

Fourier-sorok

Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia

ME, Analízis Tanszék

2010. április 7.

A Taylor-polinom ill. Taylor-sor hátránya, hogy az adott függvényt csak a sorfejtés helyén ill. annak környezetében közelíti jól. A sorfejtés helyétől távolodva a közelítés pontossága csökken.

1.1. Definíció

A

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = a_0 + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots \quad (1)$$

sor **trigonometrikus sornak** nevezzük, amelyben a_0, a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots$) konstansok a sor együtthatói.

A trigonometrikus sor tagjai periodikus függvények.

1.2. Definíció

A

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx + \dots$$

sort **tiszta koszinusz sornak**, a

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin kx = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx + \dots$$

sort **tiszta szinusz sornak** nevezzük.

A Fourier-sor periodikus függvények trigonometrikus soral való közelítése, így periodikus jelenségek vizsgálatánál van nagy jelentősége. Ez a közelítés nem egy pontban, vagy annak környezetében közelíti meg a függvényt, hanem egy intervallumban.

1.3. Feladat

Legyen f a 2π hosszúságú intervallumban korlátos és integrálható függvény. Keressük azt az

$$F_n(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2)$$

polinomot, amelyre az

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - F_n(x)]^2 dx$$

integrál a lehető legkisebb.

Ebben a szélsőértékfeladatban az ismeretlenek az

$$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$$

együtthatók.

1.3. Feladat megoldása

Annak a feltételnek, hogy az f függvény és az $F_n(x)$ trigonometrikus polinom eltéréseinek négyzetintegrálja minimális legyen a **Fourier-együtthatók** tesznek eleget:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad b_0 = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

1.4. Definíció

A Fourier-együtthatókkal előállított trigonometrikus sort **Fourier-sornak** nevezzük.

Megjegyzések

- ① Az $F_n(x)$ polinom nem egy pont közelében közelít jól, hanem egy intervallumon.
- ② Ha az adott f függvény 2π szerint periodikus függvény, akkor a Fourier-együtthatókban szereplő integrálok eredménye nem változik, ha az integrálás határai nem 0 és 2π , hanem tetszőleges 2π hosszúságú intervallum.
- ③ Ha az f függvény a perióduson belül szakadós, vagy a függvény folytonos ugyan, de a deriváltjának van szakadása, akkor a határozott integrálnál tanultak alapján az integrálás szakaszonként végzendő el és az eredmények összeadandóak.

Bizonyos esetekben a Fourier.együtthatókat könnyebben kiszámíthatjuk:

Speciális esetek

1. Ha f páros függvény, azaz

$$f(x) = f(-x)$$

és integrálható $[0, 2\pi]$ -n, akkor

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Speciális esetek

2. Ha f páratlan függvény, azaz

$$f(x) = -f(-x),$$

és integrálható $[0, 2\pi]$ -n, akkor

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

A Fourier-sorok konvergenciájára érényes tételeket nem bizonyítjuk.

Fontosabb tulajdonságok

Egy megadott $f(x)$ periodikus függvényt mindig előállítja a Fourier-sora, ha az $f(x)$ függvényre az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

- 1 a sorfejtési intervallum belsejében folytonos és korlátos,
- 2 ha véges számú hely kivételével folytonos és minden pontban létezik a jobb és a bal oldali differenciálhányados és ezek korlátosak,
- 3 elegendő kielégítenie az ún. Lipschitz-feltételt, azaz az intervallum belsejében levő két tetszőleges x_1 és x_2 pontra létezik olyan K tetszőleges pozitív konstans és $p > 0$ szám, aelyekre:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq K \cdot |x_2 - x_1|^p, \quad 0 < p \leq 1.$$

1.6. Példa

Határozzuk meg az $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha } -\pi \leq x < \pi \\ f(x + 2\pi), & \text{egyébként} \end{cases}$ függvény Fourier-sorát!

Az f függvény páros, így

$$b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

azaz a sor tiszta koszinusz sor.

A Fourier-együtthatók kiszámítása:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

továbbá

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1),$$

azaz $k \neq 0$ esetén:

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

A Fourier-sor tehát:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \dots \right].$$

Ha az $x = 0$ helyettesítést elvégezzük, akkor a

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \dots \right]$$

sor adódik, amelyből π -re adódik, hogy:

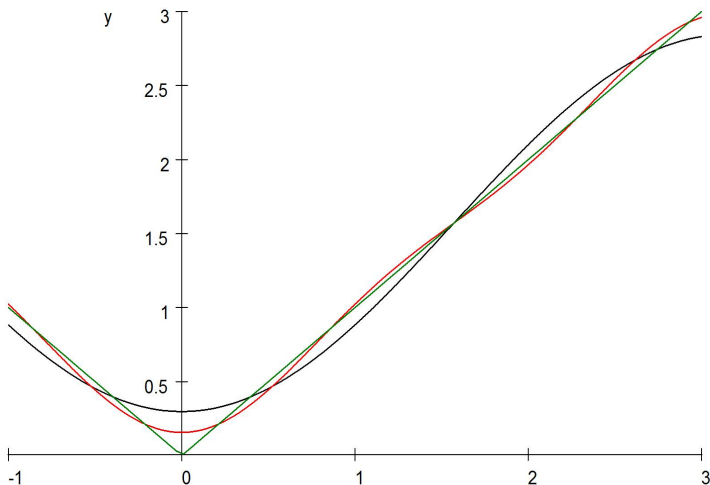
$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \dots,$$

azaz

$$\pi^2 = 8 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \dots \right).$$

Ábrázoljuk az $f(x)$ függvény első néhány Fourier-polinomját!

$$F_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x, \quad F_2(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{\cos 3x}{9} \right]$$



1.7. Példa

Határozzuk meg az $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0, x = \pi \\ 1, & \text{ha } 0 < x < \pi \end{cases}$,
 $f(x + 2\pi) = f(x)$ függvény Fourier-sorát!

Az f függvény páratlan, így

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

azaz a sor tiszta szinusz sor.

A b_k együtthatók számítása:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin kx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^k}{k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Innen néhány együttható értéke:

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_3 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{3}, \quad b_5 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{5}$$

A függvény Fourier-sora:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

- ① Igazolja, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}, & \text{ha } 0 \leq x < 2\pi \\ f(x + 2\pi), & \text{egyébként} \end{cases}$$

periodikus függvény Fourier-sora a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ sor!

- ② Adott az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & \text{ha } -\pi \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

függvény. Vázolja a függvény grafikonját! Adja meg az f függvény Fourier-sorát!