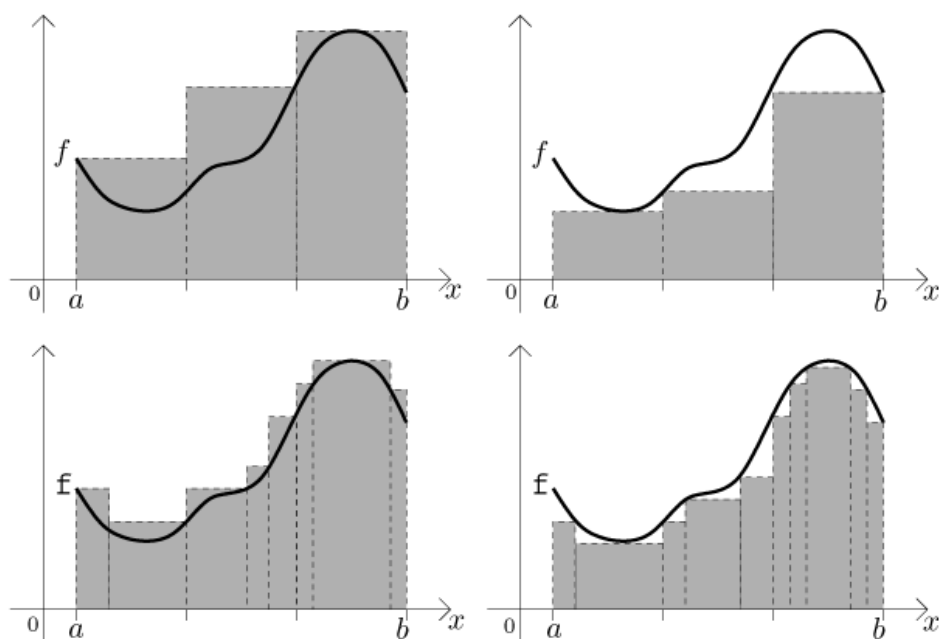


Matematikai analízis II.

Feladatgyűjtemény

GEMAN161-B

Gazdaságinformatikus, Programtervező informatikus és
Mérnökinformatikus hallgatók részére



Lengyelne Dr. Szilágyi Szilvia
2016

1. feladatlap

Implicit függvények differenciálása

1. Határozzuk meg az alábbi, implicit alakban adott függvények y' deriváltját, ha $y = y(x)$!

(a) $x^2 + y^2 = 1$;

(b) $xy + y^2 = 1$;

(c) $4xy + y^2 = 10$;

(d) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$;

(e) $\cos y = x$;

(f) $x^2y + 3xy^3 - x = 5$;

(g) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 100$;

(h) $\frac{1}{\cos^2 y} + \operatorname{ctg}^2 x = 3$;

(i) $\ln y + xy = 1$;

(j) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Határozzuk meg az $x^2 - xy + y^2 = 3$ görbe $P(1, 2)$ pontjához tartozó érintő egyenletét!

3. Határozzuk meg az $9x^2 + 16y^2 = 52$ egyenletű ellipszis azon érintőit, amelyek párhuzamosak a $9x - 8y = 1$ egyenessel!

4. Határozzuk meg y' -t és y'' -t, ha $xy + y^2 = 1$ és $y = y(x)$!

5. Határozzuk meg y' -t és y'' -t az $(1, 0)$ pontban, ha a $\sin y = x^3 - x^5$ görbe átmegy ezen a ponton és $y = y(x)$!

6. Igazoljuk, hogy $y'' = \frac{2y^3}{x^3}$, ha $x + y = xy$ és $y = y(x)$!

Paraméteres alakban adott függvény deriváltja

7. Határozzuk meg $y' = \frac{dy}{dx}$ értékét az

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + t, \\ y(t) = t^7 + t + 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

paraméteres alakban adott görbére!

8. Határozzuk meg $y' = \frac{dy}{dx}$ értékét az

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t, \\ y(t) = 2 \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$$

paraméteres alakban adott görbére, ha $t_0 = \frac{\pi}{4}$!

9. Határozzuk meg $y' = \frac{dy}{dx}$ és $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ értékét az alábbi paraméteres alakban adott görbére!

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cdot \sin t, \\ y(t) = e^t \cdot \cos t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

10. Határozzuk meg $y' = \frac{dy}{dx}$ és $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ értékét az

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t, \\ y(t) = \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$$

paraméteres alakban adott görbére, ha $t_0 = \frac{\pi}{3}$!

11. Határozzuk meg az

$$\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$$

paraméteres alakban adott ellipszisnek a $t_0 = \frac{\pi}{4}$ paraméterértékhez tartozó pontjához húzott érintő iránytangensét! Vázoljuk a görbét!

12. Adjuk meg az alábbi paraméteres alakban adott görbe $t_0 = 0$ paraméterértékű pontjában az érintőegyenest! Vázoljuk a görbét!

$$\begin{cases} x(t) = 3e^t, \\ y(t) = 5e^{-t}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

13. Hol konvex az

$$\begin{cases} x(t) = 3t - 1, \\ y(t) = 9t^2 - 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

görbe?

Polárkoordinátás alakban adott függvény differenciálása

14. Legyen $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$. Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket!

(a) $\frac{dr}{d\varphi};$

(b) $\frac{d^2r}{d\varphi^2};$

(c) $\frac{d^3r}{d\varphi^3};$

(d) $\frac{dr}{d\varphi} \left(\frac{\pi}{6} \right);$

(e) $\frac{d^2r}{d\varphi^2} \left(\frac{\pi}{4} \right);$

(f) $\frac{d^3r}{d\varphi^3} \left(\frac{5\pi}{6} \right).$

15. Igazoljuk, hogy az $r = 3\varphi$ archimédeszi spirális érintőjének meredeksége $\frac{6 + \sqrt{3}\pi}{6\sqrt{3} - \pi}$ a $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ pontban!
16. Írjuk fel az $r = \frac{1}{\varphi}$ hiperbolikus spirális érintőjének egyenletét a $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ pontban!
17. Határozzuk meg az $r = \frac{4}{1 - \cos \varphi}$ parabola érintőjének meredekségét a $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ pontban!
18. Adjuk meg az $r = \frac{4}{1 - \cos \varphi}$ parabolának azt a pontját, ahol az érintő meredeksége 1!
19. Írjuk fel az $r = 1 - \sin \varphi$ kardioid $\varphi_0 = 0$ pontjában az érintőegyenes egyenletét!

2. feladatlap

A határozatlan integrál, integrálási szabályok

1. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

- | | |
|---|--|
| (a) $\int (x^{-3} + 2x^7 - \sqrt{x}) dx;$ | (b) $\int \left(\frac{2}{x^5} - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} \cdot \sqrt[7]{x^2} \right) dx;$ |
| (c) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 4\sqrt[3]{x}}{x} dx;$ | (d) $\int (12 + 5^x + 2^{2x+1} - 4e^x) dx;$ |
| (e) $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx;$ | (f) $\int \left(-2 \sin x + 3 \cos x - \frac{2}{x} \right) dx;$ |
| (g) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx;$ | (h) $\int \left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx;$ |
| (i) $\int (\sqrt{x} - 1)(x + 3) dx;$ | (j) $\int (2^x + 3^x)^2 dx.$ |

2. Vezessük vissza elemi integrálokra a következő integrálok kiszámítását!

- | | |
|---|---|
| (a) $\int 3^x e^x dx;$ | (b) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx;$ |
| (c) $\int \frac{\sqrt[3]{4}}{3+3x^2} dx;$ | (d) $\int \operatorname{tg}^2 x dx;$ |
| (e) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$ | (f) $\int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch}^2 x} dx;$ |
| (g) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx;$ | (h) $\int \operatorname{cth}^2 x dx;$ |
| (i) $\int \sqrt[3]{1-3x} dx;$ | (j) $\int x(x^2 + 10)^{30} dx;$ |
| (k) $\int (x+1)^{10} dx;$ | (l) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx;$ |
| (m) $\int \sin^2 x \cos x dx;$ | (n) $\int \cos^5 x \sin x dx;$ |
| (o) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx;$ | (p) $\int x\sqrt{x^2+1} dx;$ |
| (q) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx;$ | (r) $\int \sqrt{\operatorname{ch} x - 1} \cdot \operatorname{sh} x dx;$ |
| (s) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}} dx;$ | (sz) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[5]{3+\cos x}} dx;$ |
| (t) $\int \frac{\ln x}{x} dx;$ | (ty) $\int \operatorname{tg} x dx;$ |
| (u) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx;$ | (ü) $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx;$ |
| (v) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx;$ | (w) $\int \frac{1}{x \ln x} dx;$ |
| (x) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$ | (y) $\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx;$ |

3. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

(a) $\int \sin 3x \, dx;$

(b) $\int \cos(4x + \pi) \, dx;$

(c) $\int e^{5x} \, dx;$

(d) $\int (e^{3x} + 3e^{-3x}) \, dx;$

(e) $\int (2x - 3)^4 \, dx;$

(f) $\int \sqrt[5]{6x - 2} \, dx;$

(g) $\int \cos(3 - 4x) \, dx;$

(h) $\int e^{7x-5} \, dx.$

Szorzatintegrálással megoldható feladatok

4. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

(a) $\int x e^x \, dx;$

(b) $\int x \sin 2x \, dx;$

(c) $\int x^2 7^x \, dx;$

(d) $\int x^2 \cos x \, dx;$

(e) $\int x^3 \sin 2x \, dx;$

(f) $\int x^2 e^{-2x} \, dx;$

(g) $\int e^x 7^x \, dx;$

(h) $\int e^{2x+\ln x} \, dx;$

(i) $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx;$

(j) $\int \ln x \, dx;$

(k) $\int x \ln x \, dx;$

(l) $\int \operatorname{arctg} x \, dx;$

(m) $\int \arcsin x \, dx;$

(n) $\int \arccos x \, dx;$

(o) $\int x^3 \ln x \, dx,$

(p) $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \, dx; ,$

(q) $\int \operatorname{arth} x \, dx,$

(r) $\int \ln^2 x \, dx;$

(s) $\int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx;$

(sz) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx;$

(t) $\int x \arccos x \, dx;$

(ty) $\int (x^2 + x) \operatorname{ch} x \, dx;$

(u) $\int (x^2 + 2x) \ln x \, dx;$

(v) $\int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx;$

(w) $\int e^{2x} \cos x \, dx;$

(x) $\int \operatorname{ch} x \cdot \sin 5x \, dx;$

(y) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x \, dx;$

(z) $\int e^{3x+2 \ln x} \, dx.$

3. feladatlap

Integrálás helyettesítéssel

1. Adjuk meg az alábbi határozatlan integrálokat!

- | | |
|---|--|
| (a) $\int \frac{1}{\cos^2(1-5x)} dx;$ | (b) $\int \frac{1}{\sin^2(4x+7)} dx;$ |
| (c) $\int 6^{\sin x} \cos x dx;$ | (d) $\int e^{\cos x} \sin x dx;$ |
| (e) $\int \frac{dx}{x^2+4};$ | (f) $\int \frac{2+x}{5+x^2} dx;$ |
| (g) $\int x^4 \operatorname{sh}(x^5-6) dx;$ | (h) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx;$ |
| (i) $\int e^x \cos(e^x) dx;$ | (j) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx;$ |
| (k) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$ | (l) $\int e^{\sqrt{x}} dx;$ |
| (m) $\int \sqrt{e^x-1} dx;$ | (n) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx;$ |
| (o) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x-1}} dx;$ | (p) $\int \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx;$ |
| (q) $\int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx;$ | (r) $\int \frac{1}{1+\operatorname{ch} x} dx.$ |

2. Adjuk meg az alábbi határozatlan integrálokat!

- | | |
|--|--|
| (a) $\int \frac{2}{1+\cos x} dx;$ | (b) $\int \frac{1}{\sin x} dx;$ |
| (c) $\int \frac{1}{1+\sin x};$ | (d) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} dx;$ |
| (e) $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x};$ | (f) $\int \frac{\sin x}{3+\cos x} dx;$ |
| (g) $\int \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx;$ | (h) $\int \sqrt{9-x^2} dx;$ |
| (i) $\int \sqrt{x^2+25} dx;$ | (j) $\int \sqrt{x^2-16} dx;$ |
| (k) $\int \sqrt{1-2x-x^2};$ | (l) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x-1}} dx;$ |
| (m) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}};$ | (n) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ |

Racionális törtfüggvények integrálása

3. Állítsuk elő az alábbi határozatlan integrálokat!

(a) $\int \frac{1}{x-4} dx;$	(b) $\int \frac{2x+3}{x-2} dx;$
(c) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} ;$	(d) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx;$
(e) $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} ;$	(f) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx;$
(g) $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx;$	(h) $\int \frac{6x}{x^2-2x+7} dx;$
(i) $\int \frac{1}{(2x-1)^2} dx;$	(j) $\int \frac{x}{x^2-6x+9} dx.$

4. Parciális törtekre bontással számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

(a) $\int \frac{1}{(x-2)(x-4)} dx;$	(b) $\int \frac{1}{x(x+1)} dx;$
(c) $\int \frac{2}{(x-1)(x+1)} dx;$	(d) $\int \frac{3x-59}{(x+11)(2x-1)} dx;$
(e) $\int \frac{11x-29}{(3x-5)(x-7)} dx;$	(f) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx;$
(g) $\int \frac{3x+1}{x^3-x} dx;$	(h) $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1} dx;$
(i) $\int \frac{2x-1}{(x-2)^2} dx;$	(j) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^3} dx;$
(k) $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^3-x^2} dx;$	(l) $\int \frac{1}{x^3+x} dx;$
(m) $\int \frac{2x+3}{(x^2-1)^2} dx;$	(n) $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2} dx;$

Racionális függvények integrálására vezető helyettesítések

5. Állítsuk elő az alábbi határozatlan integrálokat!

(a) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx;$	(b) $\int \frac{e^x}{e^{-x}+3} dx;$
(c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx;$	(d) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx.$

4. feladatlap

Trigonometrikus és hiperbolikus függvények integrálása

1. Adjuk meg az alábbi határozatlan integrálokat!

(a) $\int \sin^3 x \cos x \, dx;$

(b) $\int \sin x \cos^2 x \, dx;$

(c) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx;$

(d) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx;$

(e) $\int \cos^3 x \, dx;$

(f) $\int \sin^5 x \, dx \, dx;$

(g) $\int \sin^4 x \, dx;$

(h) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx;$

(i) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} \, dx;$

(j) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx;$

(k) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} \, dx;$

(l) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx;$

(m) $\int \sin^3 2x \cos^2 2x \, dx;$

(n) $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^3 x \, dx;$

(o) $\int \operatorname{sh}^4 x \, dx;$

(p) $\int \operatorname{ch}^5 x \, dx;$

(q) $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^2 x} \, dx;$

(r) $\int \operatorname{th}^2 x \, dx.$

Riemann-integrál

2. Tekintsük az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvényt! Osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot öt részre, majd adjuk meg a felosztás osztópontjait, részintervallumait, továbbá a felosztáshoz tartozó alsó és felső integrálközelítő összeget!

3. Egy egyenes pályán mozgó test gyorsulás-idő függvénye:

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \sin 2t.$$

Osszuk fel a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumot négy egyenlő részre, majd adjuk meg a felosztás osztópontjait, részintervallumait, továbbá határozzuk meg közelítőleg a sebesség megváltozását, azaz adjuk meg a felosztáshoz tartozó alsó és felső integrálközelítő összeget!

4. Legyen adott az $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$ függvényt! Osszuk fel a $[-2, 2]$ intervallumot nyolc részre, határozzuk meg a felosztás osztópontjait, részintervallumait, valamint a felosztáshoz tartozó alsó és felső integrálközelítő összeget!

5. Határozzuk meg az $\int_2^5 4 \, dx$ Riemann-integrált a definíció alapján!

6. Határozza meg az $\int_0^1 5x^2 \, dx$ Riemann-integrált a definíció alapján!

Newton-Leibniz-formula

7. Számoljuk ki az alábbi határozott integrálokat!

(a) $\int_{-2}^0 (2x + 5) \, dx;$

(b) $\int_{-2}^2 (x^3 - 2x + 3) \, dx;$

(c) $\int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) \, dx;$

(d) $\int_0^2 \sqrt{4x + 1} \, dx;$

(e) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \, dx;$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x \, dx;$

(g) $\int_0^1 \sqrt{x^2 - 6x + 9} \, dx;$

(h) $\int_0^{\pi} x^2 \sin 2x \, dx;$

(i) $\int_0^1 x^3 \ln^2 x \, dx;$

(j) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin x} \, dx;$

(k) $\int_{-2}^0 |2x + 3| \, dx;$

(l) $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx;$

(m) $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) \, dx;$

(n) $\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) \, dx.$

8. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény középértékét a $[0, 1]$ intervallumon!

9. Adjuk meg az $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ függvény középértékét a $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon!

10. Határozzuk meg a b valós paraméter értékét, ha az $f(x) = x^3 + bx - 2$ függvény átlagos értéke a $[0, 2]$ intervallumon 4.

Az integrál, mint a felső határ függvénye

11. Határozzuk meg az alábbi deriváltakat!

$$(a) \quad \frac{d}{dx} \int_2^x \sqrt{5+7t^2} dt;$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx} \int_x^1 \sin^3 t dt;$$

$$(c) \quad \frac{d}{dx} \int_{-x}^x \sqrt[3]{t^4+1} dx;$$

$$(d) \quad \frac{d}{dx} \int_0^{x^4} \sqrt{t} dt.$$

12. Keressük meg $\frac{dy}{dx}$ -et az alábbi feladatokban!

$$(a) \quad y = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt;$$

$$(b) \quad y = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad (x > 0);$$

$$(c) \quad y = \int_{\sqrt{x}}^0 \sin t^2 dt;$$

$$(d) \quad y = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt.$$

5. feladatlap

Terület számítása határozott integrállal

1. Határozzuk meg az $f(x) = -x^2 - 2x$ függvény grafikonja és az x -tengely által határolt tartomány teljes területét, ha $x \in [-3, 2]$!
2. Számítsuk ki az $f(x) = x^3 - 4x$ és az x -tengely által közrezárt véges síkrész területének mérőszámát, ha $x \in [-2, 2]$!
3. Mekkora területet határolnak az $f(x) = x^2$, a $g(x) = x + 6$, $x = -2$ és az $x = -1$ görbék?
4. Adjuk meg annak a tartománynak a területét, amelyet az $f(x) = 1 + \cos x$ függvény grafikonja, valamint az $y = 2$ és az $x = \pi$ egyenesek zárnak közre!
5. Vázoljuk az $f(x) = x^3$ függvény grafikonja, az $y = -x$ és az $y = 1$ egyenesek által határolt tartományt, majd határozzuk meg a területét!
6. Számítsuk ki az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = x + 2$ görbék által közrezárt síkrész területét!
7. Adjuk meg az $f(x) = x^2 - x$ és a $g(x) = x - x^2$ parabolák által határolt tartomány területének mérőszámát!
8. Számítsuk ki az x_0 értékét úgy, hogy az y -tengely, az $f(x) = \sqrt{x}$ egyenletű görbe, valamint a görbének az x_0 abszcisszájú pontjához húzott érintője által határolt véges terület mérőszáma

$$T = \frac{2}{3}$$

legyen!

9. Vázoljuk az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ függvény grafikonját! Számítsuk ki a $b \in \mathbb{R}$ paraméter értékét, ha a görbe alatti terület a $[-b, b]$ intervallumon 1!
10. Ábrázoljuk ugyanabban a koordináta-rendszerben az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = \cos x$ függvényt, majd számítsuk ki, hogy mekkora területűek a megadott görbék által közrezárt tartományok!
11. Mekkora területű síkidomot zár közre az $y^2 = 2x$ parabola és az $x^2 + y^2 = 4x$ kör?
12. Számítsuk ki az $\left. \begin{array}{l} x(t) = 3 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \end{array} \right\}$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe alatti terület mérőszámát a $0 \leq t \leq \pi$ intervallumban!
13. Számítsuk ki az $\left. \begin{array}{l} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin 2t \end{array} \right\}$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe alatti terület mérőszámát a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban ($r > 0$)!
14. Számítsuk ki az $\left. \begin{array}{l} x(t) = 3(t - \sin t) \\ y(t) = 3(1 - \cos t) \end{array} \right\}, \quad t \in [0, 2\pi]$ paraméteres egyenletrendszerrel adott közös ciklois egy íve alatti terület mérőszámát!

15. Mekkora az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \cos 2t \\ y(t) &= \cos t \end{aligned} \right\}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe és az y tengely közé eső síkrész területe? Készítsünk vázlatot!

16. Számítsuk ki az $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ görbe (lemniskáta) területét! Vázoljuk a görbét!

17. Számítsuk ki azon síktartomány területét, amely az $r = 1 + \cos \varphi$ görbén belül és az $r = 1$ körön kívül van!

18. Számítsuk ki azon síktartomány területét, amely az $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ görbén belül és az $r = 1$ körön kívül van! Készítsünk ábrát!

19. Határozzuk meg az $r = \sin \varphi$ kör által határolt tartomány $r = 1 - \cos \varphi$ kardioidon kívül eső részének a területét!

20. Számítsuk ki annak a síktartománynak a területét, amely az $r = 4 \cos \varphi$ görbén belül, de az $r = 2 \cos \varphi$ görbén kívül van! Készítsünk ábrát!

21. Határozzuk meg az $r = 4$ kör és az $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniskáta közé eső véges síktartomány területét! Készítsünk ábrát!

22. Határozzuk meg az $r = \sin 2\varphi$ négylevelű lóhere egyik levelének területét!

Síkgörbék ívhosszának számítása

23. Számítsuk ki az alábbi görbék ívhosszát!

(a) $y = \operatorname{ch} x, \quad x \in [0, 3];$

(b) $y = \sqrt{4 - x^2}, \quad x \in [-2, 2];$

(c) $y = \ln \sin x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right];$

(d) $y = \ln(1 - x^2), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right];$

(e) $y = \sqrt{(2 + 2x)^3}, \quad x \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right];$

(f) $6xy = x^4 + 3, \quad x \in [1, 2].$

24. Számítsuk ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 3 \cos t \\ y(t) &= 3 \sin t \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban! Vázoljuk a görbét!

25. Számítsuk ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= e^t \sin t \\ y(t) &= e^t \cos t \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban!

26. Számítsuk ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 - \cos t \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq 2\pi$ intervallumban!

27. Számítsuk ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \cos^3 t \\ y(t) &= \sin^3 t \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ intervallumban! Vázoljuk a görbét!

28. Számítsuk ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 4(\cos t + t \sin t) \\ y(t) &= 4(\sin t - t \cos t) \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe ívhosszát a $0 \leq t \leq \pi$ intervallumban!

29. Számítsuk ki az $r = 1 + \cos \varphi$ kardioid kerületét! Vázoljuk a görbét!

30. Határozza meg az $r = e^\varphi$ spirális ívhosszát, ha $\varphi \in [0, \ln 2]$!

31. Határozza meg az $r = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ görbe ívhosszát, ha $\varphi \in [0, 2\pi]$!

Forgástest térfogatának számítása

32. Számítsuk ki az alábbi görbék x -tengely körüli forgatásával nyert testek térfogatát!

(a) $y = 4x + 5, \quad x \in [0, 6];$

(b) $y = x^2 + 4x + 6, \quad x \in [2, 3];$

(c) $y = \operatorname{ch} 3x, \quad x \in [-1, 1];$

(d) $y = x\sqrt[4]{2+x^3}, \quad x \in [0, 1];$

(e) $y = \sqrt{x+3}, \quad x \in [1, 6];$

(f) $y = \ln x, \quad x \in [1, e];$

(g) $y = xe^x, \quad x \in [0, 1].$

(h) $y = \sqrt{x}, \quad x \in [0, 4].$

33. Számítsuk ki az $y = \sin x$ görbe x -tengely körüli forgatásakor keletkező "végtelen gyöngysor" egy gyöngyszemének térfogatát!

34. Az $y = 2 \sin \frac{x}{3}$ görbe egy fél hullámát megforgatjuk az x -tengely körül. Mekkora az így keletkező test térfogata?

35. Tekintsük az $y = x^3$ egyenletű görbe, az $y = 1$ egyenes és az y -tengely által közrezárt véges síkrészt! Mekkora térfogatú forgástestet kapunk, ha a tartományt az y -tengely körül megforgatjuk?

36. Forgassuk meg az x -tengely körül azt a síktartományt, amelyet az $xy = 1$ hiperbola, az $x = 1$, az $x = 3$ és az $y = 0$ egyenesek határolnak! Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

37. Tekintsük az $y = (x - 3)^2$ és az $y = \frac{4}{x}$ görbék által határolt tartományt! Az x - illetve az y -tengely körüli forgatással keletkező forgástestek közül melyiknek nagyobb a térfogata?

38. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ egyenletű ellipszis x -tengely körüli forgatásával keletkező forgási ellipszoid térfogatát!

39. Számítsuk ki az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 - \cos t \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

közönséges ciklois egy ívének x -tengely körüli megforgatásakor keletkező forgástest térfogatát!

Forgástest felszínének számítása

40. Számítsuk ki az alábbi görbék x -tengely körüli forgatásával nyert testek felszínét:

(a) $y = x^3, \quad x \in [0, 1];$

(b) $y = \sin x, \quad x \in [0, \pi];$

(c) $y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r];$

(d) $y = \sqrt{2x + 1}, \quad x \in [4, 12];$

(e) $y = 2x + 3, \quad x \in [0, 5];$

(f) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3 - x), \quad x \in [0, 3].$

41. Az $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ egyenletű görbe $[0, \ln 2]$ intervallum feletti ívét forgassuk meg az x -tengely körül. Mekkora az így keletkezett forgástest térfogata és teljes felszíne?

42. Számítsuk ki az $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \quad x \in [1, 3]$ egyenes szakasz y -tengely körüli forgatásával keletkező csonkakúp palástjának felszínét!

43. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ egyenletű ellipszis x -tengely körüli forgatásával keletkező forgási ellipszoid felszínét!

44. Mekkora az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= 2 + \sin t \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe x -tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest felszíne?

45. Mekkora annak a forgástestnek a felszíne, amely az

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{3}\sqrt{t^3} \\ y(t) &= 2\sqrt{t} \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3}$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe y -tengely körüli forgatásakor keletkezik?

6. feladatlap

Improprius integrálok

1. Számoljuk ki a következő improprius integrálokat!

(a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx;$

(b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx;$

(c) $\int_{-\infty}^0 e^x dx;$

(d) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx;$

(e) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx;$

(f) $\int_0^{\infty} 3^{-10x} dx;$

(g) $\int_0^{\infty} \sin x dx;$

(h) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x} dx;$

(i) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx;$

(j) $\int_1^{\infty} e^{\sqrt{x}} dx;$

(k) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx;$

(l) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx.$

2. Számoljuk ki a következő improprius integrálokat!

(a) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx;$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$

(c) $\int_0^1 \ln x dx;$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx;$

(e) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx;$

(f) $\int_0^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx;$

(g) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x}} dx;$

(h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 2x} dx;$

(i) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(j) $\int_0^2 \frac{1}{1-x^2} dx.$

3. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$ függvény grafikonja és az x -tengely által közrezárt véges síkrész területét!

4. Számítsuk ki a következő integrálokat!

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{(4-x)\sqrt{1-x}} dx;$$

$$(b) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx;$$

$$(c) \int_1^{\infty} \frac{2x^2 + 4x + 5}{(x^2 + 4x + 5)x^2} dx;$$

$$(d) \int_1^{\infty} x^{-2} \arctg x dx;$$

$$(e) \int_2^{\infty} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)} dx;$$

$$(f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)} dx.$$

5. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{ha } 0 < x \leq 1; \\ e^{-x}, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Számítsuk ki az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

improprius integrálokat!

6. Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter esetén teljesül az alábbi egyenlőség?

$$\int_0^{\infty} x e^{1-\alpha x} dx = 1$$

7. Milyen $\beta \in \mathbb{R}$ paraméter esetén lesznek az alábbi integrálok konvergenssek?

$$(a) \int_1^2 \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx;$$

$$(b) \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx.$$

8. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ függvény grafikonja és az x -tengely által határolt síkrészt!

(a) Mekkora az első síknegyedbe eső síkrész területe?

(b) Forgassuk meg az első síknegyedbe eső síkrészt az x -tengely körül! Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

(c) Forgassuk meg az első síknegyedbe eső síkrészt az y -tengely körül is! Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

9. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e! Alkalmazzuk az összehasonlító kritériumot a feladatok megoldása során!

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx;$$

$$(b) \int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} - 1} dx;$$

$$(c) \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx;$$

$$(d) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^6 + 1}} dx;$$

$$(e) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} dx;$$

$$(f) \int_{\pi}^{+\infty} \frac{2 + \cos x}{x} dx;$$

$$(g) \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2} dx;$$

$$(h) \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx;$$

$$(i) \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x} dx;$$

$$(j) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx.$$

10. Az integrálkritérium segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek!

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2};$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n};$$

$$(e) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2};$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2 + 1}.$$

7. feladatlap

Fourier sorok

1. Vázolja az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi \\ \pi, & \text{ha } \pi < x < 2\pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

függvény grafikonját! Fejtse Fourier-sorba $f(x)$ -et!

2. Fejtse Fourier-sorba az alábbi függvényeket!

(a) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha } -\pi \leq x < \pi \\ f(x+2\pi), & \text{egyébként.} \end{cases}$

(b) Felhasználva az előző sorfejtést, számítsa ki az $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$ sor összegét!

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } -\pi \leq x < \pi \\ f(x+2\pi), & \text{egyébként.} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{ha } \pi < x < 2\pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x).$

(e) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0, x = \pi \\ 1, & \text{ha } 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x).$

(f) Felhasználva az előző sorfejtést, számítsa ki az $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ sor összegét!

(g) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & \text{ha } 0 < x < 2\pi \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$

(h) Felhasználva az előző sorfejtést, számítsa ki az $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ sor összegét!

3. Határozza meg az $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ ($-\pi < x \leq \pi$), $f(x) = f(x+2\pi)$ periodikus függvény Fourier-sorában $\cos x$ és $\sin x$ együtthatójának az értékét!

4. Határozza meg az $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ ($-\pi < x \leq \pi$), $f(x) = f(x+2\pi)$ periodikus függvény Fourier-sorában $\cos x$ és $\sin x$ együtthatójának az értékét!

5. Adott az $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } -\pi \leq x < \pi \\ f(x+2\pi), & \text{egyébként} \end{cases}$ függvény. Vázolja a függvény grafikonját! Adja meg az f függvény Fourier-sorában az a_3 és b_4 együtthatók értékét!

6. Adott az $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -\pi \leq x < \pi \\ f(x+2\pi), & \text{egyébként} \end{cases}$ függvény. Vázolja a függvény grafikonját! Adja meg az f függvény Fourier-sorában a $\sin 2x$ és $\cos 4x$ együtthatóinak értékét!

7. Határozza meg az $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2}, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, $f(x+2\pi) = f(x)$ függvény Fourier-sorában a_5 és b_3 értékét!

8. Határozza meg az $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{3}{2}, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, $f(x+2\pi) = f(x)$ függvény Fourier-sorában a_3 és b_4 értékét!

9. Adott az $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & \text{ha } -\pi \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - x, & \text{ha } 0 \leq x < \pi \end{cases}$, $f(x+2\pi) = f(x)$ függvény.

(a) Vázolja a függvény grafikonját!

(b) Adja meg az f függvény Fourier-sorát!

8. feladatlap

Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek

1. Oldjuk meg az $y' = xy$ differenciálegyenletet!

2. Oldjuk meg a következő, szétválasztható változójú differenciálegyenleteket!

(a) $(2x + 1)y' - 3y = 0;$

(b) $(x^2y + 6y)y' + (xy^2 - x) = 0;$

(c) $2(xy + x - y - 1) = (x^2 - 2x)y';$

(d) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y};$

(e) $xy' + (2x^2 - 1) \operatorname{ctg} y = 0;$

(f) $yy'e^{2x} = \cos 3x;$

(g) $y' = y^2 + 3y - 4;$

(h) $y' \sin x = y \ln y;$

(i) $(x^2 - 1)y' = 2xy \ln y;$

(j) $xy' = y \ln y;$

(k) $x^2y' + (x + 5)y = 0;$

(l) $xy^2 - x + (x^2 + 4y)y' = 0;$

(m) $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0;$

(n) $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0;$

(o) $(1 - \cos y)y' = 1 + \sin x;$

(p) $\sqrt{1 - x^2}y' = 1 + y^2;$

(q) $y' \sin 2x + \sin 2y = 0;$

(r) $(1 - x^2)y' = \sqrt{1 - y^2}.$

3. Keressük meg az alábbi differenciálegyenletek esetén azt a partikuláris megoldását, amelyik az adott kezdeti érték feltételt kielégíti!

(a) $xy' = y \ln y; \quad y(1) = e;$

(b) $y' \sin x = y \ln y; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2;$

(c) $e^{x-y} - e^x - y' = 0; \quad y(0) = \ln \frac{1}{2};$

(d) $x\sqrt{1 - y^2} = yy'\sqrt{1 - x^2}; \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

4. Oldjuk meg a következő, alkalmas helyettesítéssel szétválasztható változójú differenciálegyenletre visszavezethető differenciálegyenleteket!

(a) $(y - x)y' + x + y = 0;$

(b) $xy' = y - x \cos^2 \frac{y}{x};$

(c) $2xyy' + x^2 - 2y^2 = 0;$

(d) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y, \quad (y) = 0;$

(e) $(2x^3 + 3xy^2)y' = x^2y + 2y^3, \quad y(1) = 1;$

(f) $xy^2 - x + (x^2 + 4y)y' = 0;$

(g) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{3y - 2x};$

(h) $y' = (y - x)^2;$

(i) $(x - y)^2y' = 5;$

(j) $y' = \sin(x + 2y).$

5. Határozzuk meg annak a görbének az implicit egyenletét, amely átmegy a $P_0(1, 3)$ ponton, és amelynek a $P(x, y)$ ponthoz tartozó meredeksége $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)!$

6. Oldjuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket!

(a) $y' = y \operatorname{ctg} x + \sin x;$

(b) $y' + 2xy = xe^{-x^2};$

(c) $y' = \frac{3y}{x} + x;$

(d) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};$

(e) $y' + 2y \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x;$

(f) $y' + \frac{y}{x} = e^x + \frac{3e^x}{x};$

(g) $y' - \frac{3}{x}y = 2;$

(h) $xy' - y = e^x(x^2 + x^3);$

(i) $y = xy' + y' \ln y;$

(j) $(x - 2)y' = y + 2(x - 2)^2.$

7. Keressük meg az alábbi differenciálegyenletek adott kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását!

(a) $y' - \frac{1}{x \ln x}y = x \ln x, \quad y(e) = \frac{e^2}{2};$

(b) $y' - \frac{y}{x} - 2x^2 = 0, \quad y(1) = -1;$

(c) $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, \quad y(0) = 0;$

(d) $y' + \frac{y}{1+x} = \frac{1+2x}{1+x}, \quad y(0) = 2;$

(e) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2}{x} + \frac{3}{2}, \quad y(1) = 0.$

9. feladatlap

Bernoulli-féle differenciálegyenletek

1. Oldjuk meg az

$$xy' - 2y = 4x^3\sqrt{y}$$

differenciálegyenletet!

2. Keressük meg az alábbi, Bernoulli-féle differenciálegyenletek általános megoldását!

(a) $y' - \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)y = x^3y^2;$

(b) $y' - y = xy^5;$

(c) $xy' - y = xy^3(1 + \ln x);$

(d) $x^2y' + xy + \sqrt{y} = 0;$

(e) $y' = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2y};$

(f) $yy' + y^2 \operatorname{tg} x = \cos^2 x;$

(g) $y' + y \operatorname{tg} x + \frac{2y^3}{\cos x} = 0;$

(h) $y' + \frac{y}{x} = 2y^2.$

3. Keressük meg az

$$xy' + y = \frac{\ln x}{y^3}, \quad y(1) = 2, \quad (x > 0)$$

kezdetiérték feladat megoldását!

Görbesereg differenciálegyenlete, ortogonális trajektóriák

4. Írjuk fel az $y = Cx^2$ görbesereg differenciálegyenletét!
5. Írjuk fel az $x^2 + y^2 = C$ görbesereg differenciálegyenletét!
6. Írjuk fel az első és a harmadik síknegyedben lévő azon körök differenciálegyenletét, amelyek érintik az $y = 0$ és az $x = 0$ egyeneseket!
7. Határozzuk meg az

$$y = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

parabolasereg ortogonális trajektóriáinak egyenletét!

8. Írjuk fel az

$$y^2 = 2Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

görbesereg ortogonális trajektóriáinak egyenletét!

9. Írjuk fel az $xy = C$ egyenletű hiperbolák ortogonális trajektóriáinak egyenletét!

10. Adjuk meg az

$$x^2 = Ce^y + y + 1$$

egyparaméteres görbesereg ortogonális trajektóriáit az első síknegyedben!

Magasabbrendű differenciálegyenletek

11. Oldjuk meg az alábbi, hiányos másodrendű differenciálegyenleteket!

(a) $y'' = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$; (b) $(1 + \sin x)^2 y'' + \cos x = 0$;

(c) $2y'' - (y')^2 + 4 = 0$; (d) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$;

(e) $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$; (f) $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$;

(g) $xy'' - y' = x^3$; (h) $y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0$;

(i) $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$; (j) $yy'' = (y')^2(1 - y')$;

(k) $3y'' = 2(y')^2$; (l) $(y')^2 + yy'' = yy'$.

12. Határozzuk meg a következő differenciálegyenletek esetén az adott kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást!

(a) $y'' = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

(b) $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$;

(c) $yy'' - (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

(d) $y'' = y'e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

13. Oldjuk meg az alábbi, állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenleteket!

(a) $y'' + 2y' - 3y = 0$; (b) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

(c) $y'' - 2y' + 5y = 0$; (d) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$;

(e) $y''' - 2y'' + 2y' = 0$; (f) $4y''' - 4y'' + y' = 0$;

(g) $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 8y''' - 16y'' + 16y' - 32y = 0$.

14. Írjuk fel az

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$$

differenciálegyenlet adott kezdeti feltételeit kielégítő partikuláris megoldását!

15. Határozzuk meg az

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = 4$$

differenciálegyenlet adott kezdeti feltételeit kielégítő partikuláris megoldását!

16. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket!

(a) $y'' - 2y' + y = 2e^{3x} + 3e^x;$

(b) $y'' + 4y = \sin 2x;$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x;$

(d) $y'' + 6y' + 9y = 3 \sin 4x;$

(e) $y'' + 4y' + 4y = 25 \cos x;$

(f) $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x - x^2;$

(g) $y'' + y' = x^2 + 1;$

(h) $y'' - 2y' = 3x^2 - 5;$

(i) $y'' - 2y' = 32 \cos 2x + 4x;$

(j) $y^{(4)} + y'' = x^2 - 1 + 2e^x;$

(k) $y''' - y'' = 12x^2 + 6x;$

(l) $y^{(4)} - y' = 1;.$

17. Oldjuk meg az

$$y^{(5)} + y''' = 2e^x + 2x - 6$$

differenciálegyenletet!

18. Írjuk fel az alábbi differenciálegyenletek adott kezdeti feltételeit kielégítő partikuláris megoldását!

(a) $y''' + y' - 20y = xe^{-5x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1;$

(b) $y'' + y' - 6y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

(c) $y'' - y = 2 \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2;$

(d) $y'' + 2y' + y = x \sin x, \quad y(0) = \frac{5}{2}, \quad y'(0) = 0.$

10. feladatlap

Többszörös függvények

1. Határozzuk meg az

$$f(x, y) = \frac{x + 2y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

függvény értelmezési tartományát!

2. Adjuk meg az $f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2) + \ln(x^2 + y^2 - 1)$ függvény értelmezési tartományát!

3. Határozzuk meg az $f(x, y) = e^x \ln(xy)$ függvény értelmezési tartományát!

4. Határozzuk meg, hogy $\mathbb{R}^3$ mely legbővebb részhalmazán értelmezhető az

$$f(x, y, z) = \sqrt{z - x^2 - y^2} + \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z}$$

függvény!

5. Ábrázoljuk az alábbi felületek által határolt testeket!

(a) $z = 5 - x^2 - y^2, z = 1;$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0;$

(c) $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2};$

(d) $x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 4;$

(e) $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}.$

6. Ábrázoljuk azt a térrészt, amelyet a $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, a $z = x^2 + y^2$ paraboloid és az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű henger határol!

7. Vázoljuk az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű henger, az xy -sík és a $z = 2(x^2 + y^2)$ egyenletű paraboloid által meghatározott testet!

8. Ábrázoljuk azt a térrészt, amelyet a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp és az $x^2 + y^2 = 2x$ egyenletű henger határolnak!

9. Vázoljuk az $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ egyenletű hengert!

10. Határozzuk meg az

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-2}{-4}$$

egyenes, és az

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$$

ellipszoid metszéspontjait!

11. Mutassuk meg, hogy a $2x - y - 2z = 10$ síknak és a $2z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ paraboloidnak egyetlen közös pontja van! Adjuk meg a pont koordinátáit!

12. Igazoljuk, hogy $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} 2x - 3y = -4$.

13. Határozzuk meg a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$$

határértékeket, ha léteznek!

14. Mutassuk meg, hogy a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ határérték nem létezik!

15. Határozzuk meg a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$$

határértékeket, ha léteznek!

16. Folytonossá tehető-e az origóban az $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ kétváltozós függvény?

Parciális deriváltak

17. Határozzuk meg az alábbi függvények elsőrendű parciális deriváltjait!

(a) $f(x, y) = x^3 + 4xy - y^2 + 6;$

(b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2);$

(c) $f(x, y) = x^y;$

(d) $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y};$

(e) $f(x, y) = e^{xy};$

(f) $f(x, y, z) = x \arctg \frac{z}{y};$

(g) $f(x, y) = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^7;$

(h) $f(x, y, z) = 2^{x^2 - 2y^2 + \cos \sqrt{z}}.$

18. Határozzuk meg az f''_{xy} és az f'''_{yxy} parciális deriváltakat, ha $f(x, y) = x^3 y^5 - 2x^2 y^3 + 8x!$

19. Határozzuk meg az $f''_{xx}(1, 0, 1)$ és az $f'''_{yyx}(1, 1, 1)$ értékeket, ha $f(x, y, z) = e^{xz - y^2}!$

20. Igazoljuk, hogy a $z = \arctg \frac{x}{y}$ kétváltozós függvény teljesíti a $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ egyenlőséget!

21. Mivel egyenlő a

$$-\frac{x}{y} \cdot f'_x + y \cdot f''_{yy}$$

kifejezés, ha $f(x, y) = y \cdot \ln \sqrt{xy}$?

22. Mivel egyenlő az

$$x \cdot f'_x + y \cdot f'_y$$

kifejezés, ha $f(x, y) = \frac{y}{x+y}$?

23. Mivel egyenlő a $2x \cdot f'_x - y \cdot f'_y$ kifejezés, ha $f(x, y) = 2 \ln \frac{x}{y} + \frac{xy^2}{2}$?

Az iránymenti derivált, a felület érintősíkjá

24. Számítsuk ki az alábbi iránymenti deriváltakat!

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$; $P(2, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 4)$.

(b) $f(x, y) = \sin(x + y)$; $P\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$, $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, 1)$.

(c) $f(x, y) = xe^y - ye^x$; $P(0, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 5)$.

(d) $f(x, y) = \frac{\ln x}{\ln y}$; $P(e, e^2)$, $\mathbf{v} = (12, 5)$.

(e) $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$; $P(1, 1)$, a $\mathbf{v}$ vektor $\varphi = \frac{\pi}{3}$ szöget zár be az x - tengely pozitív irányával.

(f) $f(x, y) = \operatorname{sh}(x+y)\operatorname{ch}(x-y)$; $P(0, 0)$, a $\mathbf{v}$ vektor $\varphi = \frac{\pi}{4}$ szöget zár be az x - tengely pozitív irányával.

(g) $f(x, y) = 2\sqrt{x^2+y}$; $P(3, 7)$, a $\mathbf{v}$ vektor $\varphi = \pi$ szöget zár be az x - tengely pozitív irányával.

(h) $f(x, y) = \sqrt{xy}$; $P(1, 4)$, a $\mathbf{v}$ vektor $\varphi = \frac{\pi}{6}$ szöget zár be az x - tengely pozitív irányával.

25. Írjuk fel az alábbi felületek esetén a felületi normálist, valamint az érintősík egyenletét a megadott pontban!

(a) $f(x, y) = x^3y^2 - 2y$; $P(1, 2, 0)$

(b) $z = e^{xy} \sin(x + y)$; $P\left(\frac{\pi}{6}, 0, \frac{1}{2}\right)$

(c) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; $P(1, 0, 0)$

(d) $z = x^2e^{-y}$; $P(1, 0, 1)$

(e) $z = \frac{x-y}{x+y}$; $P(2, -1, 3)$

(f) $xyz - 4z^3 = -30$; $P(1, 1, 2)$

(g) $xe^y \cos z = 1$; $P(1, 1, 1)$

(h) $z^x + z^y = 12$; $P(2, 3, 2)$

26. Adott az $f(x, y) = \cos \frac{\pi y}{x^2 + y^2}$ kétváltozós függvény.
- (a) Írja fel az f függvény $P_0(2, 2)$ pontbeli gradiensét!
 - (b) Határozza meg az f függvény iránymenti deriváltját a $P_0(2, 2)$ ponton átmenő $\underline{v} = (1, 1)$ irányvektorú egyenes mentén!
 - (c) Írja fel a $z = f(x, y)$ felület $P_0(2, 2)$ pontbeli érintősíkját!
27. Számítsa ki az $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y^2}$ függvény $P_0(0, 1)$ pontjában
- (a) az iránymenti deriváltat az $a = (2, 2\sqrt{3})$ irányban;
 - (b) a $z = f(x, y)$ felület P_0 pontbeli érintősíkját!
28. Határozzuk meg az alábbi $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ függvények Hesse-mátrixát!
- (a) $f(x, y) = x^3y + xy^3;$
 - (b) $f(x, y) = e^{x-y};$
 - (c) $f(x, y) = \sin(xy);$
 - (d) $f(x, y) = x^y;$
 - (e) $f(x, y) = \ln(1 + xy).$

A kétváltozós függvény szélsőértéke

29. Határozzuk meg az alábbi többváltozós skalárértékű függvények $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ lokális szélsőértékeit!
- (a) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2;$
 - (b) $f(x, y) = (x - 1)^2 + 4(y - 3)^2;$
 - (c) $f(x, y) = x^2 - y + e^y;$
 - (d) $f(x, y) = x^4 - 3y^3 - 2xy;$
 - (e) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy;$
 - (f) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3;$
 - (g) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 2y + 5;$
 - (h) $f(x, y) = x^4 + y^3 - 32x - 27y - 1;$
 - (i) $f(x, y) = xy(2x + 4y + 1).$
30. Vizsgáljuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 + 8 - 8xy$ függvényt lokális szélsőérték szempontjából!
31. Legyen $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 4x^2 + 5y - 3x + 7$ függvény adott. Hol van a függvénynek lokális maximuma vagy minimuma?

32. Hol van az $f(x, y) = \frac{x^3}{2} - y^2 - 2x^2 + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}x + 5$ függvénynek lokális maximuma vagy minimuma?
33. Hol van lokális maximuma vagy minimuma az $f(x, y) = e^{x^3+y^3-3xy}$ függvénynek?
34. Mutassuk meg, hogy az $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$ kétváltozós függvénynek nincs sem lokális maximuma, sem pedig lokális minimuma!
35. Adjuk meg azokat az x, y, z pozitív valós számokat, amelyekre $x + y + z = 18$ és xyz maximális!
36. Határozzuk meg azokat az x, y, z pozitív valós számokat, amelyekre $xyz = 64$ és $x + y + z$ minimális!
37. Igazoljuk, hogy az adott felszínű, téglatest alakú, tetővel ellátott dobozok közül a kocka alakúnak a legnagyobb a térfogata!

11. feladatlap

Kettős integrálok

1. Írja fel a $\iint f(x, y) dx dy$ kettős integrálban az integrálás határait, ha először x , azután y szerint integrálunk (majd fordítva), és a T tartomány
 - a) $x^2 + y^2 \leq 16$;
 - b) $x^2 + y^2 \leq 9, y < 0$;
 - c) $y \geq x^2, x + y \leq 4$;
 - d) $x = 0, y = 0, 2x + y = 6$
egyenesek által határolt
háromszög;
 - e) $y^2 \leq 8x, y \leq 2x, 4x + y \leq 24$;
 - f) $y \leq x, 2y \geq x, xy \leq 2$.
2. Válaszolja az alábbi kettős integrálok integrálási tartományát:
 - a) $\int_{x=0}^4 \int_{y=0}^{4x-x^2} f(x, y) dx dy$;
 - b) $\int_{x=0}^1 \int_{y=-2x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dx dy$;
 - c) $\int_{x=0}^1 \int_{y=-x}^{x^2} f(x, y) dy dx$;
 - d) $\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{2 \cos \varphi} f(r, \varphi) dr d\varphi$.
3. Cserélje fel az integrálás sorrendjét az alábbi kettős integrálokban:
 - a) $\int_{x=1}^2 \int_{y=x}^{2x} f(x, y) dx dy$;
 - b) $\int_{x=0}^3 \int_{y=x}^{\sqrt{6x-x^2}} f(x, y) dx dy$;
 - c) $\int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dx dy$;
 - d) $\int_{y=0}^1 \int_{x=y}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$.
4. Számítsa ki a következő kettős integrálokat:
 - a) $\int_{x=1}^2 \int_{y=0}^x (x-2)y^2 dx dy$;
 - b) $\int_{x=0}^2 \int_{y=1}^6 \frac{4y-1}{3x^4} dx dy$;
 - c) $\int_{x=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{y=0}^2 y \sin x dx dy$;
 - d) $\int_{y=0}^{\pi} \int_{x=0}^y \cos(x+y) dx dy$;
 - e) $\int_{x=1}^4 \int_{y=3}^6 (2x^3 y - x^2) dx dy$;
 - f) $\iint_{x^2+y^2 \leq 16} xy^2 dx dy$.
5. Számítsa ki a $\iint_T (x-y) dx dy$ kettős integrált, ha T az $y^2 = 3x$, az $y^2 = 4-x$ görbék és az x -tengely által határolt tartomány!
6. Határozza meg annak a tetraédernek a térfogatát, amelyet a koordinátasíkok és a $2z = 12 + 4x + 3y$ sík határolnak!
7. Határozza meg annak a testnek a térfogatát, amelyet az $x^2 + y^2 = 1$ egyenes henger, az xy sík és az $x + z = 1$ sík határol!
8. Válaszolja a $T = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq |x|\}$ tartományt! Számítsa ki a

$$\iint_T (\sin x + 2y) dx dy$$

kettős integrált!

9. Számítsa ki az $A(a) = \iint_{T_a} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$ kettős integrált, ahol T_a az origó középpontú, a sugarú körtartomány. Határozza meg az így kapott $A(a)$ kifejezés határértékét, ha $a \rightarrow \infty$!
10. Számítsa ki a $\iint_T xy dx dy$ kettős integrált, ahol a T tartomány az origó középpontú egységnyi sugarú körnek az a része, amelyre teljesül, hogy $x \geq 0$ és $y \geq \frac{1}{2}$!
11. Vázolja azt a T síktartományt, amely az $r = 1 + \cos \varphi$ görbén belül és az $r = 1$ körön kívül van! Számítsa ki a $\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ kettős integrált!
12. Számítsa ki az alábbi felületek által határolt térrész térfogatát:
 - a) $z = 5 - x^2 - y^2, \quad z = 1;$
 - b) $x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad 2z = x^2 + y^2;$
 - c) $z = 6 - x^2 - y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2};$
 - d) $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}, \quad z = 2\sqrt{x^2 + y^2};$
 - e) $x^2 + y^2 = 2x, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0;$
 - f) $z = 4 - y^2, \quad y = \frac{x^2}{2}, \quad z = 0;$
 - g) $x^2 + y^2 = 4, \quad z = x + y + 10, \quad z = 0.$
13. Számítsa ki annak a testnek a térfogatát, amelyet a $z = (1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ és a $z = 0$ felületek metszenek ki az $x^2 + y^2 = 4$ hengerből!
14. Számítsa ki integrálszámítás segítségével az $R = 3$ sugarú gömb térfogatát!
15. Számítsa ki annak a térrésznek a térfogatát, amelyet a $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, a $z = x^2 + y^2$ paraboloid és az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű henger határol!
16. Legyen T az $xy = 1$ görbe és a $2x + y = 3$ egyenes által határolt tartomány. Határozza meg T területét kettős integrállal!
17. Számítsa ki integrálszámítás segítségével az $R = 5$ sugarú gömb térfogatát és felszínét!
18. Számítsa ki a következő felületek felszínét:
 - a) $6x + 3y + 3z = 12, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0;$
 - b) $z = xy, \quad x^2 + y^2 \leq 4;$
 - c) $x^2 + y^2 + z^2 = 20, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad z \geq 0;$
 - d) $x^2 + y^2 = 3z, \quad x^2 + y^2 \leq 3.$
19. Számítsa ki a $z = 15 - x^2 - y^2$ és a $z = 6$ felületekkel határolt test teljes felszínét!

20. Számítsa ki annak a térrésznek a térfogatát és a teljes felszínét, amelyet a $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, a $z = x^2 + y^2$ paraboloid és az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű henger határol!
21. Határozza meg annak a tetraédernek a térfogatát és a teljes felszínét, amelyet a koordinátságok és a $z = 6 - 2x + 3y$ sík határol!
22. Határozza meg annak a testnek a térfogatát, amelyet az $x^2 + y^2 = 1$ egyenes henger, az xy -sík és az $x + z = 1$ sík határol!
23. Határozza meg az $r = 1 + \cos \varphi$ kardioid területét kettős integrállal!
24. Határozza meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ gömb azon részének felszínét, amely a $z = x^2 + y^2$ paraboloid belsejében van!
25. Számítsa ki az $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ gömb azon részének felszínét, amely a $z = 2$ és a $z = 4$ síkok között van!
26. Mekkora a $z = \arctg \frac{y}{x}$ felületnek az $x^2 + y^2 = 4$ henger által kimetszett részének a felszíne?
27. Számítsa ki a $z = 5 - x^2 - y^2$ felület azon részének felszínét, amely az origó közép-pontú 2 sugarú hengeren belül van!
28. Számítsa ki a következő hármas integrálokat, és vázolja az integrációs alaptartományokat:

a)
$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^3 \int_{z=0}^4 dz dy dx;$$

b)
$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^4 dz dy dx;$$

c)
$$\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^y xyz dz dy dx;$$

d)
$$\int_{x=0}^3 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^{xy} x^2 y^3 z dz dy dx .$$