

Analízis I.



GEMAN 151B

Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

Feladatgyűjtemény



Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia
2009

1. feladatlap

Analízis I. (GEMAN 151B)

I. éves Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Legyen

$$\begin{aligned}A &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ páros}\}; \\B &= \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}; \\C &= \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\}.\end{aligned}$$

Állapítsuk meg az $X = (A \setminus (B \cap C)) \cup ((A \setminus B) \setminus C)$ halmaz elemeit!

2. Bizonyítsuk be, hogy csak egy üres halmaz létezik!

3. Az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik nem? (A és B tetszőleges halmazok)

- (a) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$;
- (b) $(A \cap B) \subset A$;
- (c) $(A \cap B) \subset A \setminus B$;
- (d) $(A \setminus B) \subset (A \cup B)$;
- (e) $(A \cap B) \subset (A \setminus (A \setminus B))$.

4. Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

- (a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})$;
- (b) $(A \cup B) \cap (B \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B})$.

5. Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$; $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = cx + d\}$. Mit mondhatunk az a, b, c, d paraméterekről, ha tudjuk, hogy

- (a) $A \setminus B = A$;
- (b) $A \setminus B = \emptyset$;
- (c) $A \cap B = \{(0, 0)\}$;
- (d) $\{(1, 0), (0, 1)\} \subset (A \cap B)$.

6. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra:

- (a) $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;
- (b) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$;
- (c) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$;
- (d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

7. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra:

- (a) $\overline{\overline{A \cap B} \cup \overline{C}} \cup \overline{A \cap \overline{C}} \cup B = \overline{A} \cup B \cup C$;
- (b) $[A \setminus (B \cap C)] \cup [(A \setminus B) \setminus C]$;
- (c) $\overline{A \cap B} \cap \overline{A \cap B} = \overline{A \cap B} \cap \overline{A \cap B}$;
- (d) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

8. Legyenek x, y, z különböző elemek és $A := \{x, y, z\}$. Soroljuk fel az A hatványhalmazának elemeit!

9. Legyenek A és Legyenek x, y, z különböző elemek és $H := \{x, y, z\}$. Adjuk meg az összes ekvivalenciarelációt a H halmazon!
10. Legyenek A és B adott halmazok. Bizonyítsuk be, hogy
- $$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$
11. Hány közös eleme van az $A \times B$ és $B \times A$ halmaznak, ha $A = \{0; 1; 2; 3\}$, $B = \{0; 1; 2; 4\}$?
12. Határozzuk meg az $(A \times B) \cap (B \times A)$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$ halmazt, ha $A = B$!
13. Legyen $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$. Határozzuk meg a következő halmazokat:
- (a) $(A \setminus B) \times (B \setminus A)$;
 - (b) $(A \cup B) \times (A \cap B)$;
 - (c) $(A \setminus B) \times (B \cap A)$;
 - (d) $(B \setminus A) \times (B \cup A)$.

2. feladatlap

Analízis I.

(GEMAN 151B)

I. éves Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

- Határozzuk meg az alábbi relációk értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!
 - $A := \{-5, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B := \{-2, 1, 2, 3\}$, $\rho \subset A \times B$ és $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $x + y = 7$;
 - $A := \{0, 1, 2\}$, $B := \{0, 3, 5\}$, $\rho \subset A \times B$ és $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $xy = 0$.
- Adottak a $\rho = \{(1; 2), (2; 3), (3; 1), (4; 5), (5; 4)\}$ és $\sigma = \{(1; 2), (1; 4), (2; 4), (3; 1), (4; 5)\}$ relációk az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon.
 - Határozzuk meg az adott relációk értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!
 - Számítsuk ki a $\sigma^2 \circ \rho^{-1}$ relációt!
- Adott a $\sigma = \{(1; 5), (2; 4), (3; 1), (4; 5), (5; 3)\}$ bináris reláció az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon. Számítsa ki a $\sigma \cap \sigma^3$ relációt!
- Adottak a $\rho = \{(1; 2), (2; 3), (3; 1), (4; 5), (5; 1)\}$ és $\sigma = \{(1; 5), (5; 4), (2; 4), (3; 1), (4; 1)\}$ relációk az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon.
 - Határozza meg a $(\sigma \circ \rho)^{-1}$ relációt!
 - Határozza meg a $(\sigma \circ \rho) \cap (\rho \circ \sigma)$ relációt!
- Legyenek x, y, z különböző elemek és $H := \{x, y, z\}$. Adjuk meg az összes ekvivalenciarelációt a H halmazon!
- Vizsgálja meg, hogy az alábbi relációk közül melyik reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív. Ennek alapján állapítsa meg, melyik reláció ekvivalencia, melyik parciális rendezés és melyik teljes rendezés!
 - $\{(a, b) \mid |a| = |b|\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
 - $\{((a, b), (c, d)) \mid a + d = b + c\}$ az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon;
 - $\{(a, b) \mid a \parallel b\}$ a sík összes egyenesének L halmazán;
 - $\rho \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $x \mid y$;
 - $\rho \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $x \mid y$;
 - $\{(a, b) \mid a \text{ eltolható } b\text{-be}\}$ a sík összes sokszögeinek S halmazán;
 - $\{(a, b) \mid \text{ha } a = b \text{ vagy } b \text{ az } a \text{ egyenesági leszármazottja, azaz } b \text{ az } a \text{ gyermeke, unokája, ...}\}$ az összes emberek E halmazán;
 - $\{(a, b) \mid \text{ha } a \text{ ugyanazokból a számjegyekből áll a tízes számrendszerben, mint } b\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon;
 - A egy adott halmaz $f \subset P(A) \times P(A)$ és xfy akkor és csak akkor, ha $x = y$;
 - A egy adott halmaz $f \subset P(A) \times P(A)$ és xfy akkor és csak akkor, ha $x \subset y$.
- Igazolja, hogy ha ρ és σ az $A \neq \emptyset$ halmazon értelmezett két reláció, akkor:
 - Ha ρ és σ antiszimmetrikus, akkor $\rho \cap \sigma$ és $\rho \cup \sigma$ szimmetrikus;
 - Ha ρ tranzitív, akkor ρ^{-1} tranzitív;
 - Ha ρ és σ tranzitív, akkor $\rho \cap \sigma$ tranzitív.
- Legyenek A, B, C, D, E, F adott halmazok, $F \subset A \times B$, $G \subset C \times D$, $H \subset E \times F$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H).$$

3. feladatlap

Analízis I. (GEMAN 151B)

I. éves Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Legyen $X := \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ a $\leq$ relációval teljesen rendezett halmaz.
 - (a) Határozzuk meg X legkisebb és legnagyobb elemét!
 - (b) Határozzuk meg X alsó illetve felső korlátainak halmazát $\mathbb{R}$ -ben. Mivel egyenlő $\sup X$ és $\inf X$ $\mathbb{R}$ -ben?
2. Az alábbi halmazok esetén határozzuk meg $\sup X$ -et és $\inf X$ -et (ha létezik)!
 - (a) $X := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;
 - (b) $X := [-1, 1]$;
 - (c) $X := \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x < 0\}$.
3. A függvényre adott definíció alapján válasszuk ki az alábbi relációk közül a függvényeket:
 - (a) $\{(1; 4), (2; 3), (8; 7), (9; 5), (13; 15)\}$;
 - (b) $\{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5)\}$;
 - (c) $\{(2; 2), (3; 2), (4; 2), (5; 2)\}$;
 - (d) $\{(-1; 3), (4; -7), (8; -1), (9; -7), (10; 4)\}$;
 - (e) $\{(-1; 3), (2; 8), (3; 6), (-1; 4), (8; 7), (2; 4)\}$.
4. Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények:
 - (a) $\rho \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $x \mid y$;
 - (b) $\mathbb{P}$ a prímszámok halmaza, $f \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ és $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $x \mid y$;
 - (c) $A := \{0, 2, 4\}$, $B := \{1, 3, 5\}$, $\rho \subset A \times B$ és $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $xy = 0$;
 - (d) $A := \{0, 2, 4\}$, $B := \{1, 3, 5\}$, $\rho \subset B \times A$ és $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $xy = 0$;
 - (e) $\{(a, b) \mid \text{ha } a \text{ ugyanazokból a számjegyekből áll a tízes számrendszerben, mint } b\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon;
 - (f) $f \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és xfy akkor és csak akkor, ha $2x = y$;
 - (g) $f \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és xfy akkor és csak akkor, ha $x^2 = y^2$;
 - (h) $f \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és xfy akkor és csak akkor, ha $x^2 = y^2$.
5. Az alábbi függvények közül melyek injektívek, illetve szürjektívek? Adjuk meg azon függvények értékkészletét, amelyek nem szürjektívek!
 - (a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^3$;
 - (b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad f(x) := x^4$;
 - (c) $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^3$;
 - (d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sin x$.
6. Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyek invertálhatók! Azokban az esetekben amikor f invertálható határozzuk meg az inverz függvényét!
 - (a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := 2x + 1$;
 - (b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2$;
 - (c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{x}$;

$$(d) f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1-x}{1+x}.$$

7. Határozzuk meg a $\varphi \circ \varphi$, $\psi \circ \psi$, $\varphi \circ \psi$ és $\psi \circ \varphi$ függvényt, ha

$$(a) \varphi(x) = x^2 \text{ és } \psi(x) = 2^x, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(b) \varphi(x) = \frac{1}{x} \text{ és } \psi(x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$(c) \varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ x, & \text{ha } x > 0 \end{cases} \text{ és } \psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ -x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között!

$$(a) \mathbb{R}^+ \text{ és } \mathbb{R};$$

$$(b) (0, 1] \text{ és } [1, +\infty);$$

$$(c) [0, 1] \text{ és } [a, b].$$

9. Legyen $\mathcal{A}$ adott halmazrendszer, $f \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, és AfB akkor és csak akkor, ha A és B egyenlő számosságú. Bizonyítsuk be, hogy f ekvivalencia-reláció $\mathcal{A}$ -n!

10. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a) [0, 1] \sim [0, +\infty);$$

$$(b) (a, b) \sim (0, 1);$$

$$(c) (0, 1) \sim (a, +\infty);$$

$$(d) (a, +\infty) \sim (-\infty, -a);$$

$$(e) (0, 1) \sim \mathbb{R}.$$

11. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ bármely két zárt intervalluma ekvivalens!

4. feladatlap

Analízis I.

(GEMAN 151B)

I. éves Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Határozza meg az alábbi halmazok belső pontjainak, határpontjainak, külső pontjainak, torlódási pontjainak és izolált pontjainak halmazát!

(a) $H_1 \subset \mathbb{R}; \quad H_1 =]-1.1] \cup \{3\} \cup [4, 5];$

(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$

(c) $\mathbb{N};$

(d) $H_2 \subset \mathbb{R}; \quad H_2 = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.$

2. Bizonyítsuk be teljes indukció segítségével a következő állításokat!

(a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1};$

(b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2);$

(c) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$

(d) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2};$

(e) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2};$

(f) $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3};$

(g) $1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + \dots + n! \cdot n = (n+1)! - 1;$

(h) $1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \dots - \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{n!};$

(i) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad n \geq 2$

(j) $2^n > n^2 \quad n \geq 5$

(k) $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1} \quad n \geq 2$

(l) $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$

(m) $9 \mid 4^n + 15n - 1$

(n) $5 \mid 2^{4n+1} + 3$

(o) $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

3. Az $(1 + \sqrt{2})^n$ kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésének harmadik tagja 110. Mekkora a kifejtés utolsó előtti tagja?

4. Fejtsük ki a binomiális tétel alapján az $(x^2 - 2y^3)^5$ hatványt!

5. Számítsuk ki a $(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x})^n$ hatványkitevőjét, ha a harmadik tagjában $\sqrt{x^5}$ szerepel!

6. Mekkora x értéke, ha $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^6$ kifejezés középső tagja $\frac{5}{9}$? Oldjuk meg a feladatot Pascal-háromszög felhasználásával is!

7. Számítsa ki az $E(x) = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{12}$ kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésének azon tagját, amely nem tartalmazza x -et!

8. Adott $E(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3} \right)^{17}$. Határozzuk meg binomiális tétel szerinti kifejtésének azon tagját, amelyik nem tartalmazza x -et!

9. Határozza meg az alábbi összegeket!

(a) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n};$

(b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n};$

(c) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \dots + (n+1)\binom{n}{n};$

(d) $\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} + \dots + (n-1)\binom{n}{n}.$

5. feladatlap

Analízis I. (GEMAN 151B)

I. éves Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Adott az $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ \frac{n+1}{2n+3} \right\}_{n=1}^\infty$ sorozat.

- (a) Monoton-e a sorozat?
- (b) Korlátos-e a sorozat?
- (c) Konvergens-e a sorozat?

2. Adott az $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ \frac{4^n}{1-3 \cdot 4^n} \right\}_{n=1}^\infty$ sorozat.

- (a) Monoton-e a sorozat?
- (b) Korlátos-e a sorozat?

3. Adott az $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ (-1)^n \sin \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^\infty$ sorozat.

- (a) Monoton-e a sorozat?
- (b) Korlátos-e a sorozat?

4. Vizsgálja meg az $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ 1 + (-1)^n \frac{n+1}{n} \right\}_{n=1}^\infty$ általános taggal adott sorozatot!

- (a) Monoton-e a sorozat?
- (b) Korlátos-e a sorozat? Ha igen, adjon alsó és felső korlátot!

5. Határozzuk meg az alábbi sorozatok értékkészletének infimumát és szuprémumát!

(a) $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, a_n := \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2};$

(b) $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, a_n := (3 + (-1)^n)n;$

(c) $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, a_n := 1 + 2(-1)^n + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}};$

(d) $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, a_n := n^{(-1)^n}.$

6. Határozza meg, hogy hányadik tagtól kezdve esnek a sorozat elemei a határérték adott ε sugarú környezetébe?

(a) $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ \frac{n+2}{3n-8} \right\}_{n=1}^\infty; \quad \varepsilon = 10^{-3}$

(b) $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ 3 + \frac{(-1)^n}{n+2} \right\}_{n=1}^\infty; \quad \varepsilon = 10^{-2}$

(c) $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{1+2+3+4+\dots+2n} \right\}_{n=1}^\infty; \quad \varepsilon = 0,001$

(d) $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ \frac{1}{3^n+1} \right\}_{n=1}^\infty; \quad \varepsilon = 10^{-2}$

(e) $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ \left(\begin{array}{ll} \left(\frac{1}{2} \right)^n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \left(\frac{1}{3} \right)^n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{array} \right) \right\}_{n=1}^\infty; \quad \varepsilon = 10^{-2}$

7. Határozza meg a következő sorozatok torlódási pontját (pontjait), ha létezik (léteznek)!

$$(a) \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ (-1)^{n-2} \left(2 + \frac{3}{n^2} \right) \right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$(b) \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{5 + (-1)^n n^2}{5 - n^2} \right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$(c) \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{2n}{n+1} \sin^2 \left(n \frac{\pi}{2} \right) \right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$(d) \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{\sqrt[n]{c+1} + 3}{1-n} \cdot \cos(n\pi) \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad c > 0$$

8. Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat monotonitás, korlátosság, határérték és torlódási helyek meghatározása céljából!

$$(a) \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{n+1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$(b) \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{n-1}{n+2} \right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$(c) \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{5n-2}{5-10n} \right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$(d) \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{3^{n+1} - 1}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$(e) \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1+n^2}{n^2+n} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

9. Igazoljuk, hogy az

$$a_1 = \sqrt{2}; \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

rekurzív definícióval megadott sorozat konvergens!

6. feladatlap

Analízis I.

(GEMAN 151B)

I. éves Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat konvergencia szempontjából!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & a_n = \frac{1+2+\dots+n}{2n-3}; & \text{b)} & a_n = \frac{3n^4-2n^3+8n-10}{\sqrt[3]{n^9-n^4}+3n}; & \text{c)} & a_n = \frac{n^5-14n+2}{n^4-2n-18}; \\ \text{d)} & a_n = \frac{\sqrt{4n^2+5}+2n}{\sqrt[4]{n+16n^4}-6}; & \text{e)} & a_n = \frac{\sqrt{n^2+6}+7}{4n+3}; & \text{f)} & a_n = \frac{(-1)^n}{n}; \\ \text{g)} & a_n = \frac{100n}{n^2+1}; & \text{h)} & a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n(n+6)}; & \text{i)} & a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}; \\ \text{j)} & a_n = \cos(n\pi); & \text{k)} & a_n = \sqrt{n^2+2}-n; & \text{l)} & a_n = \sqrt{9n^2+2n-1}-3n; \end{array}$$

2. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{5^n} =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n-3}-7^{n+1}}{8^{n-2}+5^{n+3}} =? \\ \text{(b)} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n-8^n}{9^n} =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}} =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+3^{n+1}}{2^{n+1}+3^n} =? \\ \text{(c)} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-5^{n+1}}{5^5+1} =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n+4n}{5n+(-1)^{n-1}} =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+(-5)^n}{5^n+2^n} =? \\ \text{(d)} & \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n 0,9999^n =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{13}{n}} =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{123n^5} =? \\ \text{(e)} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}} =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n\pi}{n+2} =? \\ \text{(f)} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+1}-n =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{n+2} =? \\ \text{(g)} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{2}{n} \right)^n =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1-\frac{5}{n} \right)^n =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{3}{n} \right)^{n+2} =? \\ \text{(h)} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n-2} \right)^n =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-\sqrt{2}}{5n} \right)^n =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}} \right)^{\sqrt{n}} =? \\ \text{(i)} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+2}{5n+1} \right)^{n+1} =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{n} \right)^n =? \\ \text{(j)} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1-\frac{1}{n} \right)^{5n-7} =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+10}{5n-15} \right)^{2n+4} =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4+\frac{1}{n} \right)^{2n} =? \\ \text{(k)} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n} \right)^{1+\frac{1}{n}} =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}} \right)^n =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}} \right)^{\sqrt{n}} =? \\ \text{(l)} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+2n}{n^2} \right)^n =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{e}}{n+1} \right)^n =? & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{3}{n} \right)^{n^2} =? \end{array}$$

3. Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat konvergencia szempontjából!

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt[n]{\frac{n!}{(n-2)!}} + \frac{3^{n+2}+(-2)^{2n+3}}{4^{n-1}+2^{2n-5}} + \left(\frac{-4-4n}{3-4n} \right)^{2n+1}; \\ a_n &= \left[\left(1+\frac{1}{n} \right)^{-n} + \left(1+\frac{1}{n} \right)^3 \right]; \\ a_n &= \left[\left(1+\frac{4}{n} \right)^{4n} + \left(1+\frac{5}{2n} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

7. feladatlap

Analízis I. (GEMAN 151B)

I. éves Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Ábrázolja és jellemezze a következő függvényeket!

- (a) $f(x) = \operatorname{sgn} x + \frac{1}{2}$
- (b) $g(x) = x \operatorname{sgn} x$
- (c) $h(x) = 2 \operatorname{sgn}(x+2) + \operatorname{sgn}(1-x)$
- (d) $u(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 5x + 6)$
- (e) $f(x) = -x + \operatorname{sgn} x$
- (f) $g(x) = x \operatorname{sgn}(\sin x)$
- (g) $h(x) = \frac{|x|}{x}$
- (h) $u(x) = |x+4| - 2$
- (i) $f(x) = |x+2| - |x-3|$
- (j) $g(x) = \left| \frac{2}{3}x - 4 \right| + \left| \frac{1}{3}x + 1 \right|$
- (k) $h(x) = |9 - x^2| - 2$
- (l) $u(x) = ||9 - x^2| - 2|$
- (m) $f(x) = 2|x-2| - \operatorname{sgn}(x+1)$

2. Vázolja az alábbi racionális egész függvényeket!

- (a) $f(x) = x - x^3$;
- (b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;
- (c) $f(x) = (x-1)(x+2)^2$;
- (d) $f(x) = x^3(1-x^2)(1+x)$;
- (e) $f(x) = (x^4 - 3x^3)(x+2)^2$;
- (f) $f(x) = 2x^2 - x^4$.

3. Vázolja a következő egyváltozós valós függvények grafikonjait!

- (a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2(2-x)}$;
- (b) $f(x) = \frac{x-2}{x^3(x+2)}$;
- (c) $f(x) = \frac{x^2-4}{(x+2)(x-1)^2}$;
- (d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;
- (e) $f(x) = \frac{x^3(x-2)}{(x-1)^3(x-2)^3}$;

- (f) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$;
- (g) $f(x) = \frac{1+x^3}{x^2}$;
- (h) $f(x) = 2x - \frac{1}{x-1}$;
- (i) $f(x) = \frac{x^4-1}{(x+1)^2}$;
- (j) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$;
- (k) $f(x) = x + \frac{1}{x+2}$;
- (l) $f(x) = x - \frac{x^2-1}{x+1}$;
- (m) $f(x) = \frac{(x-2)^2x}{x^2-3x+2}$;
- (n) $f(x) = \frac{x^2(x-3)(x+1)}{x^2-4}$.

4. Vizsgálja meg az alábbi függvényeket korlátosság szempontjából!

- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := ax + b$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$;
- (b) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 5 - x^4$;
- (c) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$;
- (d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$;
- (e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{x}{1+x^2}$.

5. Vizsgálja meg a következő függvényeket monotonitás szempontjából!

- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := ax + b$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$;
- (b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 + 2x + 3$;
- (c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := [x]$;
- (d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{2x}{1+x^2}$.

6. Döntse el a definíció alapján, hogy egyenletesen folytonosak-e az alábbi függvények!

- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := cx$, ahol $c \in \mathbb{R}$;
- (b) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$;
- (c) $f:]-3; 2[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 2x^2 - x + 1$;

7. Legyen

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{x}.$$

Bizonyítsa be, hogy f egyenletesen folytonos az $[1, +\infty[$ intervallumon, de nem egyenletesen folytonos $]0, 1]$ -en!

8. feladatlap

Analízis I.

(GEMAN 151B)

I. éves Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Döntsük el a definíció alapján, hogy az alábbi függvényeknek létezik-e határértéke az $x_0 = 0$ pontban!

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x+2, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \operatorname{sgn} x;$

2. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 5) = -1$ úgy, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz megadunk egy jó δ -t!

3. Ha be szeretnénk látni, hogy $\lim_{x \rightarrow 3} (2 + 5x) = 17$ és adott egy ε , melyik a legnagyobb δ , amit használhatunk?

4. Az $f(x) = \frac{5}{2-x}$ függvény az $x = 2$ helyen nincs értelmezve. Közelítsük meg a 2-t először az $x_n^{(1)} = 1 + \frac{n}{n+1}$ sorozattal, majd az $x_n^{(2)} = 2 + \frac{1}{n}$ sorozattal, és határozzuk meg a megfelelő függvényértékek sorozatának határértékét. Értelmezzük az eredményt!

5. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5 - x^2 + 2x + 6);$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} (4x^3 - 2x^2 + 3x + 2);$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} 5x^2;$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4 + 3x^3 - 1);$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2};$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1+x^2};$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2-1};$ h) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x-5};$ i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1};$

j) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-x-12}{x-4};$ k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1};$ l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-5x^2+2x-4}{x^2-3x+3};$

m) $\lim_{x \rightarrow -a} \frac{a^2-x^2}{x^3-a^3};$ n) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x^3+1};$ o) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6};$

p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+3x-1}{2x^2-x+1};$ q) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right);$ r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x};$

s) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1};$ t) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25};$ x) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1};$

y) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}};$ z) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3+2}{\sqrt{x^4-2}};$ zs) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1}-x);$

6. A következő feladatok során a $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$, $a \in \mathbb{R}$ határérték felhasználásával és alkalmas átalakításokkal járhatunk el a legcélszerűbben.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{1+2x} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{1+2x} \right)^{x+2} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^3-1} \right)^{\frac{x^3}{2}} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (1+3tgx)^{ctgx} = ?$$

7. Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit és azok típusait:

- (a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := (\operatorname{sgn} x)^2;$
- (b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := [x] + [-x];$
- (c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{1+x^2};$
- (d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$

8. Döntsük el, hogy az alábbi függvényeknek létezik-e határértéke $+\infty$ -ben és $-\infty$ -ben:

- (a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x^2}{1+x^2};$
- (b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x - [x];$

9. Határozzuk meg a következő határértékeket!

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x)$, ha $f(x) = \begin{cases} 7x-2, & \text{ha } x \geq 2 \\ 3x+5, & \text{ha } x < 2 \end{cases}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x|}{x}$ és $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x|}{x};$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{3}{x-4}$ és $\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{3}{x-4};$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x^2-7x+12}$ és $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x^2-7x+12}.$

10. Állítsuk elő az $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ függvény $x = 0$ szakadási helyhez tartozó

- (a) bal oldali határértékét;
- (b) jobb oldali határértékét.
- (c) Állapítsuk meg, hogy a függvénynek milyen szakadása van ezen a helyen!
- (d) Vázoljuk fel a függvényt!

11. Állapítsuk meg, hogy milyen szakadása van az

$$f(x) = 2^{\operatorname{tg} x} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

függvénynek az $x_0 = \frac{\pi}{2}$ helyen, és vázoljuk a függvényt!

12. Ábrázoljuk az

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 + 4x)$$

függvényt! Folytonos-e a függvény az $x_0 = -4$ helyen?

13. Van-e határértéke az $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ függvénynek az $x_0 = 0$ helyen?

14. Adott az $f(x) = e^x \operatorname{sgn}(1-x)$ függvény. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ ha } a = -\infty; 1-0; 1+0; 1; +\infty.$$

15. Ábrázolja az

$$f(x) = \begin{cases} |\sin 2x|, & \text{ha } x > 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \\ 2^x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvényt! Adja meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét! Folytonos-e a függvény? Ha nem, akkor milyen típusú szakadása van?

16. Ábrázolja az

$$f(x) = \begin{cases} 2 - e^{-x}, & \text{ha } x > 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \\ \cos 2x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvényt! Adja meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét! Folytonos-e a függvény? Ha nem, akkor milyen típusú szakadása van?

17. Meghatározhatók-e az a, b, c, d, e paraméterek úgy, hogy a következő függvények az értelmezési tartomány minden pontjában folytonosak legyenek?

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \text{ és } x \neq -1 \\ a, & \text{ha } x = -1 \\ b, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 3 + \frac{1}{1 + 7^{\frac{1}{1-x}}}, & \text{ha } x \neq 1 \\ c, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x < 0 \\ x + d, & \text{ha } 0 < x < 3 \\ e, & \text{ha } x \geq 3 \end{cases}$$

18. Tekintsük az

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot \operatorname{sgn} \sin x$$

függvényt!

(a) Ábrázoljuk a függvény grafikonját!

(b) Határozzuk meg a következő határértékeket!

i. $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$;

ii. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x)$;

iii. $\lim_{x \rightarrow \pi+0} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x)$;

iv. $\lim_{x \rightarrow 2\pi+0} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow 2\pi-0} f(x)$;

v. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

9. feladatlap

Analízis I.

(GEMAN 151B)

I. éves Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Vázolja az alábbi függvények grafikonját!

- (a) $f_1(x) = \sin(\arcsin x)$;
- (b) $f_2(x) = \arcsin(\sin x)$;
- (c) $f_3(x) = \cos(\arccos x)$;
- (d) $f_4(x) = \arccos(\cos x)$;
- (e) $f_5(x) = \cos(\arcsin x)$;
- (f) $f(x) = \cos(3 \arccos x)$;
- (g) $f_6(x) = \arcsin(x - 4)$;
- (h) $f_7(x) = \pi - \arccos(x + 2)$;
- (i) $f_8(x) = \operatorname{arctg}(x + 2)$;
- (j) $f_9(x) =$

2. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét pontosan:

- (a) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{2}{3}\right)$;
- (b) $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right)$.

3. Igazoljuk, hogy

- (a) $2 \operatorname{arctg} 10 + \arcsin \frac{20}{101} = \pi$;
- (b) $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

4. Vázolja az alábbi függvények grafikonját!

- (a) $f_1(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$
- (b) $f_2(x) = \sqrt{-\operatorname{arctg}(x - 1)}$
- (c) $f_3(x) = \sin^2(\operatorname{arctg} x)$;
- (d) $f_4(x) = \cos^2(\operatorname{arctg} x)$;
- (e) $f_5(x) = \sin\left(\arcsin \frac{x + 1}{2}\right)$;
- (f) $f_6(x) = x \cdot \operatorname{ctg}(\arcsin x)$;
- (g) $f_7(x) = x \cdot \operatorname{tg}(\arccos x)$.

5. Készítse el az $f(x) = \operatorname{ctg} x + 1$ függvény grafikonját! Keresse meg az inverz függvényét és jellemezze!

6. Adott az

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{2x-1}, & \text{ha } x \leq 0 \\ x + \pi, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény. A jobb és baloldali határértékek kiszámításával döntse el, hogy hol és milyen szakadási helye van a függvénynek! Számítsa ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ határértéket! Indokolja meg, hogy a $(-\infty, 0]$ intervallumon létezik f^{-1} ! Írja fel az inverz függvényt, adja meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét!

7. Írja fel az

$$f(x) = 2 \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - 1, \quad x \in (-\pi, 0)$$

függvény inverzét és vázolja az inverz függvényt!

8. Írja fel az

$$f(x) = \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + 2, \quad x \in [0, \pi]$$

függvény inverzét és vázolja az inverz függvényt!

9. Írja fel az alábbi függvényeket a legegyszerűbb alakban, majd vázolja őket!

- (a) $g_1(x) = \operatorname{sh}(3x - 1)$;
- (b) $g_2(x) = -2 \operatorname{ch}(x + 2) - 4$;
- (c) $g_3(x) = \operatorname{th}(x - 1) + 2$;
- (d) $g_4(x) = \operatorname{cth}(2x - 1)$;
- (e) $g_5(x) = -2 \operatorname{arth}(x - 2)$;
- (f) $g_6(x) = \operatorname{arch}(1 - x)$;
- (g) $f_1(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x)$;
- (h) $f_2(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{arch} x)$;
- (i) $f_3(x) = \operatorname{arch}(\operatorname{ch} x)$;
- (j) $f_4(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{arch} x)$;
- (k) $f_5(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)$;
- (l) $f_6(x) = 2 \operatorname{ch}(\ln x)$;
- (m) $f_7(x) = \operatorname{ch}(\ln 2x)$;

10. Számítsa ki az alábbi kifejezések pontos értékét!

- (a) $\left(\ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{arch} 1 \right) \cdot \left(\arccos \left(\cos \frac{5\pi}{2} \right) \right) - \operatorname{arccotg} \sqrt{3} \cdot \arccos(-1)$;
- (b) $\operatorname{sh}(\ln 2) + \ln 10 \cdot \lg e + \operatorname{arctg} \left(2 + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \right)$;
- (c) $\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{1}{3} \right)$;
- (d) $\operatorname{ch}(\ln 2) - \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) + \operatorname{arch} 1 + \operatorname{arccotg} 0$;
- (e) $\sin \left(\arccos \frac{4}{5} \right)$;

- (f) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{5}{13}\right);$
- (g) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{3}{4}\right);$
- (h) $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{1}{3}\right);$
- (i) $\operatorname{sh}\left(\operatorname{arth} \frac{1}{7} + \operatorname{arth} 13\right);$
- (j) $\operatorname{ch}\left(\operatorname{arth} \frac{1}{8} - \operatorname{arth} \frac{1}{3}\right).$

11. Fejezzük ki az alábbi függvényeket e-alapú logaritmussal!

- (a) $f(x) = \operatorname{arsh} 2x;$
- (b) $f(x) = 2\operatorname{arsh} x;$
- (c) $f(x) = \operatorname{arsh}(x+2);$
- (d) $f(x) = 2 + \operatorname{arsh} x;$
- (e) $f(x) = 2\operatorname{arch} x.$

12. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

- (a) $\arcsin x = \operatorname{arctg} x;$
- (b) $\arcsin x - \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}.$

10. feladatlap

Analízis I.

(GEMAN 151B)

I. éves Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

Görbék paraméteres és polárkoordinátás megadása

- Írja fel annak a körnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely átmegy az origón és középpontja az $M(3, 0)$ pont!
- Vázolja az alábbi paraméteresen adott függvényeket! Küszöbölje ki a paramétert! Milyen határok között változik x és y ?

$$\text{a) } \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{b) } \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin^2 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{d) } \begin{cases} x = 3 \cos \left(\frac{\pi}{3} \cdot \sin t \right) \\ y = 3 \sin \left(\frac{\pi}{3} \cdot \sin t \right) \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x = \operatorname{sgn} t \\ y = (\operatorname{sgn} t)^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{f) } \begin{cases} x = \sin t \\ y = -3 + 2 \cos t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{g) } \begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{h) } \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos^2 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{i) } \begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{j) } \begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- Küszöbölje ki az asztroida paraméteres egyenletrendszeréből a paramétert!

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Határozza meg az alábbi ellipszis középpontjának koordinátáit és tengelyeinek hosszát!

$$\begin{cases} x = 2 + 4 \cos t \\ y = 5 + 3 \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Vázolja az alábbi polárkoordinátás egyenlettel adott görbéket! Írja fel a Descartes-koordinátás egyenleteket is!

$$\text{a) } r = 2, \quad \text{b) } r = 2 \cos \varphi, \quad \text{c) } r = 8 \sin \varphi,$$

$$\text{d) } r = 8 \sin^2 \varphi, \quad \text{e) } r = 3 \sin 2\varphi, \quad \text{f) } r = 2\sqrt{\cos \varphi},$$

$$\text{g) } r = \frac{3}{\cos \varphi}, \quad \text{h) } r = 2 \sin 3\varphi, \quad \text{i) } r = 1 + \sin \varphi,$$

$$\text{j) } r = 1 + \cos \varphi, \quad \text{k) } r = 2 - \cos \varphi, \quad \text{l) } r = 1 - \sin \varphi.$$

- Írja fel az alábbi görbe polárkoordinátás egyenletét!

$$x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

11. feladatlap

Analízis I.

(GEMAN 151B)

I. éves Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Legyen

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy a függvény csak az $x_0 = 0$ pontban differenciálható!

2. Mutassuk meg, hogy az

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq 1 \\ (x-2)^2, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény nem differenciálható az $x_0 = 1$ helyen!

3. Differenciálja az alábbi függvényeket!

(a) $f(x) = 3x^4 + 4x^2 - 7x + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^7};$

(b) $f(x) = \sqrt[7]{x^2} - 4\sqrt[6]{x^5};$

(c) $f(x) = \frac{x - x^3}{7};$

(d) $f(x) = \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}};$

(e) $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x - \log_7 x + 2^x;$

(f) $f(x) = \sqrt{5 + 2x - 3x^2};$

(g) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 1}{x + 2}};$

(h) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{6x^2 + \sin x}};$

(i) $f(x) = 3x \cdot \sqrt[3]{1 - x^2};$

(j) $f(x) = \frac{1}{5x} \cdot \sqrt{x^2 + 4x - 3};$

(k) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}};$

(l) $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x};$

(m) $f(x) = 4 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{4x - x^2};$

(n) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4x} \cdot \operatorname{ctg}^2 x;$

(o) $f(x) = \log_3 \log_4 x;$

(p) $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x+1}}{\sin x}.$

4. Az alábbi f függvényeknél adja meg f' -t!

- | | | |
|-----|---|---|
| (a) | $f(x) = 2(3x^2 + a)^4$ | $f(x) = \frac{2}{1 - x^2}$ |
| (b) | $f(x) = x + \sqrt{x + \sqrt[3]{x}}$ | $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$ |
| (c) | $f(x) = x^5 - \frac{3}{4}x^4 - 4x + 3$ | $f(x) = -x^7 + 2x^5 - \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{x + 1}$ |
| (d) | $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ | $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x}}$ |
| (e) | $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2}{2x^2 + 4}$ | $f(x) = (a + b\sqrt{x})^4$ |
| (f) | $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$ | $f(x) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 + x^4}}$ |
| (g) | $f(x) = (1 + nx^m)(1 + mx^n)$ | $f(s) = (1 - 4s^2)(2s^3 + 1)$ |
| (h) | $f(x) = \frac{e^x + \sin x}{xe^x}$ | $f(x) = (\cos x^3)e^{\cos x \sin x}$ |
| (i) | $f(x) = \sin\left(\cos \frac{1}{x^2}\right)$ | $f(x) = \ln(\sqrt{3x^2 + 2} + 2e^x + 1)$ |
| (j) | $f(x) = a^{\cos x^2}$ | $f(x) = \lg^3 x^2$ |
| (k) | $f(x) = \ln \ln \ln x$ | $f(x) = \ln^3 \frac{3x^5 + 6}{(x^2 + 5x)^2}$ |
| (l) | $f(x) = \sin \sin \sin x$ | $f(x) = \ln\left(x^4 + 3^{\sqrt{\sin x}}\right)$ |
| (m) | $f(x) = \operatorname{tg}^3\left(\frac{x^2 + x + 1}{3}\right)$ | $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$ |
| (n) | $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x - 1}{x + 1}$ | $f(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x + 1) + \operatorname{ch}(3x - 1)}{\operatorname{sh}^2(x + 2)}$ |
| (o) | $f(x) = \operatorname{th}(\ln(2x - \operatorname{ch} x))$ | $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{th} x^2}$ |
| (p) | $f(x) = \operatorname{arsh}(e^{x+3} - ex\sqrt{x})$ | $f(x) = e^{\operatorname{arth} x^2}$ |
| (q) | $f(x) = \frac{2^{\cos x}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{sh}^3 x}}$ | $f(x) = \log_2^2 \operatorname{cth} \sqrt{3 - x^2}$ |
| (r) | $f(x) = x^x$ | $f(x) = \sin(x^{\cos x})$ |
| (s) | $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ | $f(x) = x^{\operatorname{arch} x}$ |
| (t) | $f(x) = (\sqrt{x})^x$ | $f(x) = \sqrt[x]{x}$ |

5. Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2 - 3x + 1$$

függvény grafikonjának az $x = 2$ abszcisszájú pontjához húzott érintő és normális egyenletét!

6. Írja fel az $xy = 4$ hiperbola $x_1 = 1$ és $x_2 = -4$ abszcisszájú pontjaihoz tartozó érintők egyenletét!

12. feladatlap

Analízis I.

(GEMAN 151B)

I. éves Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Az alábbi f függvényeknél adja meg f' -t!

(a) $f(x) = x^x \quad (x > 0)$ (d) $f(x) = \sin(x^{\cos x}) \quad (x > 0)$

(b) $f(x) = (\sin x)^{\cos x} \quad (x \in \mathbb{R})$, (e) $f(x) = x^{\operatorname{arch} x}$

(c) $f(x) = (\sqrt{x})^x \quad (x > 0)$ (f) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

2. Határozzuk meg az alábbi, implicit alakban megadott függvények differenciálhányadosát!

(a) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$

(b) $y^2 = 2px$

(c) $\sqrt{y} + \sqrt{x} = \sqrt{a}$

(d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(e) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

(f) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

3. Számítsuk ki az y'_x deriváltat, ha

(a) $\left. \begin{array}{l} x(t) = 3 \cos t \\ y(t) = 4 \sin t \end{array} \right\}$

(b) $\left. \begin{array}{l} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = t^2 + 2t \end{array} \right\}$

(c) $\left. \begin{array}{l} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{array} \right\}$

4. Írjuk fel az alábbi görbék megadott M pontjához tartozó érintőjének egyenletét!

(a) $xy + \ln y = 1, \quad M(1; 1)$

(b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad M(2; \sqrt{2})$

(c) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1, \quad P(2; \frac{1}{2})$

(d) $\left. \begin{array}{l} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{array} \right\} \quad t_0 = \frac{\pi}{3}$

(e) $r = 1 + \cos \varphi, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

(f) $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$

5. Mutassuk meg, hogy az $y = \frac{3x^2 + 1}{3 + x^2}$ egyenletű görbe egységnyi ordinátájú pontjaiba húzott érintők az origóban metszik egymást.

6. Mekkora területű az az egyenlőszárú háromszög, amelyet az $f(x) = 1 + \sqrt{1 - x}$ függvény görbéjéhez húzott érintő a koordinátatengelyekkel bezár?

7. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ függvény azon pontjait köti össze, amelyekhez húzott érintők párhuzamosak az x -tengellyel!
8. Vizsgáljuk meg, hogy a következő függvények kielégítik-e a Cauchy-tétel feltételeit az adott intervallumban, és ha igen, számítsuk ki a megfelelő x értéket!

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = x^2 - 2x + 3 & g_1(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5 & [1; 4] \\ f_2(x) = e^x & g_2(x) = \frac{x^2}{1+x^2} & [-3; 3] \\ f_3(x) = \sin x & g_3(x) = \cos x & [0; \frac{\pi}{2}] \\ f_4(x) = x^2 & g_4(x) = \sqrt{x} & [1; 4] \end{array}$$

9. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } -16 \leq x \leq 2, \\ -x^2 + 6x - 6, & \text{ha } 2 < x \leq 8 \end{cases}$$

- (a) Mutassuk meg, hogy létezik olyan ξ a $[-6, 6]$ intervallum belsejében, amelyben $f'(\xi) = 0$.
- (b) Vizsgáljuk meg, hogy teljesülnek-e a Rolle-tétel feltételei.
10. Vizsgáljuk meg, hogy a következő függvények kielégítik-e a Rolle-tétel feltételeit az adott intervallumban, és ha igen, számítsuk ki a megfelelő ξ értéket!

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} & [-1; 1] \\ f_2(x) = \ln \sin x & [\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}] \\ f_4(x) = 1 - |x| & [-1; 1] \end{array}$$

11. Írjuk fel a Lagrange-féle középértéktételt az

$$f(x) = 4 - (x - 1)^2$$

függvényre a $[0; 4]$ intervallumon, és számítsuk ki a tételben szereplő belső pont koordinátáit!

12. Írjuk fel a Lagrange-féle középértéktételt az

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

függvényre a $[0; 5]$ intervallumon, és számítsuk ki a tételben szereplő belső pont koordinátáit!

13. Vizsgáljuk meg, hogy a következő függvények kielégítik-e a Lagrange-tétel feltételeit az adott intervallumban, és ha igen, számítsuk ki a megfelelő ξ értéket!

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \ln x & [1; e] \\ f_2(x) = \arctg x & [0; 1] \\ f_4(x) = \arcsin x & [0; 1] \end{array}$$

14. Számítsuk ki a következő határértékeket!

$$\begin{array}{lll}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x} & \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\sin(\ln x)}{\ln x} \\
 \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{\ln(x-1)^2}{x-2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - \cos^2 x}{\operatorname{arctg} 2x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1} & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4} \\
 \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln 5x} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{e^{x^2} - 1} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(x - \frac{\pi}{2})} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} \\
 \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 2x \operatorname{ctg} 7x & \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} & \lim_{x \rightarrow 0+0} 2x \ln^2 x \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x-1}{x+1} & \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x \\
 \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right) \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^{1+10 \ln x}} & \lim_{x \rightarrow 0+0} (\sin x)^x & \lim_{x \rightarrow 0+0} x^x \\
 \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} (e^x - 1)^{\operatorname{tg} x} & \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\sin x} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{1}{x}} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} & \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{2x} \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x & \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)
 \end{array}$$

13. feladatlap

Analízis I.

(GEMAN 151B)

I. éves Gazdaságinformatikus és Programtervező informatikus hallgatók részére

1. Adjuk meg az alábbi magasabbrendű deriváltakat!

$f_1(x) = \frac{a}{x^m}$	$(x \neq 0)$	$f_1'''(x) = ?$
$f_2(x) = x^k$	$(x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$	$f_2^{(n)}(x) = ?$
$f_3(x) = x \ln x$	$(x > 0)$	$f_3^{(5)}(x) = ?$
$f_4(x) = \frac{1}{x(x-1)}$	$(x \neq 0, x \neq 1)$	$f_4^{(20)} = ?$
$f_5(x) = x^n e^x$	$(x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$	$f_5^{(n)}(x) = ?$
$f_6(x) = \operatorname{sh} x$	$(x \in \mathbb{R})$	$f_6^{(100)} = ?$
$f_7(x) = \sin x$	$(x \in \mathbb{R})$	$f_7^{(n)} = ?$
$f_8(x) = x^3 \sin 3x$	$(x \in \mathbb{R})$	$f_8^{(n)} = ?$

2. Mutassuk meg, hogy ha

$$f(x) = x^3 \ln x,$$

akkor

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n 6(n-4)! x^{3-n}, \quad \text{ha } n \geq 4.$$

3. Mutassuk meg, hogy ha

$$f(x) = e^{-x} \sin x,$$

akkor teljesül az

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0.$$

egyenlőség.

4. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = 2x - \frac{2}{1 + tg \frac{x}{2}},$$

függvény eleget tesz a

$$\cos x + f''(x)(1 + \sin x)^2 = 0$$

egyenletnek.

- Írjuk fel az $f(x) = \ln x$ függvény $x = 1$ helyhez tartozó ötödfokú Taylor-polinomját!
- Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény $x = 2$ helyhez tartozó negyedfokú Taylor-polinomját!
- Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény $x = \frac{\pi}{2}$ helyhez tartozó másodfokú Taylor-polinomját!
- Írjuk fel a következő függvények ötödfokú Maclaurin polinomját!

a) $f(x) = \cos x$; b) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; c) $f(x) = \sin x$; d) $f(x) = \operatorname{sh} x$.

e) $f(x) = xe^x$; f) $f(x) = \frac{1}{1-x}$; g) $f(x) = x \sin x$; h) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

9. Adott az $f(x) = x^4 - x^2$ függvény.

- (a) Határozzuk meg a függvény zérushelyeit!
- (b) Számítsuk ki a szélsőérték- és inflexiós pontjainak a koordinátáit!
- (c) Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határértékeket!
- (d) Vázoljuk a függvény grafikonját!

10. Adott az $f(x) = x \arctg x$ függvény.

- (a) Határozzuk meg a függvény zérushelyét!
- (b) Számítsuk ki a szélsőérték- és inflexiós pontjainak a koordinátáit!
- (c) Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ és a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határértékeket!
- (d) Vázoljuk a függvény grafikonját!

11. Adott az $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$ függvény.

- (a) Határozzuk meg a függvény zérushelyét!
- (b) Számítsuk ki a szélsőérték- és inflexiós pontjának a koordinátáit!
- (c) Határozzuk meg a $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$ és a $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$ határértékeket!
- (d) Vázoljuk a függvény grafikonját!

12. Adott az $f(x) = x \ln x$ függvény.

- (a) Határozzuk meg a függvény zérushelyét!
- (b) Számítsuk ki a szélsőérték- és inflexiós pontjainak a koordinátáit!
- (c) Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$ és a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határértékeket!
- (d) Vázoljuk a függvény grafikonját!

13. Adott az $f(x) = x^2 \ln x^2$ függvény.

- (a) Határozzuk meg a függvény zérushelyeket!
- (b) Számítsuk ki a szélsőérték- és inflexiós pontjainak a koordinátáit!
- (c) Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ és a $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$ határértékeket!
- (d) Vázoljuk a függvény grafikonját!

14. Adott az $f(x) = x \ln x^2$ függvény.

- (a) Számítsuk ki a szélsőérték- és inflexiós pontjainak a koordinátáit!
- (b) Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$ és a $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$ határértékeket!
- (c) Vázoljuk a függvény grafikonját!

15. Keressük meg az $f(x) = \ln \frac{1}{x}$ függvény monoton illetve konvex és konkáv szakaszait!
Vázoljuk a függvényt a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ és a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ határérték figyelembevételével!

16. Keressük meg az $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ függvény monoton illetve konvex és konkáv szakaszait!
Vázzuk a függvényt a $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$ és a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ határértékek figyelembevételével!
17. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \ln(1+x^2)$ függvényen (zérushely, szélsőérték, inflexió hely(ek), monotonitás, konvexitás), majd vázzuk a függvény grafikonját!
18. Hol van szélsőértéke az $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ függvénynek?
Vázzuk a függvényt a $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ és a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ határértékek figyelembevételével!
19. Az $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ függvénynek milyen a és b értékek mellett lesz az $x_1 = 1$ és az $x_2 = 2$ helyen szélsőértéke?
Milyen típusúak ezek a szélsőértékhelyek?
20. Határozzuk meg az R sugarú gömbben elhelyezhető legnagyobb térfogatú henger sugarát!
21. Bádoglemezről 10 literes, felül is zárt hengeres tartályt akarunk készíteni. mekkorára válasszuk az alapkör sugarát (r) és a henger magasságát (m), hogy a tartály felszíne minimális legyen?
22. Egy falragasz területe $1,1025 \text{ m}^2$. Felső és alsó margó 10 cm , a két oldalon $7,5 \text{ cm}$. Milyen méretűre válasszuk a falragaszt, hogy a margókon belül telenyomatott terület a legnagyobb legyen?
23. Egy téglalap alakú bádoglemez oldalai a és b adottak. Milyen x oldalhosszúságú négyzeteket kell a sarkaiból kivágni, hogy a fennmaradó részt dobozzá hajtogatva, annak térfogata a lehető legnagyobb legyen?
24. Egy ablak keresztmetszete egy téglalapból és a téglalap egyik oldala fölé rajzolt félkörből áll. A keresztmetszet kerülete L adott hosszúságú. Hogyan válasszuk meg a méreteket, hogy a keresztmetszet területe a lehető legnagyobb legyen?
25. Egy felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez 2 m^2 területű lemezt használhatunk fel. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy térfogata a lehető legnagyobb legyen?
26. Egy tűzfal mellett 600 m^2 -es téglalap alakú területet akarunk elkeríteni. Csak három oldalon kell kerítést készítenünk, mert a negyedik oldal a tűzfal. Hogyan válasszuk meg a téglalap oldalait, hogy a kerítéshez a lehető legkevesebb drótot használjuk fel?
27. Keresse meg az $y^2 = 8x$ parabolának azt a pontját, amely a $(6,0)$ ponttól a legkisebb távolságra van!