

Analízis II.



GEMAN 161B

Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

Feladatgyűjtemény



**Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia
2010**

1. feladatlap

Analízis II.

Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

- | | |
|--|---|
| 1. $\int (x^{-3} + 2x^7 - \sqrt{x}) dx;$ | 2. $\int \left(\frac{2}{x^5} - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} \cdot \sqrt[7]{x^2} \right) dx;$ |
| 3. $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 4\sqrt[3]{x}}{x} dx;$ | 4. $\int (12 + 5^x + 2^{2x+1} - 4e^x) dx;$ |
| 5. $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx;$ | 6. $\int \left(-2 \sin x + 3 \cos x - \frac{2}{x} \right) dx;$ |
| 7. $\int \sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x}} dx;$ | 8. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx;$ |
| 9. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right) dx;$ | 10. $\int (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) dx.$ |

2. Vezessük vissza elemi integrálokra a következő integrálok kiszámítását!

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\int 3^x e^x dx;$ | 2. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx;$ | 3. $\int \frac{\sqrt[3]{4}}{3+3x^2} dx;$ |
| 4. $\int \operatorname{tg}^2 x dx;$ | 5. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$ | 6. $\int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch}^2 x} dx;$ |
| 7. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx;$ | 8. $\int \operatorname{cth}^2 x dx;$ | 9. $\int \sqrt[3]{1-3x} dx;$ |
| 10. $\int x(x^2 + 10)^{30} dx;$ | 11. $\int (x+1)^{10} dx;$ | 12. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx;$ |
| 13. $\int \sin^2 x \cos x dx;$ | 14. $\int \cos^5 x \sin x dx;$ | 15. $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx;$ |
| 16. $\int x\sqrt{x^2+1} dx;$ | 17. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx;$ | 18. $\int \sqrt{\operatorname{ch} x - 1} \operatorname{sh} x dx;$ |
| 19. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}} dx;$ | 20. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[5]{3+\cos x}} dx;$ | 21. $\int \frac{\ln x}{x} dx;$ |
| 22. $\int \operatorname{tg} x dx;$ | 23. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx;$ | 24. $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx;$ |
| 25. $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx;$ | 26. $\int \frac{1}{x \ln x} dx;$ | 27. $\int \frac{1}{(\arccos x)\sqrt{1-x^2}} dx;$ |
| 28. $\int \frac{5 \sin 2x}{\sin^2 x + \pi} dx;$ | 29. $\int \cos(2x+1) dx;$ | 30. $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx.$ |
| 28. $\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx;$ | 29. $\int \cos kx dx;$ | 30. $\int 4^{2-5x} dx.$ |

2. feladatlap

Analízis II.

Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Szorzatintegrálással megoldható feladatok:

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\int x e^x dx;$ | 2. $\int x \sin 2x dx;$ | 3. $\int x^2 7^x dx;$ |
| 4. $\int x^2 \cos x dx;$ | 5. $\int x^3 \sin 2x dx;$ | 6. $\int x^2 e^{-2x} dx;$ |
| 7. $\int e^x 7^x dx;$ | 8. $\int e^{2x+\ln x} dx;$ | 9. $\int x e^x dx;$ |
| 10. $\int \ln x dx;$ | 11. $\int x \ln x dx;$ | 12. $\int \arctg x dx;$ |
| 13. $\int \arcsin x dx;$ | 14. $\int \arccos x dx;$ | 15. $\int \operatorname{arsh} x dx,$ |
| 16. $\int \arctg \frac{x}{2} dx; ,$ | 17. $\int \operatorname{arth} x dx,$ | 18. $\int \ln^2 x dx;$ |
| 19. $\int x^2 \arctg x dx;$ | 20. $\int x \arctg x dx;$ | 21. $\int x \arccos x dx;$ |
| 22. $\int (x^2 + x) \operatorname{ch} x dx;$ | 23. $\int (x^2 + 2x) \ln x dx;$ | 24. $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx;$ |
| 25. $\int e^x \sin x dx;$ | 26. $\int \operatorname{ch} x \cdot \sin 5x dx;$ | 27. $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx;$ |
| 28. $\int e^{3x+2 \ln x} dx;$ | 29. $\int \sin 2x \cdot \sin 5x dx;$ | 30. $\int \operatorname{sh}(2x-1) \cdot \cos(1-3x) dx.$ |

2. Helyettesítéssel megoldható feladatok:

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\int \frac{1}{\cos^2(1-5x)} dx;$ | 2. $\int \frac{dx}{x^2+4};$ | 3. $\int e^{\cos x} \sin x dx;$ |
| 4. $\int 6^{\sin x} \cos x dx;$ | 5. $\int \frac{1}{\sin^2(4x+7)};$ | 6. $\int x^4 \operatorname{sh}(x^5-6) dx;$ |
| 7. $\int e^{\sin x} dx;$ | 8. $\int e^x \cos(e^x) dx;$ | 9. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx;$ |
| 10. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$ | 11. $\int e^{\sqrt{x}} dx;$ | 12. $\int \sqrt{e^x-1} dx;$ |
| 13. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx;$ | 14. $\int \frac{2+x}{5+x^2} dx;$ | 15. $\int \frac{1}{\sin x} dx;$ |
| 16. $\int \frac{1}{\cos x} dx;$ | 17. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} dx;$ | 18. $\int \frac{1}{1+\sin x} dx;$ |
| 19. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx;$ | 20. $\int \sqrt{x^2-25} dx;$ | 21. $\int \sqrt{1-4x^2} dx;$ |
| 22. $\int \sqrt{x^2+9} dx;$ | 23. $\int \sqrt{1-2x-x^2} dx;$ | 24. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x-1}} dx;$ |
| 25. $\int \sqrt{x^2-2x-1} dx;$ | 26. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx;$ | 27. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2} dx$ |
| 28. $\int \sin \sqrt{x} dx;$ | 29. $\int x \sqrt{2x+5} dx;$ | 30. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx;$ |
| 31. $\int x^2 \sqrt{3+x} dx;$ | 32. $\int \frac{2\sqrt[3]{x}}{1-x\sqrt[3]{x}} dx;$ | 33. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}.$ |

3. feladatlap

Analízis II.

Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Trigonometrikus és hiperbolikus függvények integrálása:

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\int \sin^3 x \cos x \, dx;$ | 2. $\int \sin x \cos^2 x \, dx;$ | 3. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx;$ |
| 4. $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx;$ | 5. $\int \cos^3 x \, dx;$ | 6. $\int \sin^5 x \, dx;$ |
| 7. $\int \sin^4 x \, dx;$ | 8. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx;$ | 9. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} \, dx;$ |
| 10. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx \, dx;$ | 11. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} \, dx;$ | 12. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx;$ |
| 13. $\int \sin^3 2x \cos^2 2x \, dx;$ | 14. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^3 x \, dx;$ | 15. $\int \operatorname{sh}^4 x \, dx;$ |
| 16. $\int \operatorname{ch}^5 x \, dx;$ | 17. $\int \operatorname{th}^2 x \, dx;$ | 18. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^2 x} \, dx;$ |

2. Racionális törtfüggvények integrálása:

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\int \frac{1}{2x+3} \, dx;$ | 2. $\int \frac{x+2}{x+1} \, dx;$ | 3. $\int \frac{1}{x(x+1)} \, dx;$ |
| 4. $\int \frac{2}{(x-1)(x+1)} \, dx;$ | 5. $\int \frac{3x-59}{(x+11)(2x-1)} \, dx;$ | 6. $\int \frac{11x-29}{(3x-5)(x-7)} \, dx;$ |
| 7. $\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} \, dx;$ | 8. $\int \frac{3x+1}{x^3-x} \, dx;$ | 9. $\int \frac{1}{(2x-1)^2} \, dx;$ |
| 10. $\int \frac{2x-1}{(x-2)^2} \, dx \, dx;$ | 11. $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1} \, dx;$ | 12. $\int \frac{x}{x^2-6x+9} \, dx;$ |
| 13. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^3} \, dx;$ | 14. $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^3-x^2} \, dx;$ | 15. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx;$ |
| 16. $\int \frac{1}{x^2+4x+5} \, dx;$ | 17. $\int \frac{1}{x^2+4x+6} \, dx;$ | 18. $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} \, dx;$ |
| 19. $\int \frac{2x+7}{x^2+4x+5} \, dx;$ | 20. $\int \frac{5x+11}{x^2+4x+5} \, dx;$ | 21. $\int \frac{5x+11}{x^2-2x+5} \, dx;$ |
| 22. $\int \frac{1}{x^3+x} \, dx;$ | 23. $\int \frac{2x+3}{(x^2-1)^2} \, dx;$ | 24. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} \, dx;$ |
| 25. $\int \frac{2x}{x^2-1} \, dx;$ | 26. $\int \frac{x-3}{x^3+x^2+x+1} \, dx;$ | 27. $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2} \, dx$ |

Gyakorló feladatok

Analízis II.

Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx;$	b) $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx;$	c) $\int \sqrt{1 + \cos x} dx;$
d) $\int \frac{3 \cdot 8^x - 2 \cdot 3^x}{4^x} dx;$	e) $\int x^3 e^{x^2} dx;$	f) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx;$
g) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x};$	h) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx;$	i) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} dx;$
j) $\int \sqrt{x^2 - 2x - 1} dx;$	k) $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx;$	l) $\int e^{x+e^x} dx;$
m) $\int x^2 \ln(x+1) dx;$	n) $\int \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 8} dx;$	o) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx;$
p) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx;$	q) $\int \frac{dx}{2 + \sin x};$	r) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx;$
s) $\int \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 2x^2 + 3x} dx;$	t) $\int \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx;$	u) $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \ln x} dx .$

2. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}} dx;$	b) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(\cos x)} dx;$	c) $\int \frac{x^6}{x^4 - 1} dx;$
d) $\int e^{-x} (\sin 2x - \cos 2x) dx;$	e) $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{ch} x};$	f) $\int \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx;$
g) $\int (x^2 - 1) \sin 3x dx;$	h) $\int e^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx;$	i) $\int \frac{dx}{(1 + \operatorname{ch} x)^2} dx;$
j) $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x};$	k) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx;$	l) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx;$
m) $\int \frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} dx;$	n) $\int x^2 e^{\frac{\pi}{3}} dx;$	o) $\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx;$
p) $\int x \cos^2 \left(\frac{x}{2} - 2 \right) dx;$	q) $\int e^{x^2 + \ln x} dx;$	r) $\int \frac{e^x(1 + e^x)}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx .$

4. feladatlap

Analízis II.

Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Számítsuk ki a következő integrálok értékét!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx; & \text{b) } \int_0^{\pi} x^2 \sin 2x dx; & \text{c) } \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{1+x^2} dx; \\ \text{d) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x} dx; & \text{e) } \int_0^1 x^3 \ln^2 x dx; & \text{f) } \int_{-2}^0 |2x+3| dx; \\ \text{g) } \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx; & \text{h) } \int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3) dx; & \text{i) } \int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx; \\ \text{j) } \int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx; & \text{k) } \int_{-7}^0 x \cdot \sqrt[3]{1-x} dx; & \text{l) } \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} dx. \end{array}$$

2. Mekkora területet határolnak az $y = x^2$, az $y = x + 6$, $x = -2$ és az $x = -1$ görbék?

3. Számítsuk ki az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ görbék által közrezárt síkrész területét!

4. Határozzuk meg az $y = \sqrt{1-x^2}$ függvény és az x -tengely által közrezárt síkrész területét!

5. Számítsuk ki az x_0 értékét úgy, hogy az y -tengely, az $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbe, valamint a görbének az x_0 abszcisszájú pontjához húzott érintője által határolt véges terület mérőszáma $\frac{2}{3}$ legyen!

6. Vázoljuk az $y = \frac{1}{x^2+4}$ egyenlettel megadott görbét! A görbe alatti terület a $[-b, b]$ intervallumon
1. Számítsuk ki b értékét!

7. Ábrázoljuk ugyanabban a koordináta-rendszerben az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = \cos x$ függvényt, majd számítsuk ki, hogy mekkora területűek a megadott görbék által közrezárt tartományok!

8. Mekkora területű síkidomot zár közre az $y^2 = 2x$ parabola és az $x^2 + y^2 = 4x$ kör?

9. Mekkora az $y = \pm\sqrt{9+x}$ és az $y = \pm\sqrt{9-x}$ egyenletű görbék által bezárt terület mérőszáma?

10. Milyen arányban osztja ketté az $y^2 = 2x$ egyenletű parabola az $x^2 + y^2 = 8$ egyenletű kör területét?

11. Számítsa ki az alábbi görbék ívhosszát!

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } y = \operatorname{ch} x, & x \in [0, 3]; \\ \text{(b) } y = \sqrt{4-x^2}, & x \in [-2, 2]; \\ \text{(c) } y = \ln \sin x, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]; \\ \text{(d) } y = \ln(1-x^2), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \text{(e) } y = \sqrt{(2+2x)^3}, & -\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{3} \end{array}$$

12. Számítsa ki az $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$ görbe x - tengely körüli forgatásával nyert test térfogatát!

13. Számítsa ki az $y = \sin x$ görbe x tengely körüli forgatásakor keletkező "végtelen gyöngysor" egy gyöngyszemének térfogatát!
14. Az $y = 2 \sin \frac{x}{3}$ görbe egy fél hullámát megforgatjuk az x tengely körül. Mekkora az így keletkező test térfogata?
15. Számítsa ki az alábbi görbék x tengely körüli forgatásával nyert testek térfogatát!
- $y = 4x + 5, x \in [0, 6]$;
 - $y = \operatorname{ch} 3x, x \in [-1, 1]$;
 - $y = x^2 + 4x + 6, x \in [2, 3]$ (Forgassuk meg az y tengely körül is!)
 - $y = x\sqrt[4]{2+x^3}, x \in [0, 1]$;
 - $y = \sqrt{x+3}, x \in [1, 6]$ (Forgassuk meg az y tengely körül is!)
 - $y = \ln x, x \in [1, e]$ (Forgassuk meg az y tengely körül is!)
 - $y = xe^x, x \in [0, 1]$.
16. Számítsa ki az alábbi görbék x -tengely körüli forgatásával nyert testek felszínét:
- $y = x^3, x \in [0, 1]$;
 - $y = \sin x, x \in [0, \pi]$;
 - $y = \sqrt{r^2 - x^2}, x \in [-r, r]$;
 - $y = \sqrt{2x+1}, x \in [4, 12]$;
 - $y = 2x + 3, x \in [0, 5]$;
17. Az $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ egyenletű görbe $[0, \ln 2]$ intervallum feletti ívét forgassuk meg az x -tengely körül. Mekkora az így keletkezett forgástest térfogata és teljes felszíne?
18. Számítsa ki az $\left. \begin{array}{l} x(t) = 3 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{array} \right\}$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe alatti terület mérőszámát a $0 \leq t \leq \pi$ intervallumban!
19. Számítsa ki az $\left. \begin{array}{l} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin 2t \end{array} \right\}$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe alatti terület mérőszámát a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban ($r > 0$)!
20. Számítsa ki az $\left. \begin{array}{l} x(t) = 3(t - \sin t) \\ y(t) = 3(1 - \cos t) \end{array} \right\}$ paraméteres egyenletrendszerrel adott közönséges ciklois egy íve alatti terület mérőszámát! Készítsen vázlatot a görbéről!
21. Mekkora az $\left. \begin{array}{l} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \cos t \end{array} \right\}$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe és az y tengely közé eső síkrész területe? Készítsen vázlatot!
22. Számítsa ki az $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ görbe (lemniskáta) területét! Vázolja a görbét!
23. Számítsa ki azon síktartomány területét, amely az $r = 1 + \cos \varphi$ görbén belül és az $r = 1$ körön kívül van!
24. Számítsa ki azon síktartomány területét, amely az $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ görbén belül és az $r = 1$ körön kívül van! Készítsen ábrát!

25. Határozza meg az $r = \sin \varphi$ kör által határolt tartomány $r = 1 - \cos \varphi$ kardioidon kívül eső részének a területét! Számítsa ki ezen tartomány (a körnek a kardioidon kívüli része) kerületét!
26. Számítsa ki integrállal annak a síktartománynak a területét, amely az $r = 4 \cos \varphi$ görbén belül, de az $r = 2 \cos \varphi$ görbén kívül van! Készítsen ábrát!
27. Határozza meg az $r = 4$ kör és az $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniszkáta közé eső területet! Készítsen ábrát!
28. Határozza meg az $r = \sin 2\varphi$ négylevelű lóhere egyik levelének területét!
29. Számítsa ki az $r = 1 + \cos \varphi$ kardioid területét és kerületét! Vázolja a görbét!
30. Számítsa ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 3 \cos t \\ y(t) &= 3 \sin t \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban! Vázolja a görbét!

31. Számítsa ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= e^t \sin t \\ y(t) &= e^t \cos t \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban!

32. Számítsa ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 - \cos t \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban! Vázolja a görbét!

33. Számítsa ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \cos^3 t \\ y(t) &= \sin^3 t \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban! Vázolja a görbét!

34. Számítsa ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 4(\cos t + t \sin t) \\ y(t) &= 4(\sin t - t \cos t) \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq \pi$ intervallumban!

35. Határozza meg az $r = e^\varphi$ spirális ívhosszát, ha $\varphi \in [0, \ln 2]$!

36. Határozza meg az $r = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ görbe ívhosszát, ha $\varphi \in [0, 2\pi]$!

5. feladatlap

Analízis II.

Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Számítsuk ki a következő improprius integrálokat, illetve vizsgáljuk meg, hogy divergens-e?

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx; & \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx; & \int_{-\infty}^0 e^x dx; & \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx; \\
 & \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx; & \int_1^{\infty} 3^{-10x} dx; & \int_0^{\infty} \sin x dx; & \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x} dx; \\
 & \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx; & \int_1^{\infty} e^{\sqrt{x}} dx; & \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx; & \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx. \\
 \text{(b)} \quad & \int_0^1 \frac{1}{x} dx; & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx; & \int_0^1 \ln x dx; & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx; \\
 & \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx; & \int_0^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx; & \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x}} dx; & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 2x} dx; \\
 & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 2x} dx; & \int_0^2 \frac{1}{1-x^2} dx; & \int_{-1}^1 \frac{1}{e^x-1} dx; & \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.
 \end{aligned}$$

2. Számítsa ki a következő integrálokat!

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \int_0^1 \frac{1}{(4-x)\sqrt{1-x}} dx; \\
 \text{(b)} \quad & \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx; \\
 \text{(c)} \quad & \int_1^{\infty} \frac{2x^2+4x+5}{(x^2+4x+5)x^2} dx; \\
 \text{(d)} \quad & \int_1^{\infty} x^{-2} \operatorname{arctg} x dx.
 \end{aligned}$$

3. Határozza meg az $f(x) = x \ln x$ függvény grafikonja és az x -tengely által közrezárt véges síkrész területét!

4. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ e^{-x}, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Számítsa ki az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

integrálokat!

5. Határozza meg, hogy milyen α érték esetén teljesül az alábbi egyenlőség?

$$\int_0^{+\infty} x e^{1-\alpha x} dx = 1$$

6. Számítsa ki az alábbi függvényeknek az adott intervallumra vett közönséges integrálközepértékét:

$$(a) \quad f(x) = tg \frac{x}{3}, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$(b) \quad f(x) = 8 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right), \quad -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3};$$

$$(c) \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 100;$$

$$(d) \quad f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$$

6. feladatlap

Analízis II.

Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Legyen $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ és $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{ha } 1 < x \leq 2 \end{cases}$.
Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^1 f dg \quad \text{és} \quad \int_1^2 f dg$$

létezik, de

$$\int_0^2 f dg$$

nem létezik.

2. Legyen $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ és $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 \leq x < 0 \\ 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$.
Mutassuk meg, hogy

$$\int_{-1}^0 f dg \quad \text{és} \quad \int_0^1 f dg$$

létezik, de

$$\int_{-1}^1 f dg$$

nem létezik.

3. Számítsuk ki az $\int_a^b f dg$ integrált (ha lehetséges), amennyiben

(a) $a = 0, b = \pi, f(x) = x, g(x) = \sin x$;

(b) $a = -1, b = 1, f(x) = \cos^3 6x, g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$;

(c) $a = 2, b = 4, f(x) = x, g(x) = \frac{1}{x}$;

(d) $a = 0, b = +\infty, f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}, g(x) = e^x$.

4. Számítsuk ki az $\int_a^b f dg$ integrált és az $\int_a^b g df$ integrált, majd alkalmazzuk a Riemann-Stieltjes integrálokra a parciális integrálásról szóló tételt!

(a) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ és $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x^3$;

(b) $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$ és $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos 3x$.

7. feladatlap

Analízis II.

Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Számítsuk ki az alábbi sorok összegét!

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}; & \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n; & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{n+2}}; & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^{2n-1}}; & \text{e)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{9^n} - \frac{2}{9^n}\right); \\ \text{f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{10^n}; & \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n; & \text{h)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{4^{2n}}; & \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} - \frac{2}{5^{n+1}}\right); \\ \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}; & \text{k)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}; & \text{l)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2-4n-3}; & \text{m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}; & \text{n)} \sum_{n=3}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}. \end{array}$$

2. A divergencia-kritérium segítségével mutassuk ki az alábbi sorokról, hogy divergensek!

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-1}{1+2n}; & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt[3]{27n^3-4+4n}}; & \text{c)} \sum_{n=3}^{\infty} (\sqrt{n^2+2n}-n); & \text{d)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{4^n}; \\ \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n+2}; & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-n^2}{n^2+9}; & \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}; & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}+5^{n-2}}{2^{2n+9}}. \end{array}$$

3. Az összehasonlító kritériumok segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek!

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}; & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3-3}; & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+5}{n^3-2n^2-5}; & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n-6}{n^4+3n^2+5}; \\ \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}+1}; & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n+5n}; & \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}; & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}. \end{array}$$

4. A Cauchy-féle gyökkritérium segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek!

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-5}{2n}\right)^n; & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}; & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)3^n}{n^n}; \\ \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2-5n-3}{n^2+100n+2}\right)^n; & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+5)3^n}{4^n}; & \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{(1.01)^n}; & \text{h)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{n}. \end{array}$$

5. A D'Alambert-féle hányadoskritérium segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek!

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}; & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}; & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; \\ \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+5)3^n}{4^n}; & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}; & \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^n}{3^n n!}; & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}. \end{array}$$

6. Az integrálkritérium segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek!

$$\text{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}; \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}; \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}; \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}.$$

7. A Leibniz-kritérium segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek!

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}; \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}; \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}.$$

8. Vizsgáljuk meg, hogy abszolút konvergensek, feltételesen konvergensek vagy divergensek-e az alábbi sorok!

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}; & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}; & \text{c) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{1-n^2}; & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n; \\ \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+5}{n^2+n}; & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-2)^n}{5^n}; & \text{g) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}; & \text{h) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n. \end{array}$$

9. Alkalmasan választott kritérium segítségével döntsük el az alábbi sorokról, hogy konvergensek-e vagy divergensek!

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n-2}; & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}; & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}, & \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{50^n}{n!}; \\ \text{e) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}; & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}; & \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(1.001)^n}; & \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; \\ \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}; & \text{j) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln n; & \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[5]{n^{12}}}; & \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2}; \\ \text{m) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{(1.01)^n}; & \text{n) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+6}{4^n-2n}; & \text{o) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}; & \text{p) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n\sqrt{n}}; \\ \text{q) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n-3}{3n^4+2n^2+1}; & \text{r) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n; & \text{s) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n; & \text{sz) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{e^n}; \\ \text{t) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{n}; & \text{u) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^3}; & \text{v) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right); & \text{w) } \sum_{n=3}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right); \\ \text{x) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}); & \text{y) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}); & \text{z) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}; & \text{zs) } \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k (-1)^i \frac{1}{k(k+1)}; \\ *) & 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots \end{array}$$

10. Állapítsuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciaintervallumát:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n; & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n; & \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n} x^{2n}; & \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \\ \text{e) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n; & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3} (x+4)^n; & \text{g) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n}; & \text{h) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} (x-2)^n. \end{array}$$

11. Fejtsük hatványsorba a következő függvényeket és adjuk meg a hozzájuk tartozó konvergenciaintervallumokat!

$$\text{a) } f(x) = \frac{3}{x+1}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{2-x}; \quad \text{c) } f(x) = \frac{x}{5+x}; \quad \text{d) } f(x) = \frac{2x}{1-x^2}.$$

12. Írjuk fel a következő függvények Maclaurin sorát!

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{1-x}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \text{c) } f(x) = \sin x; \quad \text{d) } f(x) = shx.$$

13. Írjuk fel a következő függvények Taylor sorát a megadott pont körül!

$$\text{a) } f(x) = \cos x; \quad x_0 = \pi \quad \text{b) } f(x) = \ln(x-1); \quad x_0 = 2 \quad \text{c) } f(x) = \sin 4x; \quad x_0 = \frac{\pi}{8}$$

14. Fejtsük hatványsorba a következő függvényeket!

$$\text{a) } f(x) = \cos 5x; \quad \text{b) } f(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}; \quad \text{c) } f(x) = e^{-x^2}; \quad \text{d) } f(x) = \ln(1+4x).$$

15. Fejtse Maclaurin-sorba az alábbi függvényeket! Határozza meg a Maclaurin-sor konvergenciaintervallumát!

- a) e^x ; b) xe^{-x} ; c) e^{-x^2} ;
d) $\frac{1}{1+x}$; e) $\ln(1+x)$; f) $\frac{1}{1+x^2}$;
g) $\arctg x$; h) $\frac{1}{1+x^4}$; i) $\sin x$;
j) $\sin x^2$; k) $\frac{\sin x}{x}$; l) $\cos x$;
m) $\cos \sqrt{x}$; n) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; o) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
p) $\arcsin x$; q) $\ln(1+4x)$; r) $\operatorname{sh} 2x$.

16. Vázolja az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi \\ \pi, & \text{ha } \pi < x < 2\pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

függvény grafikonját! Fejtse Fourier-sorba $f(x)$ -et!

17. Fejtse Fourier-sorba az alábbi függvényeket!

(a) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha } -\pi \leq x < \pi \\ f(x+2\pi), & \text{egyébként} \end{cases}$

(b) Felhasználva az előző sorfejtést, számítsa ki az $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$ sor összegét!

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } -\pi \leq x < \pi \\ f(x+2\pi), & \text{egyébként} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{ha } \pi < x < 2\pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

(e) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0, x = \pi \\ 1, & \text{ha } 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

(f) Felhasználva az előző sorfejtést, számítsa ki az $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ sor összegét!

(g) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & \text{ha } 0 < x < 2\pi \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

(h) Felhasználva az előző sorfejtést, számítsa ki az $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ sor összegét!

18. Határozza meg az $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ ($-\pi < x \leq \pi$), $f(x) = f(x+2\pi)$ periodikus függvény Fourier-sorában $\cos x$ és $\sin x$ együtthatójának az értékét!

19. Határozza meg az $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ ($-\pi < x \leq \pi$), $f(x) = f(x+2\pi)$ periodikus függvény Fourier-sorában $\cos x$ és $\sin x$ együtthatójának az értékét!

20. Adott az $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } -\pi \leq x < \pi \\ f(x+2\pi), & \text{egyébként} \end{cases}$ függvény. Vázolja a függvény grafikonját! Adja meg az f függvény Fourier-sorában az a_3 és b_4 együtthatók értékét!

21. Adott az $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -\pi \leq x < \pi \\ f(x+2\pi), & \text{egyébként} \end{cases}$ függvény. Vázolja a függvény grafikonját! Adja meg az f függvény Fourier-sorában az $\sin 2x$ és $\cos 4x$ együtthatóinak értékét!

22. Határozza meg az $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2}, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, $f(x+2\pi) = f(x)$ függvény Fourier-sorában a_5 és b_3 értékét!

23. Határozza meg az $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{3}{2}, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, $f(x+2\pi) = f(x)$ függvény Fourier-sorában a_3 és b_4 értékét!

24. Adott az $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & \text{ha } -\pi \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi \end{cases}$, $f(x+2\pi) = f(x)$ függvény. Vázolja a függvény grafikonját! Adja meg az f függvény Fourier-sorát!

8. feladatlap

Analízis II.

Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Határozzuk meg az alábbi függvények elsőrendű parciális deriváltjait:

(a) $f(x, y) = x^3 + 4xy - y^2 + 6$

(b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(c) $f(x, y) = x^y$

(d) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$

(e) $f(x, y) = e^{xy}$

(f) $f(x, y, z) = x \arctg \frac{z}{y}$

(g) $f(x, y) = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^7$

(h) $f(x, y, z) = 2^{x^2-2y^2+\cos \sqrt{z}}$

2. Határozzuk meg az alábbi parciális deriváltakat!

(a) $f(x, y) = x^3y^5 - 2x^2y^3 + 8x$ $f''_{xy} = ?$, $f'''_{yxy} = ?$

(b) $f(x, y, z) = e^{xz-y^2}$, $f''_{xx}(1, 0, 1) = ?$, $f'''_{yyx}(1, 1, 1) = ?$

3. Igazoljuk, hogy a $z = \arctg \frac{x}{y}$ kétváltozós függvény teljesíti a $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ egyenlőséget!

4. Mivel egyenlő a $-\frac{x}{y} \cdot f'_x + y \cdot f''_{yy}$ kifejezés, ha $f(x, y) = y \cdot \ln \sqrt{xy}$?

5. Mivel egyenlő a $x \cdot f'_x + y \cdot f'_y$ kifejezés, ha $f(x, y) = \frac{y}{x+y}$?

6. Mivel egyenlő a $2x \cdot f'_x - y \cdot f'_y$ kifejezés, ha $f(x, y) = 2 \ln \frac{x}{y} + \frac{xy^2}{2}$?

7. Határozzuk meg az alábbi deriváltakat!

(a) $f(x, y) = \left(xy, x-y, \frac{x}{y}\right)$;

(b) $f(x, y, z) = (xy - xz, x^2 + yz)$;

(c) $f(t) = (1, t, t^2, t^3)$.

8. Számítsuk ki az alábbi iránymenti deriváltakat!

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$; $P(2, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 4)$

(b) $f(x, y) = \sin(x+y)$; $P\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$, $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, 1)$

(c) $f(x, y) = xe^y - ye^x$; $P(0, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 5)$

(d) $f(x, y) = \frac{\ln x}{\ln y}$; $P(e, e^2)$, $\mathbf{v} = (12, 5)$

- (e) $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$; $P(1, 1)$, a $\mathbf{v}$ vektor $\varphi = \frac{\pi}{3}$ szöget zár be az x - tengely pozitív irányával.
- (f) $f(x, y) = \operatorname{sh}(x+y)\operatorname{ch}(x-y)$; $P(0, 0)$, a $\mathbf{v}$ vektor $\varphi = \frac{\pi}{4}$ szöget zár be az x - tengely pozitív irányával.
- (g) $f(x, y) = 2\sqrt{x^2+y}$; $P(3, 7)$, a $\mathbf{v}$ vektor $\varphi = \pi$ szöget zár be az x - tengely pozitív irányával.
- (h) $f(x, y) = \sqrt{xy}$; $P(1, 4)$, a $\mathbf{v}$ vektor $\varphi = \frac{\pi}{6}$ szöget zár be az x - tengely pozitív irányával.

9. Írjuk fel az alábbi felületek felületi normálisát és érintősíkjának egyenletét a megadott pontokban!

- (a) $f(x, y) = x^3y^2 - 2y$; $P(1, 2, 0)$
- (b) $z = e^{xy} \sin(x+y)$; $P\left(\frac{\pi}{6}, 0, \frac{1}{2}\right)$
- (c) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; $P(1, 0, 0)$
- (d) $z = x^2e^{-y}$; $P(1, 0, 1)$
- (e) $z = \frac{x-y}{x+y}$; $P(2, -1, 3)$
- (f) $xyz - 4z^3 = -30$; $P(1, 1, 2)$
- (g) $xe^y \cos z = 1$; $P(1, 1, 1)$
- (h) $z^x + z^y = 12$; $P(2, 3, 2)$

10. Adott az $f(x, y) = \cos \frac{\pi y}{x^2 + y^2}$ kétváltozós függvény.

- (a) Írja fel az f függvény $P_0(2, 2)$ pontbeli gradiensét!
- (b) Határozza meg az f függvény iránymenti deriváltját a $P_0(2, 2)$ ponton átmenő $\underline{v} = (1, 1)$ irányvektorú egyenes mentén!
- (c) Írja fel a $z = f(x, y)$ felület $P_0(2, 2)$ pontbeli érintősíkját!

11. Számítsa ki az $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y^2}$ függvény $P_0(0, 1)$ pontjában

- (a) az iránymenti deriváltat az $a = (2, 2\sqrt{3})$ irányban;
- (b) a $z = f(x, y)$ felület P_0 pontbeli érintősíkját!

12. Határozzuk meg az alábbi $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ függvények második deriváltját (Hesse-mátrixát)!

- (a) $f(x, y) = x^3y + xy^3$;
- (b) $f(x, y) = e^{x-y}$;
- (c) $f(x, y) = \sin(xy)$;
- (d) $f(x, y) = x^y$;
- (e) $f(x, y) = \ln(1 + xy)$.

13. Határozzuk meg az alábbi többváltozós skalárértékű függvények szélsőértékeit!

- (a) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$;
- (b) $f(x, y) = (x-1)^2 + 4(y-3)^2$;
- (c) $f(x, y) = x^2 - y + e^y$;
- (d) $f(x, y) = x^4 - 3y^3 - 2xy$;

(e) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy;$

(f) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3;$

14. Vizsgálja meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 + 8 - 8xy$ függvényt szélsőérték szempontjából!

15. Legyen $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 4x^2 + 5y - 3x + 7$ függvény adott. Hol van a függvénynek maximuma vagy minimuma?

16. Hol van az $f(x, y) = \frac{x^3}{2} - y^2 - 2x^2 + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}x + 5$ függvénynek maximuma vagy minimuma?

17. Hol van maximuma vagy minimuma az $f(x, y) = e^{x^3+y^3-3xy}$ függvénynek?

9. feladatlap

Analízis II.

Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

- Írja fel a $\iint f(x, y) dx dy$ kettős integrálban az integrálás határait, ha először x , azután y szerint integrálunk (majd fordítva), és a T tartomány
 - $x^2 + y^2 \leq 16$;
 - $x^2 + y^2 \leq 9, y < 0$;
 - $y \geq x^2, x + y \leq 4$;
 - $x = 0, y = 0, 2x + y = 6$
egyeneselek által határolt háromszög;
 - $y^2 \leq 8x, y \leq 2x, 4x + y \leq 24$;
 - $y \leq x, 2y \geq x, xy \leq 2$.
- Válaszolja az alábbi kettős integrálok integrálási tartományát:
 - $\int_{x=0}^4 \int_{y=0}^{4x-x^2} f(x, y) dx dy$;
 - $\int_{x=0}^1 \int_{y=-2x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dx dy$;
 - $\int_{x=0}^1 \int_{y=-x}^{x^2} f(x, y) dy dx$;
 - $\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2 \cos \varphi} f(r, \varphi) dr d\varphi$.
- Cserélje fel az integrálás sorrendjét az alábbi kettős integrálokban:
 - $\int_{x=1}^2 \int_{y=x}^{2x} f(x, y) dx dy$;
 - $\int_{x=0}^3 \int_{y=x}^{\sqrt{6x-x^2}} f(x, y) dx dy$;
 - $\int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dx dy$;
 - $\int_{y=0}^1 \int_{x=y}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$.
- Számítsa ki a következő kettős integrálokat:
 - $\int_{x=1}^2 \int_{y=0}^x (x-2)y^2 dx dy$;
 - $\int_{x=0}^2 \int_{y=1}^6 \frac{4y-1}{3x^4} dx dy$;
 - $\int_{x=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{y=0}^2 y \sin x dx dy$;
 - $\int_{y=0}^{\pi} \int_{x=0}^y \cos(x+y) dx dy$;
 - $\int_{x=1}^4 \int_{y=3}^6 (2x^3 y - x^2) dx dy$;
 - $\iint_{x^2+y^2 \leq 16} xy^2 dx dy$.
- Számítsa ki a $\iiint_T (x-y) dx dy dz$ kettős integrált, ha T az $y^2 = 3x$, az $y^2 = 4-x$ görbék és az x -tengely által határolt tartomány!
- Határozza meg annak a tetraédernek a térfogatát, amelyet a koordinátságok és a $2z = 12 + 4x + 3y$ sík határolnak!
- Határozza meg annak a testnek a térfogatát, amelyet az $x^2 + y^2 = 1$ egyenes henger, az xy sík és az $x + z = 1$ sík határol!

8. Vázolja a $T = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq |x|\}$ tartományt! Számítsa ki a

$$\iint_T (\sin x + 2y) dx dy$$

kettős integrált!

9. Számítsa ki az $A(a) = \iint_{T_a} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$ kettős integrált, ahol T_a az origó középpontú,

a sugarú körtartomány. Határozza meg az így kapott $A(a)$ kifejezés határértékét, ha $a \rightarrow \infty$!

10. Számítsa ki a $\iint_T xy dx dy$ kettős integrált, ahol a T tartomány az origó középpontú

egységnyi sugarú körnek az a része, amelyre teljesül, hogy $x \geq 0$ és $y \geq \frac{1}{2}$!

11. Vázolja azt a T síktartományt, amely az $r = 1 + \cos \varphi$ görbén belül és az $r = 1$ körön kívül van! Számítsa ki a $\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ kettős integrált!

12. Számítsa ki az alábbi felületek által határolt térrész térfogatát:

- a) $z = 5 - x^2 - y^2, \quad z = 1;$
- b) $x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad 2z = x^2 + y^2;$
- c) $z = 6 - x^2 - y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2};$
- d) $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}, \quad z = 2\sqrt{x^2 + y^2};$
- e) $x^2 + y^2 = 2x, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0;$
- f) $z = 4 - y^2, \quad y = \frac{x^2}{2}, \quad z = 0;$
- g) $x^2 + y^2 = 4, \quad z = x + y + 10, \quad z = 0.$

13. Számítsa ki annak a testnek a térfogatát, amelyet a $z = (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$ és a $z = 0$ felületek metszenek ki az $x^2 + y^2 = 4$ hengerből!

14. Számítsa ki integrálszámítás segítségével az R sugarú gömb térfogatát!

15. Számítsa ki annak a térrésznek a térfogatát, amelyet a $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, a $z = x^2 + y^2$ paraboloid és az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű henger határol!

16. Legyen T az $xy = 1$ görbe és a $2x + y = 3$ egyenes által határolt tartomány. Határozza meg T területét kettős integrállal!

17. Számítsa ki integrálszámítás segítségével az R sugarú gömb térfogatát és felszínét!

18. Számítsa ki a következő felületek felszínét:

- a) $6x + 3y + 3z = 12, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0;$
- b) $z = xy, \quad x^2 + y^2 \leq 4;$
- c) $x^2 + y^2 + z^2 = 20, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad z \geq 0;$
- d) $x^2 + y^2 = 3z, \quad x^2 + y^2 \leq 3.$

19. Számítsa ki a $z = 15 - x^2 - y^2$ és a $z = 6$ felületekkel határolt test teljes felszínét!

20. Számítsa ki annak a térrésznek a térfogatát és a teljes felszínét, amelyet a $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, a $z = x^2 + y^2$ paraboloid és az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű henger határol!
21. Határozza meg annak a tetraédernek a térfogatát és a teljes felszínét, amelyet a koordinátasíkok és a $z = 6 - 2x + 3y$ sík határol!
22. Határozza meg annak a testnek a térfogatát, amelyet az $x^2 + y^2 = 1$ egyenes henger, az xy -sík és az $x + z = 1$ sík határol!
23. Határozza meg az $r = 1 + \cos \varphi$ kardioid területét kettős integrállal!
24. Határozza meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ gömb azon részének felszínét, amely a $z = x^2 + y^2$ paraboloid belsejében van!
25. Számítsa ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ gömb azon részének felszínét, amely a $z = 2$ és a $z = 4$ síkok között van!
26. Mekkora a $z = \arctg \frac{y}{x}$ felületnek az $x^2 + y^2 = 4$ henger által kimetszett részének a felszíne?
27. Számítsa ki a $z = 5 - x^2 - y^2$ felület azon részének felszínét, amely az origó középpontú 2 sugarú hengeren belül van!

10. feladatlap

Analízis II.

Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Számítsa ki a következő hármas integrálokat, és vázolja az integrációs alaptartományokat:

a) $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^3 \int_{z=0}^4 dz dy dx;$

b) $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^4 dz dy dx;$

c) $\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^y xyz dz dy dx;$

d) $\int_{x=0}^3 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^{xy} x^2 y^3 z dz dy dx .$

2. Oldja meg az alábbi feladatokat henger- vagy gömbi koordináták bevezetésével és vázolja az integrációs tartományt!

a) $\int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=0}^2 dx dy dz ;$

b) $\int_{x=-3}^3 \int_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{z=0}^3 (x^2 + y^2) dx dy dz$

c) $\int_{x=0}^4 \int_{y=0}^{\sqrt{4x-x^2}} \int_{z=0}^2 z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz ;$

d) $\int_{x=0}^3 \int_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy dz ;$

e) $\int_{x=-4}^4 \int_{y=-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \int_{z=-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz ;$

f) $\int_{x=-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{z=x^2+y^2}^2 (x^2 + y^2) z dx dy dz .$

3. Számítsa ki a következő hármas integrálokat:

a) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$, ahol V az $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ gömb;

b) $\iiint_V (x + y - z + 16) dV$, ahol V az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 5$ gömb.

c) $\iiint_V x^2 y z dV$, ahol a V tartomány az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ gömb első ténnyolcadban lévő része.

4. Határozza meg a $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ hármas integrál értékét, ha a V tartományt az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $z \geq 0$ egyenlőtlenségek jelölik ki!

5. Határozza meg az $f(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}}$, $(n \geq 0)$ integrálját a V térrészen,
amely két origó középpontú a ill. b sugarú gömb közötti térrésze, ahol $0 < a < b$. Adja meg a hármas integrált n -től függően!
6. Számítsa ki a $\iiint_V zx^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ hármas integrált, ha a V tartományt a
 $z = 0$, $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$ felületek zárják közre!
7. Határozza meg a $\iiint_V x^2 y z dx dy dz$ hármas integrált a V véges tartományon, amelynek
határai az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű gömbfelület, az $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ egyenletű
síkok, továbbá $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$!
8. Határozza meg a $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$ hármas integrált, ahol V az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$!
9. Számítsa ki a $\iiint_V zx^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ hármas integrált, ha a V tartományt a
 $z = 0$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 4$ felületek zárják közre!