 2\pi \cdot \int_0^1 x \cdot \underbrace{\sqrt{1 + \sinh^2 x}}_{\cosh x} dx = 2\pi \cdot \int_0^1 x \cdot \cosh x dx = \infty$$

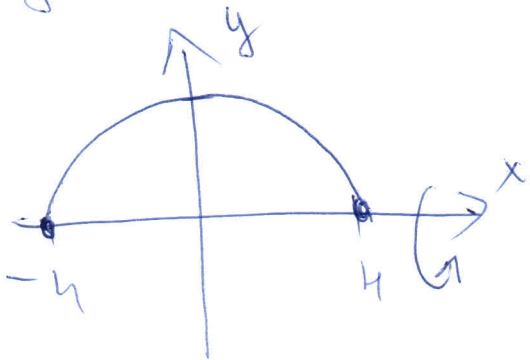
$$= 2\pi \cdot \left[x \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \right]_0^1 = 2\pi [\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 - (-1)] =$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{e + e^{-1}}{2} + 1 \right) = \underline{\underline{2\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{e} \right)}}$$

$$(*) \int x \cdot \operatorname{ch} x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{sh} x & u' = \operatorname{ch} x \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= x \cdot \operatorname{sh} x - \int \operatorname{sh} x \, dx = x \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x + C$$

2.) Skizze die in a) skizzierte gömb felszínt!



$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) =$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$A_x = 2\pi \cdot \int_{-4}^4 \sqrt{4 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} \, dx =$$

$$= 2\pi \cdot \int_{-4}^4 \sqrt{\cancel{4 - x^2}} \cdot \frac{\sqrt{\cancel{4 - x^2} + x^2}}{\sqrt{\cancel{4 - x^2}}} \, dx = 4\pi \cdot [x]_{-4}^4 =$$

$$= 4\pi (4 - (-4)) = \underline{\underline{64\pi}}$$

3.) Adott az $f(x) = x^3$ függvény és $0 \leq x \leq 1$.

Forgassuk meg az ívet az x -teng. körül!

Mekkora a keletkező forgástest palástjával felszíne?

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$\begin{aligned} A_x &= 2\pi \cdot \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{1+9x^4} \, dx = 2\pi \cdot \int_0^1 x^3 \cdot (1+9x^4)^{\frac{1}{2}} \, dx \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{36} \cdot \int_0^1 36x^3 \cdot (1+9x^4)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{\pi}{18} \cdot \left[\frac{(1+9x^4)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{18} \cdot \frac{2}{3} \cdot (10\sqrt{10} - 1) = \frac{\pi}{27} \cdot (10\sqrt{10} - 1) \end{aligned}$$

4.) Forgassuk meg az $f(x) = 2 \cdot \sqrt{15-x}$ görbe $0 \leq x \leq 15$ intervallum feletti ívét az x -teng. körül! Mekkora a keletkező forgástest palástfelszíne?

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (15-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = \frac{-1}{\sqrt{15-x}}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{1}{15-x} = \frac{16-x}{15-x}$$

$$A_x = 2\pi \cdot \int_0^{15} 2 \cdot \sqrt{15-x} \cdot \frac{\sqrt{16-x}}{\sqrt{15-x}} \, dx = 4\pi \cdot \int_0^{15} (16-x)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$= 4\pi \cdot (-1) \cdot \int_0^{15} (-1) \cdot (16-x)^{\frac{1}{2}} dx = (-4\pi) \cdot \left[\frac{(16-x)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{15} =$$

$$= (-4\pi) \cdot \frac{2}{3} \cdot (1 - 64) = \underline{\underline{168\pi}}$$

5.) Forgassuk meg az $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$ függvény $x \in [1, 2]$ ívét az y -tengely körül! Mekkora a keletkező forgórtest palántfelülete?

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$$

$$f'(x) = x^3 + \frac{1}{8} \cdot (-2) x^{-3} = x^3 - \frac{1}{4x^3}$$

$$[f'(x)]^2 = x^6 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^6}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = x^6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^6} = \left(x^3 + \frac{1}{4x^3} \right)^2$$

$$A_y = 2\pi \int_1^2 x \cdot \left(x^3 + \frac{1}{4x^3} \right) dx = 2\pi \cdot \int_1^2 \left(x^4 + \frac{1}{4x^2} \right) dx$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{-1}}{(-1)} \right]_1^2 = 2\pi \cdot \left[\left(\frac{32}{5} - \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} \right) \right] =$$

$$= \underline{\underline{\frac{253\pi}{20}}}$$

6.) Forgassuk meg az $f(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x} \cdot (3-x)$ függvény $x \in [0, 3]$ ívét az x -tengely körül! Mekkora a keletkező forgástest palástjának felszíne?

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot (3-x) + \frac{1}{3} \sqrt{x} \cdot (-1) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{6} \sqrt{x} - \frac{1}{3} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \sqrt{x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{x}}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{(1-x)^2}{x} = \frac{4x + 1 - 2x + x^2}{4x} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1}{4x} = \frac{(x+1)^2}{4x}$$

$$A_x = 2\pi \cdot \int_0^3 \frac{1}{3} \sqrt{x} \cdot (3-x) \cdot \frac{x+1}{2\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^3 (3 + 2x - x^2) dx = \frac{\pi}{3} \cdot \left[3x + x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot (9 + 9 - 9) = \underline{\underline{3\pi}}.$$