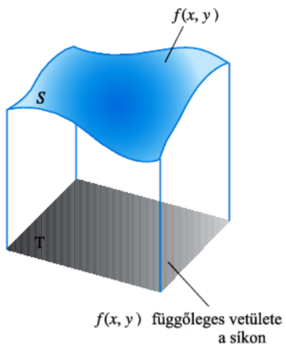
A 10. előadáshoz javasolt feladatok részletesen kidolgozott megoldásai

Felület felszínének számítása kettős integrállal

Felület felszínének számítására az általános képlet:

$$\mu(A) = \iint\limits_T \sqrt{(f_x')^2 + (f_y')^2 + 1}\, dxdy,$$

ahol T a $z = f(x, y)$ kétváltozós függvény xy-síkbeli vetülete:



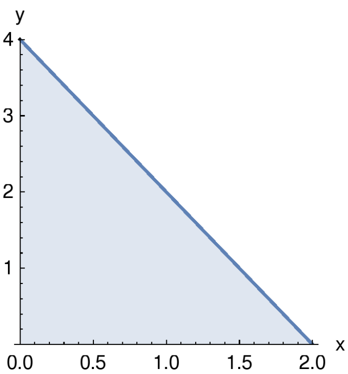
1. Számítsuk ki a következő felület felszínét:

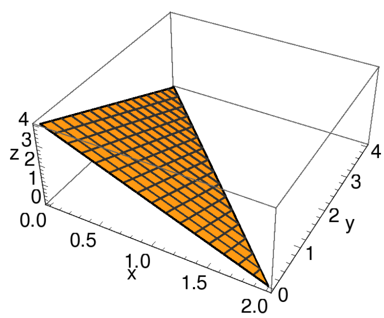
$$6x + 3y + 3z = 12, \qquad x, y, z \geq 0.$$

Megoldás: A $6x+3y+3z = 12$ felület egy sík. Az egyenletből $z = f(x, y)$ könnyen kifejezhető:

$$z = f(x, y) = \frac{1}{3}(12 - 6x - 3y) = 4 - 2x - y.$$

Ha $x, y, z \geq 0$, akkor az adott sík első térnyolcadba eső darabját kapjuk:





Ennek a darabnak az xy-síkon egy háromszög a vetülete. Az xy-sík egyenlete $z = 0$, így a $0 = 4 - 2x - y$ összefüggvésből kapjuk, hogy

$$y = 4 - 2x.$$

A T tartományt az x- és az y-tengely, valamint az $y = 4 - 2x$ egyenes határolja. Tehát:

$$T \subset \mathbb{R}^2, \quad T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x \geq 0,\, y \geq 0,\, y \leq 4 - 2x\right\}.$$

Vagyis:

$$f(x, y) = 4 - 2x - y \qquad \text{és} \qquad f'_x = -2, \quad f'_y = -1,$$

így

$$\mu(A) = \iint\limits_T \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{4-2x} \sqrt{1 + (-2)^2 + (-1)^2}\, dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\left[\sqrt{6}y\right]_{y=0}^{y=4-2x} \right) dx = \int\limits_0^2 \left(\sqrt{6}(4 - 2x)\right) dx = 2 \cdot (4\sqrt{6}) - (\sqrt{6} \cdot 2) \cdot 2^2/2 \approx 9.7979\,.$$

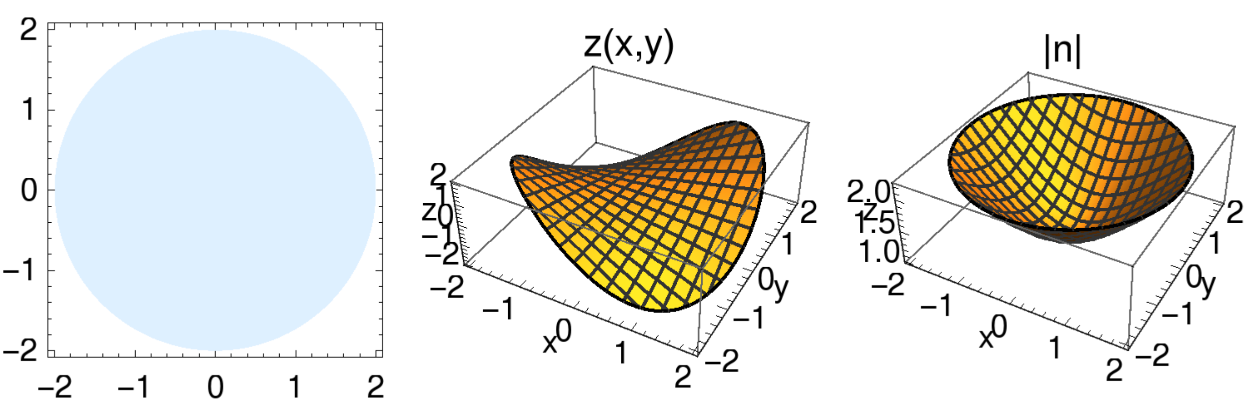
vagy

$$\mu(A) = \iint\limits_T \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy = \mu(T) \cdot \sqrt{1 + (-2)^2 + (-1)^2} = \frac{2 \cdot 4}{2}\sqrt{6} \approx 9.7979\,.$$

2. Számítsuk ki a következő felület felszínét:

$$z = xy, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

Megoldás: A $z = f(x, y) = xy$ kétváltozós függvény egy nyeregfelület, amelynek az origó középpontú, 2 sugarú körlap feletti darabjának felszínét fogjuk meghatározni:



Az ábrán $|n|$ a felület $\vec{n} = (1, -f'_x, -f'_y)$ normálvektorának az abszolút értékét jelöli. Tehát:

$$T \subset \mathbb{R}^2, \quad T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 \leq 4\right\},$$
$$z : T \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \to (x,y,f(x,y)) \qquad \text{és} \qquad f(x,y) = xy \quad \Rightarrow \quad f'_x = y,\ f'_y = x$$

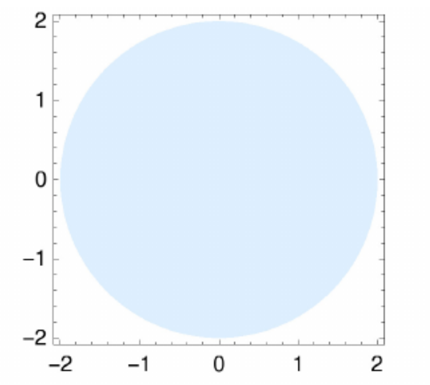
$$\mu(A) = \iint_T \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy = \iint_T \sqrt{1 + y^2 + x^2}\, dxdy =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{1+r^2} \cdot r\, dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+r^2)^{3/2}}{3/2} \right]_{r=0}^{r=2} d\varphi =$$
$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5^{3/2} - 1^{3/2}}{3/2} = \frac{10\sqrt{5}\pi}{3}.$$

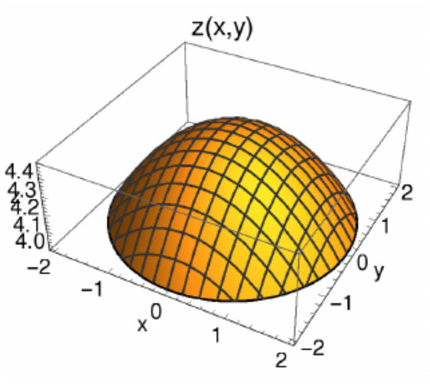
3. Számítsuk ki a következő felület felszínét:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 20, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad z \geq 0.$$

Megoldás:

A $x^2 + y^2 + z^2 = 20$ egyenlet az origó középpontú $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ sugarú gömb egyenlete. Mivel $z \geq 0$, így csak a felső félgömb azon részének felszínét kell meghatároznunk, amely az origó középpontú 2 sugarú körlap felett található:





$$T \subset \mathbb{R}^2, \quad T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Tehát:

$$f : T \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \to (x,y,f(x,y)), \quad f(x,y) = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$$

és

$$f'_x = \frac{-x}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}}, \qquad f'_y = \frac{-y}{\sqrt{20 - x^2 - y^2}}.$$

Így

$$\mu(A) = \iint_T \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy = \iint_T \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{20-x^2-y^2}}\, dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{1 + \frac{r^2}{20-r^2}} \cdot r\, dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 2\sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{20-r^2}} \cdot r\, dr \right) d\varphi =$$

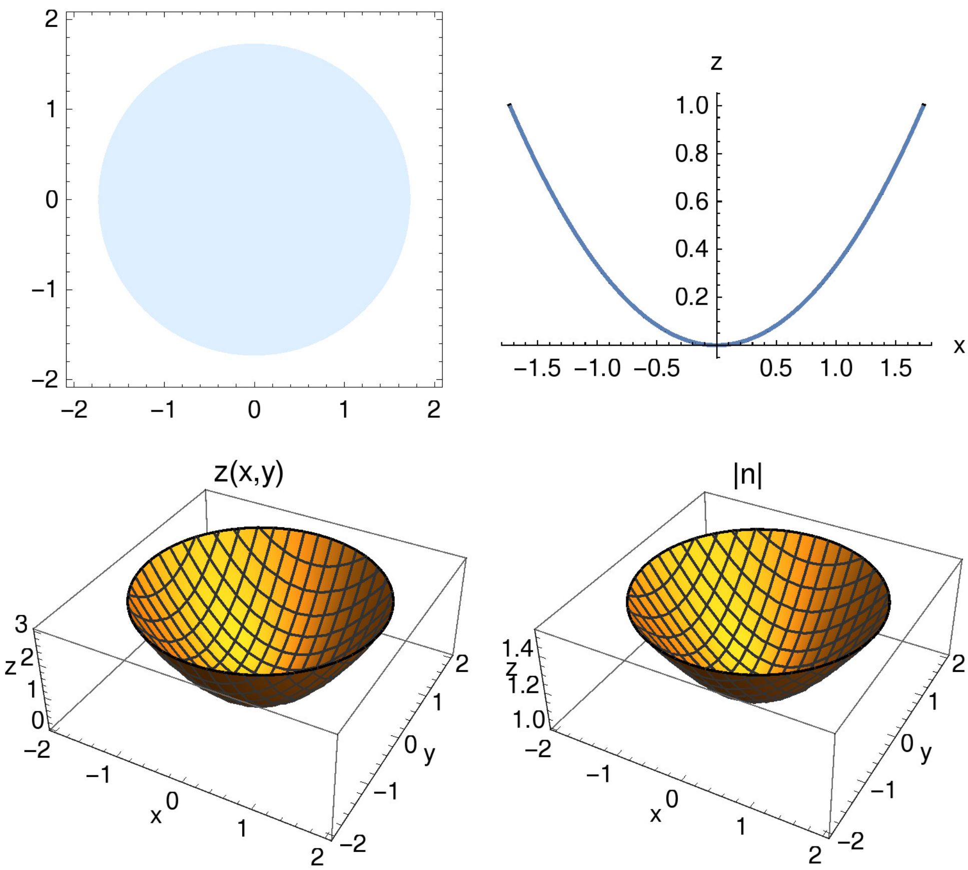
$$= \int_0^{2\pi} \left[-2\sqrt{5}\sqrt{20-r^2} \right]_{r=0}^{r=2} d\varphi = 2\pi(20 - 8\sqrt{5}).$$

4. Számítsuk ki a következő felület felszínét:

$$x^2 + y^2 = 3z, \quad x^2 + y^2 \leq 3.$$

Megoldás:

Az $x^2 + y^2 = 3z$ forgásparaboloid felszínét számoljuk az origó középpontú $\sqrt{3}$ sugarú körlap felett:

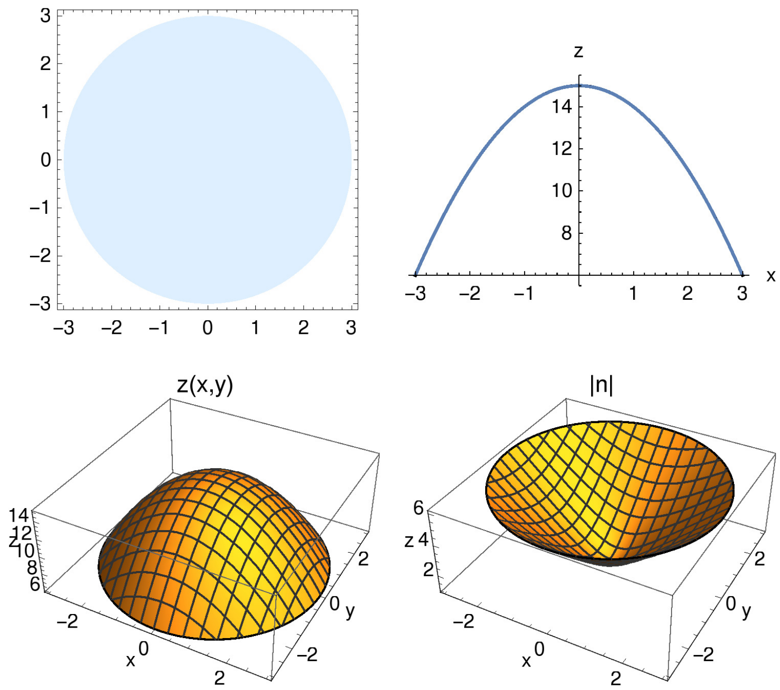


Ekkor
$$T \subset \mathbb{R}^2 \qquad \text{és} \qquad T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 \le 3\right\}.$$
Továbbá
$$f : T \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \to (x,y,f(x,y)), \quad f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{3}$$
és
$$f'_x = \frac{2x}{3}, \qquad f'_y = \frac{2y}{3}.$$
A keresett felszín mérőszám:
$$\mu(A) = \iint_T \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy = \iint_T \sqrt{1 + \frac{4x^2+4y^2}{9}}\, dxdy =$$
$$= \iint_T \sqrt{1 + \frac{4(x^2+y^2)}{9}}\, dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{4r^2}{9}} \cdot r\, dr \right) d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{4} \left(1 + \frac{4r^2}{9}\right)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{3}} d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{12} \left(7\sqrt{21} - 9\right) = \frac{\left(7\sqrt{21} - 9\right)\pi}{6} \approx 12.0836\,.$$

5. Számítsuk ki a következő felületekkel határolt test **teljes** felszínét:
$$z = 15 - x^2 - y^2, \quad z = 6.$$

Megoldás:

A $z = 15 - x^2 - y^2$ forgásparboloidot elmetszettük a $z = 6$ síkkal. Készítsünk vázlatot!



Ekkor

$$\begin{aligned} 15 - x^2 - y^2 &= 6 \\ x^2 + y^2 &= 9. \end{aligned}$$

Az integrációs tartomány tehát az origó középpontú 3 sugarú körlap:

$$T \subset \mathbb{R}^2 \qquad \text{és} \qquad T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,| x^2 + y^2 \leq 9\right\}.$$

Továbbá:

$$f : T \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \to (x, y, f(x, y)), \quad f(x, y) = 15 - x^2 - y^2,$$

így

$$f'_x = -2x, \;\; f'_y = -2y.$$

A keresett felszín mérőszáma:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \iint\limits_T \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy = \iint\limits_T \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy = \\ &= \iint\limits_T \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r \, dr \right) d\varphi = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} \left(1 + 4r^2\right)^{3/2} \right]_0^3 d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{12} \left(37\sqrt{37} - 1\right) = \frac{\left(37\sqrt{37} - 1\right)\pi}{6}. \end{aligned}$$

A teljes felszín:

$$\mu(A_t) = \mu(A) + \mu(T) = \frac{\left(37\sqrt{37} - 1\right)\pi}{6} + 9\pi.$$

6. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ gömb azon részének felszínét, amely a $z = 2$ és a $z = 4$ síkok között van!

   Megoldás:

   A gömb egyenletéből fejezzük ki z-t!

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 25 \\ z^2 &= 25 - x^2 - y^2 \\ z &= \pm\sqrt{25 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

   $z > 0$, ezért az

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

   explicit egyenlettel dolgozhatunk a továbbiakban. A parciális deriváltak:

$$f'_x = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \qquad \text{és} \qquad f'_y = \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}},$$

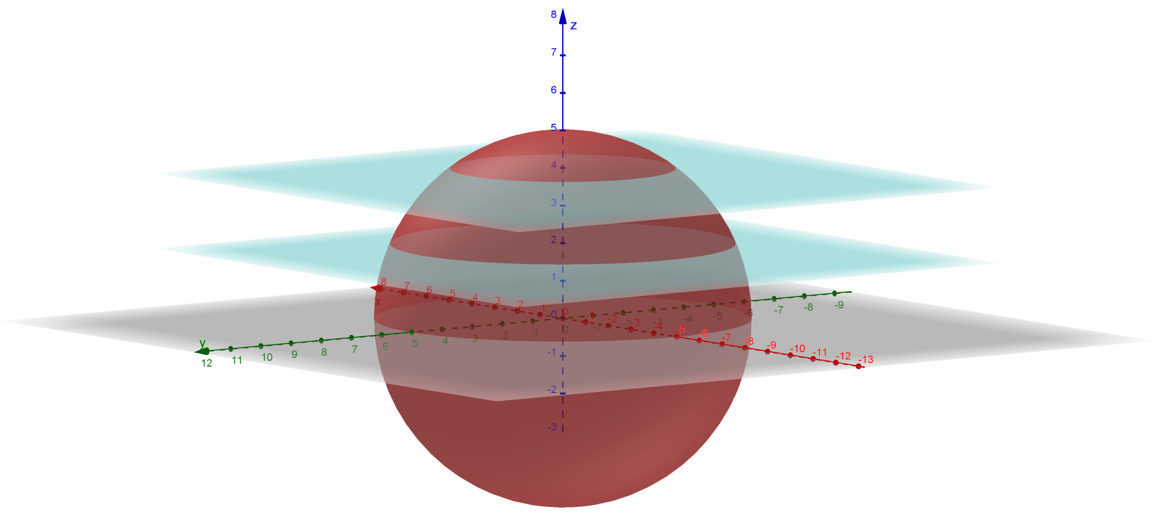
így

$$1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2=1+\frac{x^2}{25-x^2-y^2}+\frac{y^2}{25-x^2-y^2}=\frac{25}{25-x^2-y^2}.$$

A keresett felszín a

$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}\mid 9\le x^2+y^2\le 21\}$$

tartomány fölött van.



A keresett felszín mérőszáma:

$$\mu(A)=\iint\limits_T\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy=\iint\limits_T\sqrt{\frac{25}{25-x^2-y^2}}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_T\sqrt{\frac{25}{25-(x^2+y^2)}}\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_3^{\sqrt{21}}\frac{5}{\sqrt{25-r^2}}\cdot r\,dr\right)\,d\varphi=$$

$$=\left(-\frac{5}{2}\right)\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_3^{\sqrt{21}}(-2)r(25-r^2)^{-\frac{1}{2}}\,dr\right)\,d\varphi=\left(-\frac{5}{2}\right)\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{(25-r^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_3^{\sqrt{21}}\,d\varphi=$$

$$=(-5)\int\limits_0^{2\pi}\left[\sqrt{25-x^2}\right]_3^{\sqrt{21}}\,d\varphi=(-5)\cdot 2\pi\cdot(2-4)=20\pi.$$

7. Számítsuk ki az

$$I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} x^3 y e^z \, dV$$

hármas inregrált, ahol

$$\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \ln 2 \right\}$$

téglatest!

Megoldás:

Ha az integrálás téglatesten történik, valamint az integrandus felírható három egyváltozós függvény szorzataként, akkor három egyszeres integrál szorzataként számolható a hármas integrál:

$$I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} x^3 y e^z \, dV = \int_1^2 x^3 \, dx \cdot \int_0^1 y \, dy \int_0^{\ln 2} e^z \, dz = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 \cdot \left[e^z \right]_1^{\ln 2} =$$
$$= \left(4 - \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 - 1) = \frac{15}{8}.$$

8. Számítsuk ki az alábbi hármas integrálokat!

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^x \int_0^{2-x^2} xyz \, dz dy dx;$

(b) $\displaystyle\int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} x e^y \, dy dz dx;$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \int_z^2 \int_0^{\sqrt{3}y} \frac{y}{x^2 + y^2} \, dx dy dz;$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^y xyz \, dz dy dx.$

Megoldás:

A hármas integrálok kiszámítására Fubini tételét használjuk, tehát három egyszeres integrál kiszámítását végezzük el:

(a) $$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^x \left(\int_0^{2-x^2} xyz \, dz \right) dy dx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^x xy \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x^2} dy dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} x \left(2 - x^2 \right)^2 \left(\int_0^x y \, dy \right) dx =$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} x \left(2 - x^2 \right)^2 \frac{x^2}{2} \, dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left(x^3 - x^5 + \frac{1}{4} x^7 \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{32} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{6}.$$

(b) $$\int_1^3\int_x^{x^2}\left(\int_0^{\ln z} xe^y\,dy\right)dzdx=\int_1^3\int_x^{x^2}\left(x\left[e^y\right]_0^{\ln z}\right)dzdx=\int_1^3\left(x\int_x^{x^2}(z-1)\,dz\right)dx=$$
$$=\int_1^3 x\left[\frac{z^2}{2}-z\right]_x^{x^2}dx=\int_1^3\left(\frac{1}{2}x^5-\frac{3}{2}x^3+x^2\right)dx=\left[\frac{x^6}{12}-\frac{3x^4}{8}+\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\frac{118}{3}.$$

(c) $$\int_1^2\int_z^2\left(\int_0^{\sqrt{3}y}\frac{y}{x^2+y^2}\,dx\right)dydz=\int_1^2\int_z^2\left(\frac{1}{y}\int_0^{\sqrt{3}y}\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,dx\right)dydz=$$
$$=\int_1^2\int_z^2\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right]_0^{\sqrt{3}y}dydz=\int_1^2\int_z^2\operatorname{arctg}\sqrt{3}dydz=\int_1^2\left(\int_z^2\frac{\pi}{3}\,dy\right)dz=$$
$$=\frac{\pi}{3}\int_1^2(2-z)\,dz=\frac{\pi}{3}\left[2z-\frac{z^2}{2}\right]_1^2=\frac{\pi}{6}.$$

(d) $$\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}\left(\int_0^y xyz\,dz\right)dydx=\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}xy\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^y dydx=\int_{-1}^1\left(\int_0^{1-x^2}\frac{1}{2}xy^3\,dy\right)dx=$$
$$=\int_{-1}^1\frac{1}{2}x\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^{1-x^2}dx=-\frac{1}{16}\int_{-1}^1\left(-2x\left(1-x^2\right)^4\right)dx=-\frac{1}{16}\left[\frac{\left(1-x^2\right)^5}{5}\right]_{-1}^1=0.$$

9. Jellemezze azt a testet, amelynek térfogatát a

$$\mu(V)=\int_{x=0}^{5}\int_{y=0}^{\sqrt{25-x^2}}\int_{z=0}^{3}dzdydx$$

hármas integrál adja meg és számítsa ki a térfogatot!

Megoldás:

A test az $x^2+y^2=25$ egyenletű egyenes hengernek az $z=0$ és a $z=3$ síkok közötti első térnyolcadba eső része.
Térfogata:

$$\mu(V)=\int_{x=0}^{5}\int_{y=0}^{\sqrt{25-x^2}}\int_{z=0}^{3}dzdydx=\frac{1}{4}(25\pi\cdot 3)=\frac{75\pi}{4}.$$

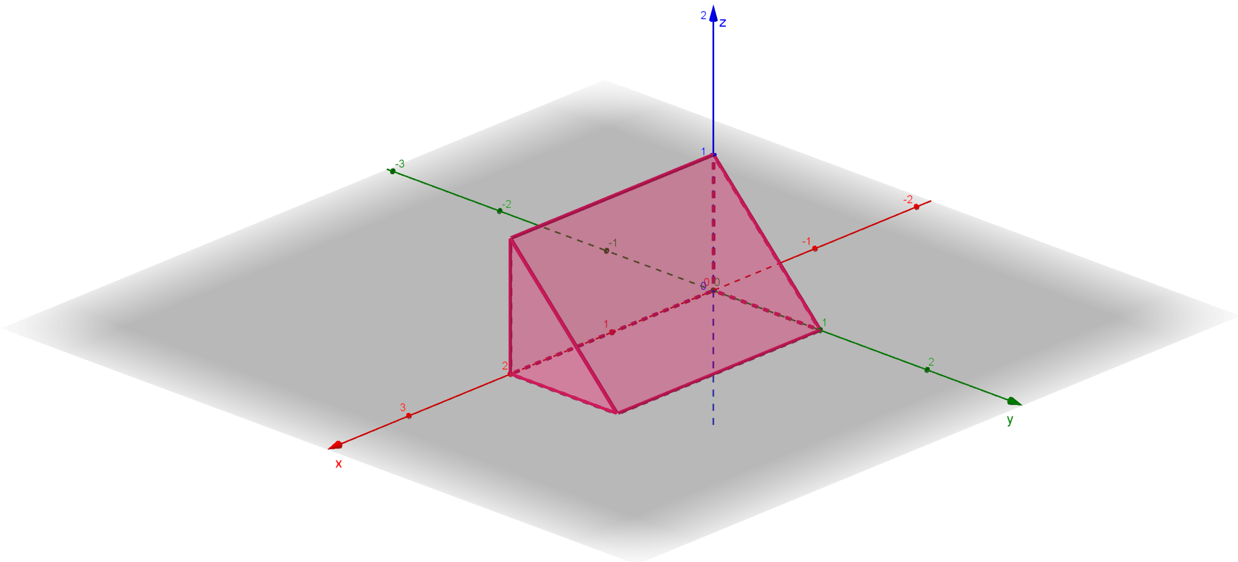
10. Számítsuk ki hármas integrállal annak a V tartománynak a térfogatát, amelyre:

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 2, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1-y\right\}.$$

Vázoljuk a tartományt!

Megoldás:

Először elkészítjük a vázlatot:



A hasáb térfogatának mérőszáma:

$$\mu(V) = \iiint\limits_V dV = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{z=0}^{1-y} dzdydx = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{1} [z]_0^{1-y} dydx = \int\limits_{x=0}^{2} \left(\int\limits_{y=0}^{1} (1-y)dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{2} \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \int\limits_{x=0}^{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2}[x]_0^2 = 1.$$

A térfogat az alábbi hármas integrálok bármelyikével számolható:

$$\mu(V) = \iiint\limits_V dV = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{z=0}^{1-y} dzdydx = \int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{z=0}^{1-y} dzdxdy = \int\limits_{z=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1-z} \int\limits_{x=0}^{2} dxdydz =$$

$$= \int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{z=0}^{1-y} \int\limits_{x=0}^{2} dxdzdy = \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{z=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1-z} dydzdx = \int\limits_{z=0}^{1} \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{1-z} dydxdz = 1.$$

A kapott eredmény könnyedén ellenőrizhető, mert a V tartomány az egységnégyzet alapú, 2 egység magasságú hasáb fele, így térfogata:

$$\mu(V) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

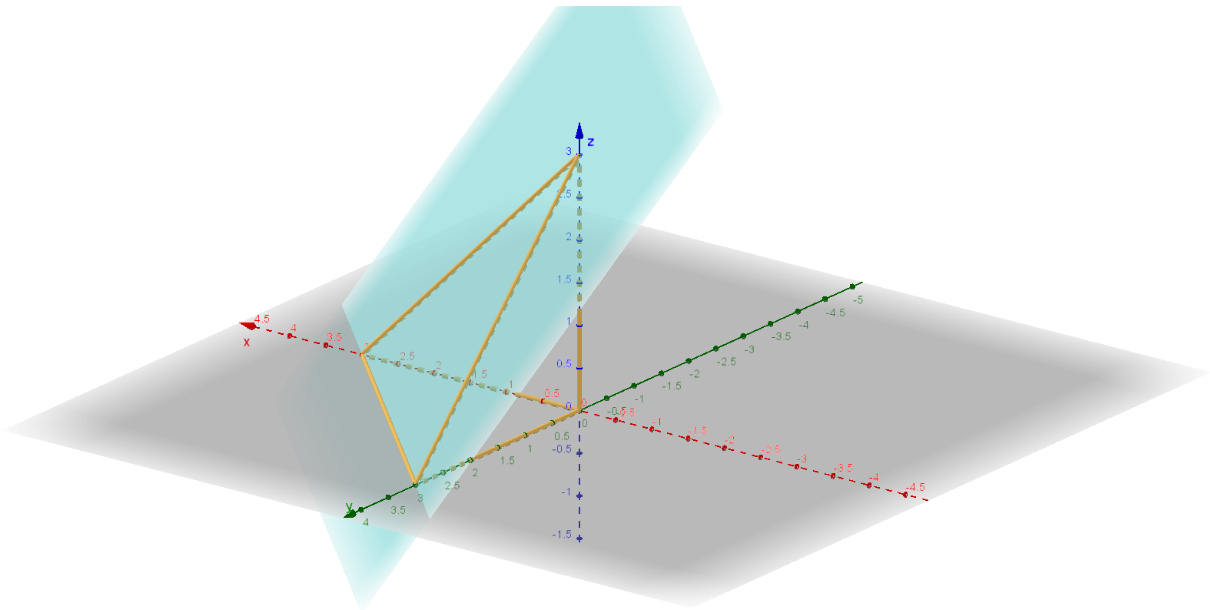
11. Jellemezze azt a testet, amelynek térfogatát a

$$\mu(V)=\int\limits_{x=0}^{3}\int\limits_{y=0}^{3-x}\int\limits_{z=0}^{3-x-y} dzdydx$$

hármas integrál adja meg és számítsa ki a térfogatot!

Megoldás:

A testet felülről a $z=3-x-y$ sík, alulról az xy-síkban lévő, a koordinátatengelyek és az $y=3-x$ egyenes által határolt derékszögű háromszög fogja körül.



A test egy tetraéder, melynek térfogata:

$$\mu(V)=\int\limits_{x=0}^{3}\int\limits_{y=0}^{3-x}\int\limits_{z=0}^{3-x-y} dzdydx=\frac{1}{6}\cdot 3^3=\frac{9}{2}.$$

Az integrált Fubini-tétele alapján is kiszámoljuk:

$$\mu(V)=\int\limits_{x=0}^{3}\int\limits_{y=0}^{3-x}\left(\int\limits_{z=0}^{3-x-y} dz\right)dydx=\int\limits_{x=0}^{3}\int\limits_{y=0}^{3-x}[z]_0^{3-x-y}\,dydx=\int\limits_{x=0}^{3}\left(\int\limits_{y=0}^{3-x}(3-x-y)\,dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_{x=0}^{3}\left[3y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^{3-x}dx=\int\limits_{x=0}^{3}\left(\frac{9}{2}-3x+\frac{x^2}{2}\right)dx=\left[\frac{9}{2}x-3\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]_0^3=\frac{9}{2}.$$

A **hengerkoordináták** egy térbeli $P(x, y, z)$ pontot egy rendezett (r, φ, z) számhármassal definiálnak, ahol r és φ a P pont xy-síkbeli vetületének poláris koordinátái, z pedig változatlanul a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerbeli 3. koordináta.

Összefüggések:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \\ x^2 + y^2 &= r^2 \\ dxdydz &= r\, drd\varphi dz \end{aligned}$$

Tehát:

$$\iiint\limits_{V_{x,y,z}} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{V_{r,\varphi,z}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \cdot r\, drd\varphi dz.$$

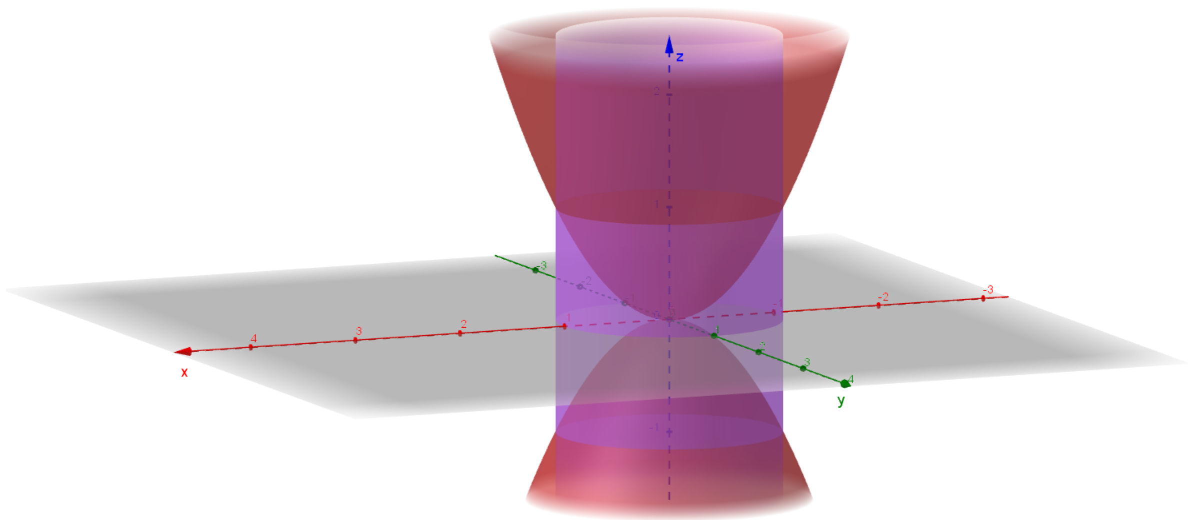
12. Írjuk át hengerkoordinátákra, majd számítsuk ki az

$$I = \int\limits_{x=-1}^{1} \int\limits_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{z=-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 3x^2\, dzdydx$$

integrált! Vázoljuk az integációs tartományt!

Megoldás:

Az integrációs tartomány az $z = x^2 + y^2$ és a $z = -(x^2 + y^2)$ parboloidok közötti térrész, amely az $x^2 + y^2 = 1$ egyenes körhenger belsejében van:



Térjünk át hengerkoordinátákra:

$$I = \int\limits_{x=-1}^{1} \int\limits_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{z=-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 3x^2 \, dzdydx =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=-r^2}^{r^2} 3 \cdot (r \sin\varphi)^2 \cdot r \, dzdrd\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=-r^2}^{r^2} 3 \cdot r^3 \cdot \sin^2\varphi \, dzdrd\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} 3 \cdot r^3 \cdot \sin^2\varphi \left(\int\limits_{z=-r^2}^{r^2} dz \right) drd\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} 3 \cdot r^3 \cdot \sin^2\varphi \cdot [z]_{-r^2}^{r^2} \, drd\varphi =$$

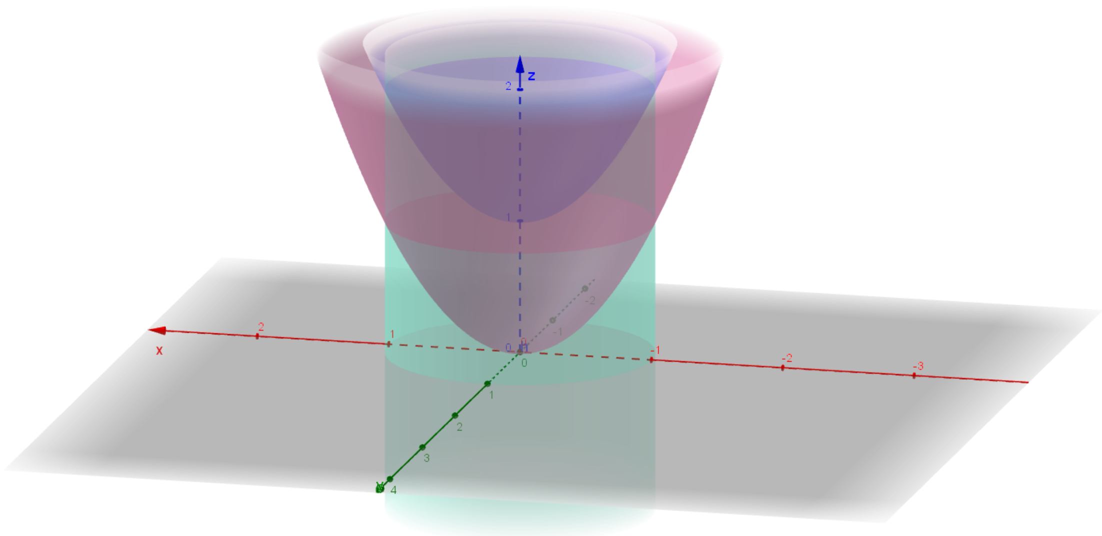
$$= 3 \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \cdot \int\limits_{r=0}^{1} 2r^5 \, dr = 6 \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \, d\varphi \cdot \int\limits_{r=0}^{1} r^5 \, dr =$$

$$= 3 \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^1 = 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{6} = \pi.$$

13. Mekkora a térfogata annak a tartománynak, amelyet alulról a $z = x^2 + y^2$ paraboloid, oldalról az $x^2 + y^2 = 1$ henger, felülről pedig a $z = x^2 + y^2 + 1$ paraboloid határol?

Megoldás:

Az integrációs tartomány az $z = x^2 + y^2$ és a $z = x^2 + y^2 + 1$ parboloidok közötti térrész, amely az $x^2 + y^2 = 1$ egyenes körhenger belsejében van:



Az integrációs tartomány vetülete az xy-síkban az origó középpontú, egység sugarú körlap, így

$$\mu(V) = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left((x^2+y^2+1)-(x^2+y^2)\right)\, dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} dxdx = \mu(T) = \pi.$$

Számolhatunk hármas integrállal is, hengerkoordinátákra történő áttéréssel:

$$\mu(V) = \int\limits_{x=-1}^{1} \int\limits_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{z=x^2+y^2}^{x^2+y^2+1} dzdydx = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=r^2}^{r^2+1} r\, dzdrd\varphi =$$

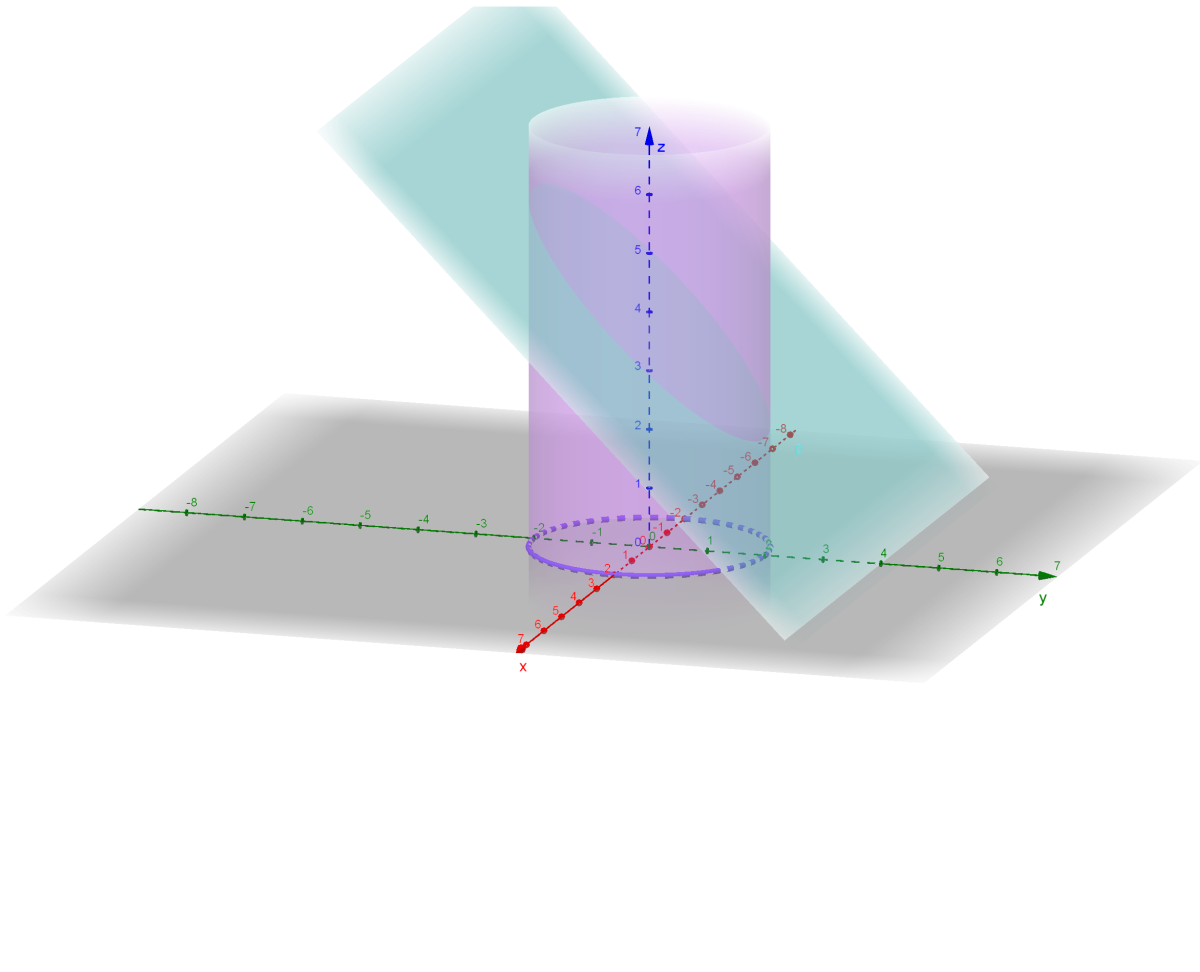
$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} r\cdot [z]_{r^2}^{r^2+1}\, drd\varphi = 2\pi \int\limits_{r=0}^{1} r\cdot [z]_{r^2}^{r^2+1}\, dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_{r=0}^{1} r\, dr = 2\pi\cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi.$$

14. Mekkora a térfogata annak a tartománynak, amelyet az $x^2+y^2=4$ henger és az $y+z=4$, valamint a $z=0$ síkok zárnak közre?

Megoldás:

Készítsünk vázlatot!



Hármas integrállal számolunk, hengerkoordinátákra történő áttéréssel:

$$\mu(V) = \int\limits_{x=-2}^{2} \int\limits_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int\limits_{z=0}^{4-y} dzdydx = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} \int\limits_{z=0}^{4-r\sin\varphi} r\, dzdrd\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} r \cdot [z]_0^{4-r\sin\varphi}\, drd\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} \left(4r - r^2 \sin\varphi\right)\, drd\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left[4 \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \sin\varphi\right]_0^2 d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left(8 - \frac{8}{3}\sin\varphi\right) d\varphi =$$

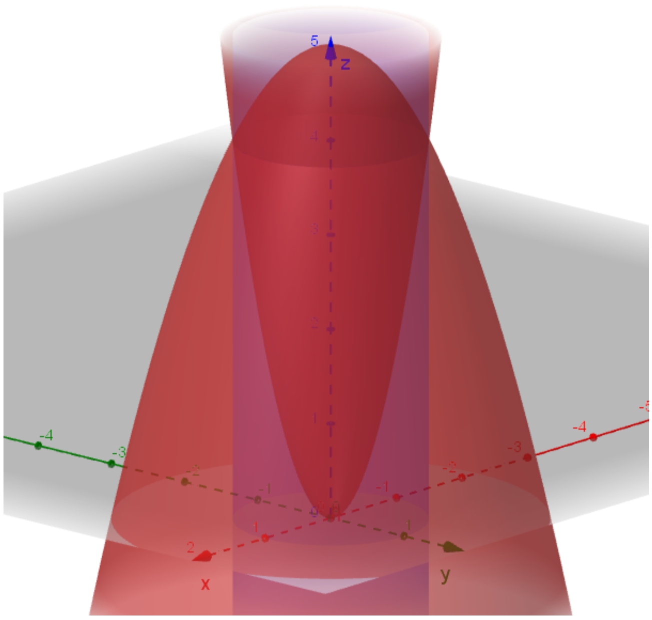
$$= \left[8\varphi + \frac{8}{3}\cos\varphi\right]_0^{2\pi} = 16\pi + \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 16\pi.$$

15. Mekkora a térfogata annak a tartománynak, amelyet az $z = 5 - x^2 - y^2$ és a $z = 4x^2 + 4y^2$ paraboloidok határolnak?

Megoldás:

Készítsünk vázlatot! A paraboloidok által közrezárt térrész az $x^2 + y^2 = 1$ henger belsejében van, mert a metszésvonal:

$$5 - (x^2 + y^2) = 4(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad 5(x^2 + y^2) = 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1.$$



Hármas integrállal számolunk, hengerkoordinátákra történő áttéréssel:

$$\mu(V) = \int\limits_{x=-1}^{1} \int\limits_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{z=4(x^2+y^2)}^{5-x^2-y^2} dzdydx = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=4r^2}^{5-r^2} r\, dzdrd\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_{r=0}^{1} r \cdot [z]_{4r^2}^{5-r^2}\, dr = 2\pi \int\limits_{r=0}^{1} 5\left(r - r^3\right)\, dr =$$

$$= 10\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 10\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5\pi}{2}.$$

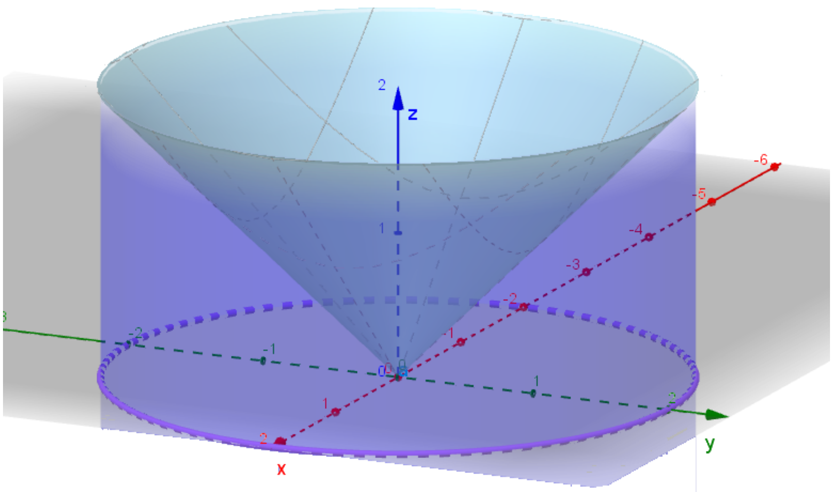
16. Számítsuk ki az

$$I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} x^2 z \sqrt{x^2+y^2}\, dV$$

hármas inregrált, ahol a $\mathcal{V}$ tartományt a $z = 0$, a $z = \sqrt{x^2+y^2}$ és az $x^2 + y^2 = 4$ felületek zárják közre!

Megoldás:

Készítsünk vázlatot! A megadott felületek által közrezárt térrész az $x^2 + y^2 = 4$ henger belsejében van:



A $\mathcal{V}$ tartományt alulról az xy-síkban lévő $x^2 + y^2 \le 4$ körlap, oldalról az $x^2 + y^2 = 4$ henger, felülről pedig a $z = \sqrt{x^2+y^2}$ kúp határolja. A keresett I integrált hengerkoordinátákra történő áttéréssel számoljuk:

$$I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} x^2 z\sqrt{x^2+y^2}\, dV = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} \int\limits_{z=0}^{r} r^2\cos^2\varphi \cdot z \cdot r \cdot r \; dzdrd\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} r^4 \cos^2\varphi \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^r drd\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi \cdot \frac{1}{2}\int\limits_{r=0}^{2} r^6 \, dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi \cdot \int\limits_{r=0}^{2} r^6 \, dr = \frac{1}{4}\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^7}{7}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot \frac{2^7}{7} = \frac{64\pi}{7}.$$

A **gömbi koordináták** a tér egy $P(x,y,z)$ pontját egy rendezett (r,θ,φ) számhármassal adják meg, ahol r a P pont távolsága az origótól $(r \geq 0)$, θ a magassági szög, amely az OP szakasz xy-síkkal bezárt szöge $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$, φ pedig a polárszög, vagyis az OP' szakasznak az x-tengely pozitív felével bezárt szöge, ahol P' a P pont xy-síkbeli vetülete $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$.

Összefüggések:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\varphi \\ y &= r\cos\theta\sin\varphi \\ z &= r\sin\theta \\ x^2+y^2 &= r^2\cos^2\theta \\ x^2+y^2+z^2 &= r^2 \\ dxdydz &= r^2\cos\theta \, drd\theta d\varphi \end{aligned}$$

Tehát:

$$\iiint\limits_{V_{x,y,z}} f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_{V_{r,\theta,\varphi}} f(r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)\cdot r^2\cos\theta \, drd\theta d\varphi.$$

17. Számítsuk ki az

$$I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV$$

hármas integrált gömbi koordinátákra való áttéréssel, ahol

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$$

negyedgömb!

Megoldás:

$$I = \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{r=0}^{2} r \cdot r^2 \cos\theta \, dr d\theta d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int\limits_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta \cdot \int\limits_{r=0}^{2} r^3 \, dr = [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi.$$

18. Számítsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$ gömb térfogatát hármas integrállal, gömbi koordináták alkalmazásával!

Megoldás:

Teljes gömb esetén $0 \leq r \leq R$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ és $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Tehát:

$$\mu(V) = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{r=0}^{R} r^2 \cos\theta \, dr d\theta d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta \cdot \int\limits_{r=0}^{R} r^2 \, dr =$$

$$= [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = 2\pi \cdot (1 - (-1) \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3} R^3 \pi.$$

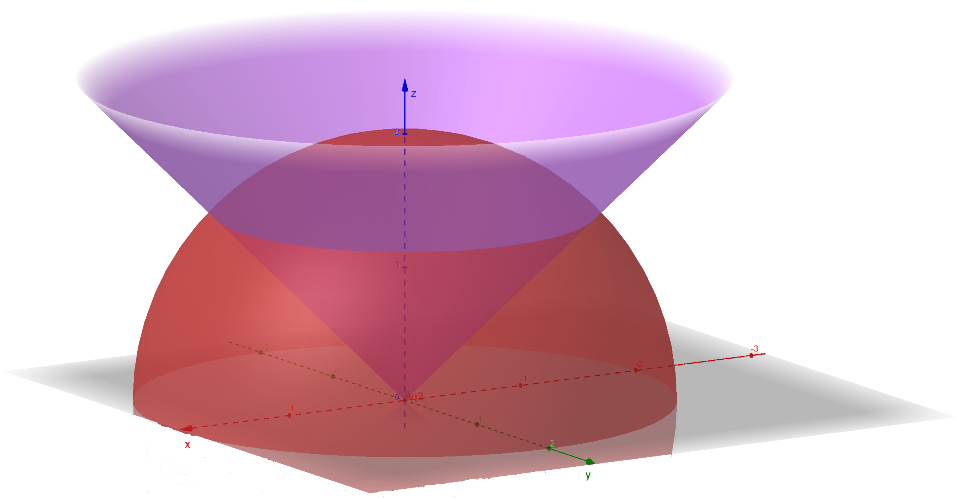
19. Számítsuk ki az

$$I = \iiint\limits_{\mathcal{V}} dV$$

hármas integrált, ha a $\mathcal{V}$ tartományt felülről a $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ félgömb, alulról pedig a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp zárják közre!

Megoldás:

Készítsünk vázlatot!



Keressük meg a metszésvonalat! Az egyenletekből adódik, hogy

$$4 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2(x^2 + y^2),$$

azaz

$$T : x^2 + y^2 \leq 2,$$

origó középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú körlap.

I. megoldás: Hengerkoordináták alkalmazásával

$$I = \int\limits_{x=-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int\limits_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int\limits_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} \int\limits_{z=r}^{\sqrt{4-r^2}} r\; dzdrd\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} r \cdot [z]_r^{\sqrt{4-r^2}}\; drd\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} \left(r\sqrt{4-r^2} - r^2\right)\; drd\varphi = 2\pi \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} (-2r)(4-r^2)^{\frac{1}{2}}\, dr - \int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} r^2\, dr \right) =$$

$$= 2\pi \left(\left(-\frac{1}{3}\right) \left[\frac{(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} - \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} \right) = 2\pi \left(\left(-\frac{1}{3}\right)(2\sqrt{2} - 8) - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{8\pi}{3}(2 - \sqrt{2}).$$

II. megoldás: Gömbi koordináták alkalmazásával

$$I = \int\limits_{x=-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int\limits_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int\limits_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{r=0}^{2} r^2 \cos\theta\, drd\theta d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \cdot \int\limits_{r=0}^{2} r^2\, dr = [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [\sin\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$= 2\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{8}{3} = \frac{8\pi}{3}(2 - \sqrt{2}).$$