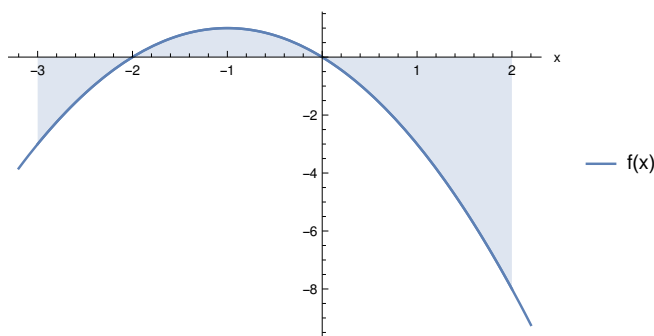


Az 5. előadáshoz javasolt feladatok részletesen kidolgozott megoldásai, végeredményei

Terület számítása határozott integrállal

1. Határozzuk meg az $f(x) = -x^2 - 2x$ függvény grafikonja és az x -tengely által határolt tartomány teljes területét, ha $x \in [-3, 2]$!

Megoldás: $f(x) = -x^2 - 2x = -x(x+2)$, tehát f -nek két zérushelye van: $x_1 = 0$ és $x_2 = -2$. Készítsünk vázlatot!



A keresett - az ábrán szürke színnel jelzett - terület mérőszáma:

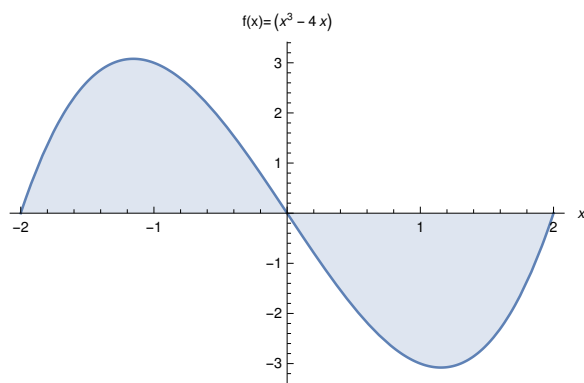
$$\begin{aligned}
 \mu(T) &= - \int_{-3}^{-2} (-x^2 - 2x) \, dx + \int_{-2}^0 (-x^2 - 2x) \, dx + \int_0^2 (-x^2 - 2x) \, dx = \\
 &= \int_{-3}^{-2} (x^2 + 2x) \, dx + \int_{-2}^0 (-x^2 - 2x) \, dx + \int_0^2 (x^2 + 2x) \, dx = \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{-3}^{-2} - \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \\
 &= \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) - (-9 + 9) - \left(0 - \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) \right) + \left(\left(\frac{8}{3} + 4 \right) \right) = \\
 &= 12 - \frac{8}{3} = \frac{28}{3}.
 \end{aligned}$$

Megjegyzés:

$$\mu(T) \neq \int_{-3}^2 (-x^2 - 2x) \, dx.$$

2. Számítsuk ki az $f(x) = x^3 - 4x$ és az x -tengely által közrezárt véges síkrész területének mérőszámát, ha $x \in [-2, 2]$!

Megoldás: Készítsünk vázlatot!



A keresett - az ábrán szürke színnel jelzett - véges síkrész területének mérőszáma:

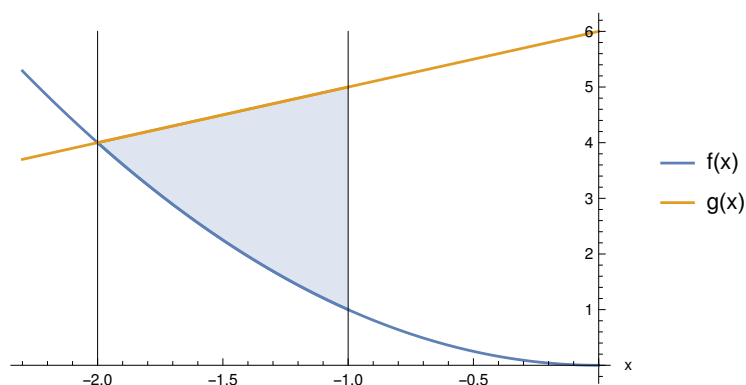
$$\mu(T) = (-2) \int_0^2 (x^3 - 4x) dx = (-2) \left[\frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = (-2)(4 - 8) = 8.$$

Megjegyzés:

$$\int_0^2 (x^3 - 4x) dx < 0.$$

3. Mekkora területet határolnak az $f(x) = x^2$, a $g(x) = x + 6$, az $x = -2$ és az $x = -1$ görbék?

Megoldás: Készítsünk vázlatot!

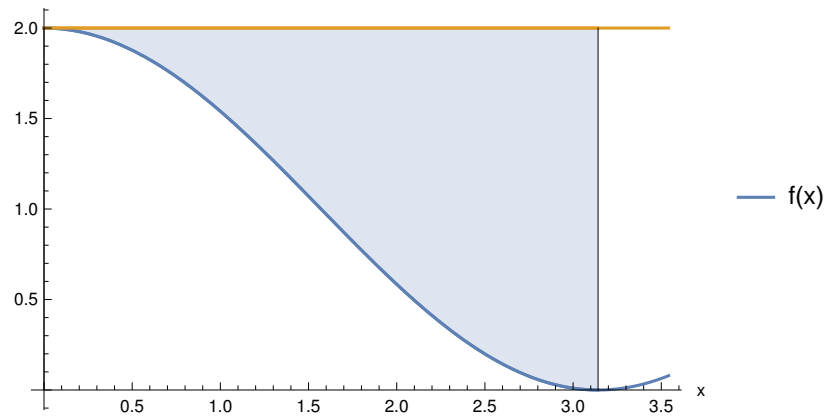


A keresett - az ábrán szürke színnel jelzett - terület mérőszáma:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} (x + 6 - x^2) dx &= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{-1} = \\ &= \left(\frac{(-1)^2}{2} + 6(-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 6(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) = \\ &= \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

4. Adjuk meg annak a tartománynak a területét, amelyet az $f(x) = 1 + \cos x$ függvény grafikonja, valamint az $y = 2$ és az $x = \pi$ egyenesek zárnak közre!

Megoldás: Készítsünk vázlatot!

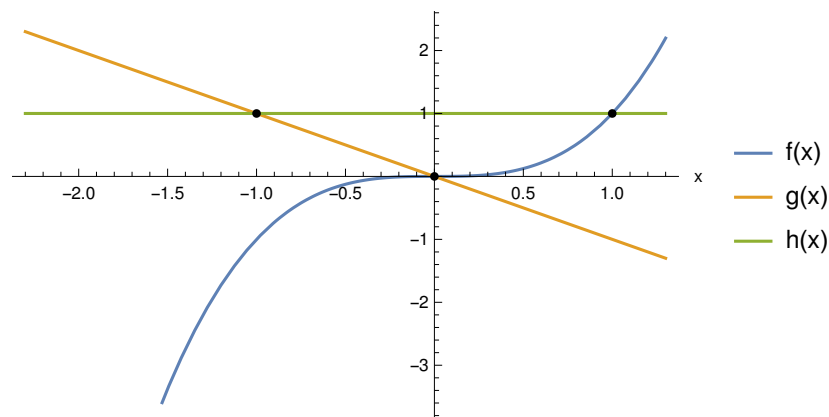


A keresett - az ábrán szürke színnel jelzett - véges síkrész területének mérőszáma:

$$\mu(T) = \int_0^{\pi} (2 - (1 + \cos x)) \, dx = \int_0^{\pi} (1 - \cos x) \, dx = [x - \sin x]_0^{\pi} = \pi.$$

5. Vázoljuk az $f(x) = x^3$ függvény grafikonja, a $g(x) = -x$ és a $h(x) = 1$ egyenesek által határolt tartományt, majd határozzuk meg a területét!

Megoldás: Készítsünk vázlatot!

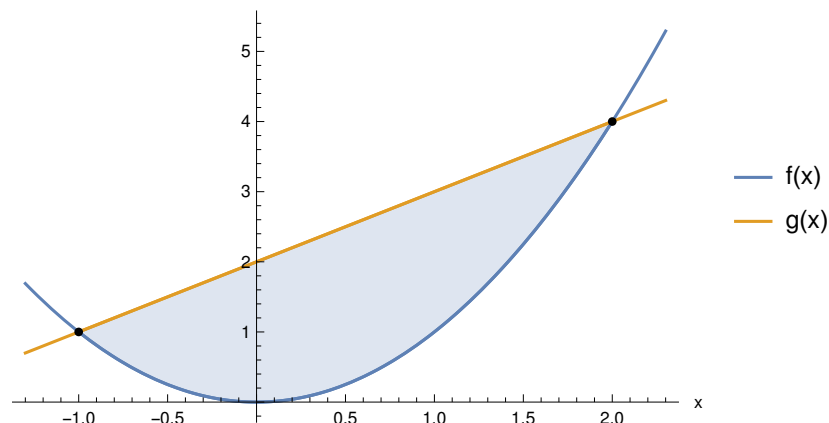


A keresett terület mérőszáma:

$$\mu(T) = \int_0^1 (\sqrt[3]{y} - (-y)) \, dy = \frac{3}{4} \left[y^{\frac{4}{3}} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6}.$$

6. Számítsuk ki az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = x + 2$ görbék által közrezárt síkrész területét!

Megoldás: Készítsünk vázlatot!



A metszéspontokat az $x^2 = x + 2$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

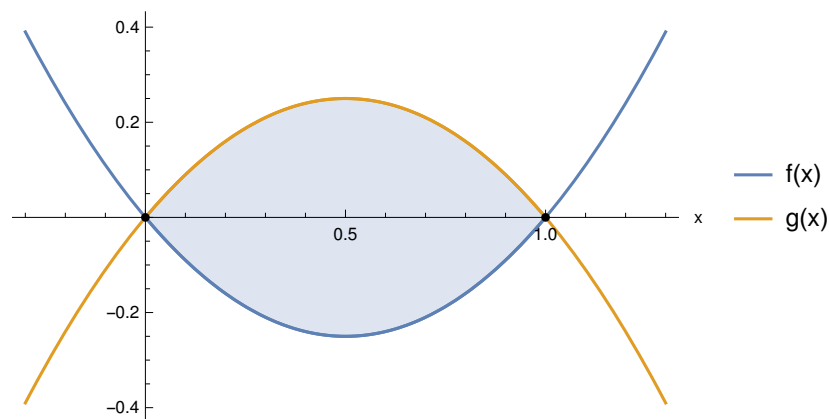
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}.$$

A gyökök: $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$. A keresett terület mérőszáma:

$$\mu(T) = \int_{-1}^2 (g(x) - f(x)) \, dx = \int_{-1}^2 ((x + 2) - x^2) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

7. Adjuk meg az $f(x) = x^2 - x$ és a $g(x) = x - x^2$ parabolák által határolt tartomány területének mérőszámát!

Megoldás: Készítsünk vázlatot!



Először meg kell határoznunk a metszéspontokat!

$$\begin{aligned}x^2 - x &= x - x^2 \\2x^2 - 2x &= 0 \\x(x - 1) &= 0\end{aligned}$$

A gyökök: $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. A metszéspontok tehát a $(0, 0)$ és az $(1, 1)$ pontok. A keresett (az ábrán szürke színnel jelzett) terület mérőszáma:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (g(x) - f(x)) \, dx &= \int_0^1 ((x - x^2) - (x^2 - x)) \, dx = \\&= 2 \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \\&= 2 \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \\&= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \\&= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

8. Számítsuk ki az x_0 értékét úgy, hogy az y -tengely, az $f(x) = \sqrt{x}$ egyenletű görbe, valamint a görbének az x_0 abszcisszájú pontjához húzott érintője által határolt véges terület mérőszáma

$$\mu(T) = \frac{2}{3}$$

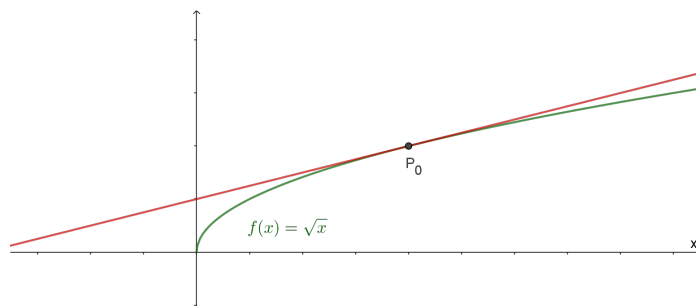
legyen!

Megoldás: Írjuk fel az $f(x) = \sqrt{x}$ egyenletű görbe x_0 abszcisszájú pontjához húzható érintő egyenletét!

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Az érintőt a $P_0(x_0, \sqrt{x_0})$ pontba húzzuk. Az érintő egyenlete:

$$y_e = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x + \frac{\sqrt{x_0}}{2}.$$



Tehát

$$\begin{aligned}
 \mu(T) &= \int_0^{x_0} \left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x + \frac{\sqrt{x_0}}{2} - \sqrt{x} \right) dx = \\
 &= \left[\frac{1}{2\sqrt{x_0}} \frac{x^2}{2} + \frac{\sqrt{x_0}}{2}x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{x_0} = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0\sqrt{x_0}}{2} - \frac{2x_0\sqrt{x_0}}{3} = \\
 &= \frac{1}{12}x_0\sqrt{x_0}.
 \end{aligned}$$

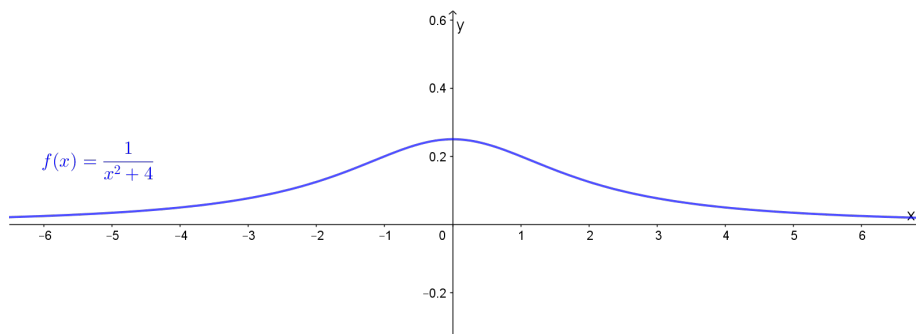
Azaz

$$\mu(T) = \frac{1}{12}x_0\sqrt{x_0} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_0\sqrt{x_0} = 8 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 4.$$

9. Vázoljuk az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ függvény grafikonját! Számítsuk ki a $b \in \mathbb{R}$ paraméter értékét, ha a görbe alatti terület a $[-b, b]$ intervallumon 1!

Megoldás:

Készítsünk vázlatot!



A feladat szövege alapján:

$$\mu(T) = \int_{-b}^b \frac{1}{x^2+4} dx = 1.$$

Számítsuk ki a határozott interált!

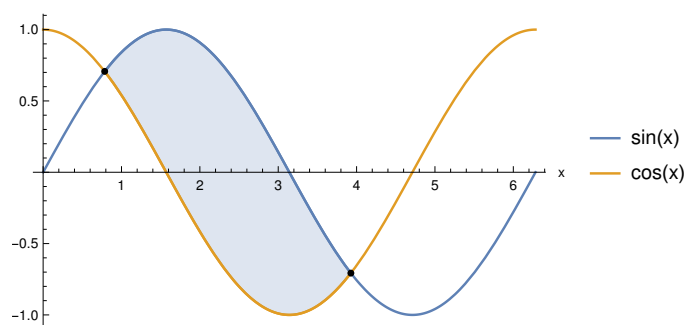
$$\int_{-b}^b \frac{1}{x^2+4} dx = 2 \int_0^b \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int_0^b \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} = t \\ x = 2t \\ dx = 2 dt \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 0 & b \\ \hline t & 1 & \frac{b}{2} \\ \hline \end{array} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$= [\operatorname{arctg} t]_0^{\frac{b}{2}} = \operatorname{arctg} \frac{b}{2} - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} \frac{b}{2}.$$

$$\mu(T) = 1 = \operatorname{arctg} \frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{2} = \operatorname{tg} 1 \quad \Rightarrow \quad b = 2 \operatorname{tg} 1.$$

10. Ábrázoljuk ugyanabban a koordináta-rendszerben az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = \cos x$ függvényt, majd számítsuk ki, hogy mekkora területűek a megadott görbék által közrezárt tartományok!

Megoldás: Készítsünk vázlatot!

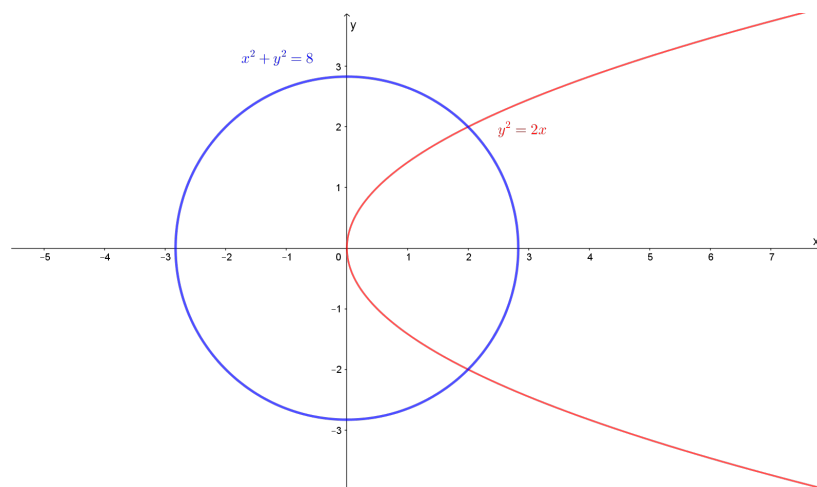


A keresett (az ábrán szürke színnel jelzett) terület mérőszáma:

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = -[\cos x + \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \\ &= -\left(\left(\cos \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4}\right) - \left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}\right)\right) = \\ &= -\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

11. Mekkora területű síkidomot zár közre az $y^2 = 2x$ parabola és az $x^2 + y^2 = 8$ kör?

Megoldás: Készítsünk vázlatot!

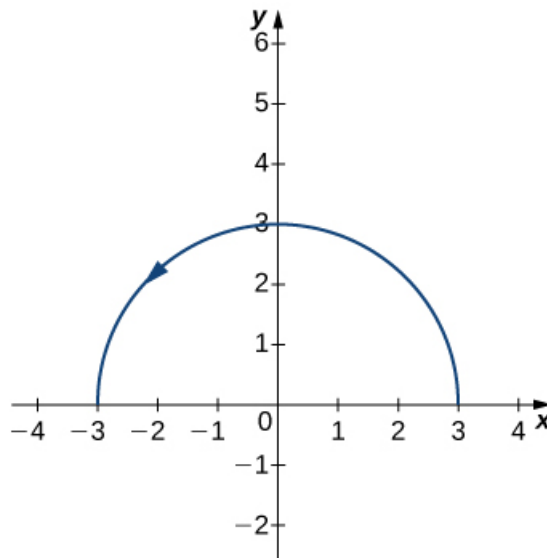


A görbék a $P_1(2, 2)$ és a $P_2(2, -2)$ pontokban metszik egymást. A keresett terület mérőszáma:

$$\mu(T) = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

12. Számítsuk ki az $\left. \begin{array}{l} x(t) = 3 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{array} \right\}$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe alatti terület mérőszámát a $0 \leq t \leq \pi$ intervallumban!

Megoldás: Készítsünk vázlatot!



$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -3 \sin t,$$

így

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \int_{\pi}^0 y(t) \cdot \dot{x}(t) dt = - \int_0^{\pi} 3 \sin t \cdot (-3) \sin t dt = 9 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = 9 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{9}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right] = \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

13. Számítsuk ki az $\left. \begin{array}{l} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin 2t \end{array} \right\}$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe alatti terület mérőszámát a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban ($r > 0$)!

Megoldás:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -r \sin t, \quad \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 2r \cos 2t,$$

így

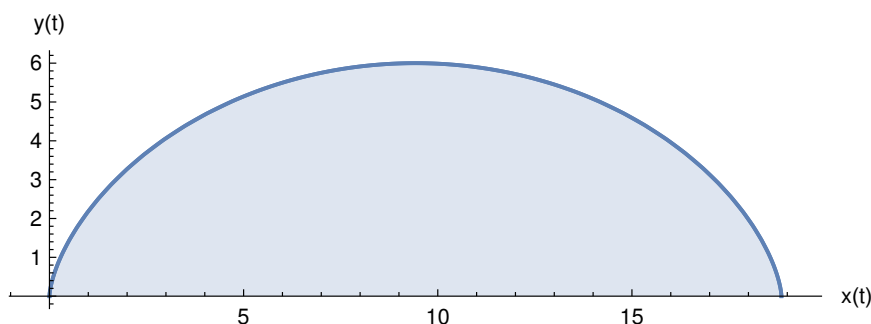
$$\begin{aligned}
 \mu(S) &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos t \cdot 2r \cos 2t + r \sin t \cdot r \sin 2t) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r^2 \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t) + 2r^2 \sin^2 t \cos t) dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \\
 &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (1 - \sin^2 t) dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \cos t \sin^2 t) dt = \\
 &= r^2 \left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} r^2.
 \end{aligned}$$

14. Számítsuk ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 3(t - \sin t) \\ y(t) &= 3(1 - \cos t) \end{aligned} \right\}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott közösleges ciklois egy íve alatti terület mérőszámát!

Megoldás: Készítsünk vázlatot!



Mivel

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 3(1 - \cos t),$$

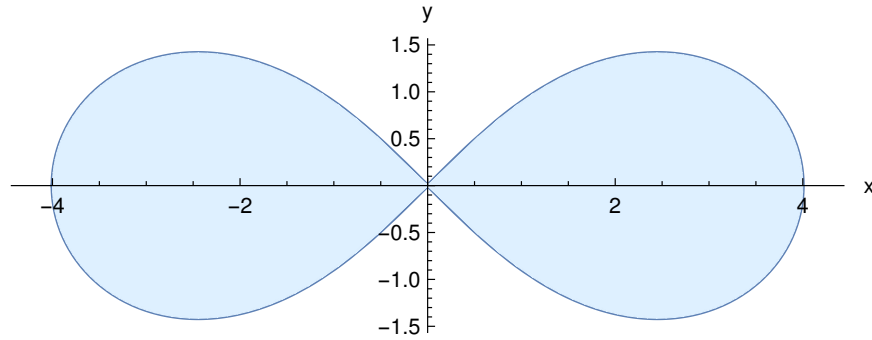
így az ábrán szürke színnel jelzett terület mérőszáma:

$$\begin{aligned}
 \mu(T) &= \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \dot{x}(t) dt = \int_0^{2\pi} 9(1 - \cos t)^2 dt = 9 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \\
 &= 9 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = 9 \left[t - 2 \sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = 27\pi.
 \end{aligned}$$

15. Számítsuk ki az $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ görbe (lemnizkát) területét! Vázoljuk a görbét!

Megoldás: A lemnizkát esetén $\cos 2\varphi \geq 0$, azaz

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{és} \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}.$$

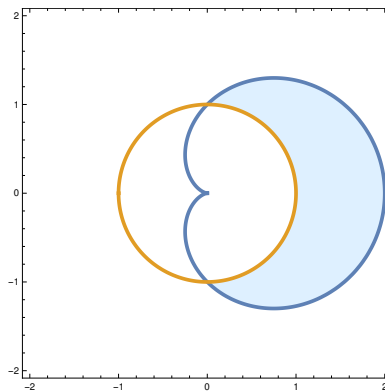


A keresett (az ábrán kék színnel jelzett) terület mérőszáma:

$$\mu(S) = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 \cdot \cos 2\varphi \, d\varphi = 32 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi = 32 \left[\frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 16.$$

16. Számítsuk ki azon síktartomány területét, amely az $r = 1 + \cos \varphi$ görbén belül és az $r = 1$ körön kívül van!

Megoldás: Készítsünk vázlatot!



A keresett (az ábrán kék színnel jelzett) terület mérőszáma:

$$\begin{aligned} \mu(S) &= 2 \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((1 + \cos \varphi)^2 - 1^2) \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi) \, d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) \, d\varphi = \left[2 \sin \varphi + \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

17. Határozzuk meg az $r = \sin \varphi$ kör által határolt tartomány $r = 1 - \cos \varphi$ kardioidon kívül eső részének a területét!

Megoldás:

$$\begin{aligned}\mu(S) &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \varphi - (1 - \cos \varphi)^2) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \varphi - 1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \left[2 \sin \varphi - \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

18. Határozzuk meg az $r = \sin 2\varphi$ négylevelű lóhere egyik levelének területét!

Megoldás:

$$\mu(S) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{4} \left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}.$$

Síkgörbék ívhosszának számítása

19. Számítsuk ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 - \cos t \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott ciklois ívhosszát a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban!

Megoldás: Az

$$\dot{x}(t) = 1 - \cos t \quad \text{és} \quad \dot{y}(t) = \sin t$$

deriváltak folytonosak, valamint

$$[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 = (1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2 \cos t.$$

Az ívhossz:

$$\begin{aligned}L &= \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{\left(\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}\right) - \left(\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}\right)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2 \left[-\frac{\cos \frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{2\pi} = -4 \left[\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -4(-1 - 1) = 8.\end{aligned}$$

20. Számítsuk ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \cos^3 t \\ y(t) &= \sin^3 t \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban! Vázoljuk a görbét!

Megoldás:

$$\dot{x}(t) = 3 \cos^2 t (-\sin t) = -3 \cos^2 t \sin t \quad \text{és} \quad \dot{y}(t) = 3 \sin^2 t \cos t = 3 \sin^2 t \cos t$$

folyttonosak, valamint

$$\begin{aligned} [\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 &= 9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t = 9 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) = \\ &= 9 \cos^2 t \sin^2 t. \end{aligned}$$

Az ívhossz:

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 |\cos t| |\sin t| dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^1 (\sin t)' dt = 3 \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$