Miskolci Egyetem

GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

Analízis I. példatár

(kidolgozott megoldásokkal)

elektronikus feladatgyűjtemény

Összeállította:
Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia

Miskolc, 2013.

Köszönetnyilvánítás

Az **Analízis I. példatár (kidolgozott feladatokkal)** című elektronikus feladatgyűjtemény a **TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001** jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Tartalomjegyzék

1 Halmazok, relációk, függvények

1.1 Halmazok megadása

1.1.1. Vizsgálja meg, hogy üres halmazt definiálnak-e az alábbi halmazok!

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 4 = 4\}$;

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$;

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 25 \text{ és } x > 5\}$.

1.1.2. Bizonyítsa be, hogy csak egy üres halmaz létezik!

1.1.3. Sorolja fel a következő halmazok elemeit!

(a) $A_1 = \{z \in \mathbb{Z} \mid |z^2 - 10| < 4\}$;

(b) $A_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ osztható 3-mal és } 4n - 2 < 31\}$;

(c) $A_3 = \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 + 200 < 30z\}$;

(d) $A_4 = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \left|\dfrac{2n-1}{2n-3} - 1\right| > \dfrac{1}{5}\right\}$;

(e) $A_5 = \left\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ páratlan és } 0 < \log_2 \dfrac{n}{7} < 1\right\}$;

(f) $A_6 = \{n \in \mathbb{N} \mid -7 < 2n + 5 < 9\}$;

(g) $A_7 = \left\{z \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{z-7}{z+3} > 2\right\}$;

(h) $A_8 = \{z \in \mathbb{Z} \mid (z-1)(z+4) < 0\}$.

1.1.4. Sorolja fel a következő halmazok összes elemét!

(a) $B_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$;

(b) $B_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x + \dfrac{1}{x} \leq 2 \text{ és } x > 0\right\}$;

(c) $B_3 = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{1}{4} \leq 2^x < 5\right\}$;

(d) $B_4 = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x} < 2\right\}$;

(e) $B_5 = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < |x - 5| < 10\}$;

(f) $B_6 = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \left|\dfrac{x}{2} + 3\right| < 1\right\}$.

1.1.5. Válassza ki a helyes állításokat!

(a) $\{1,2\} \in \{1,2,\{1,2,3\}\}$;

(b) $\{1,2\} \subset \{1,2,\{1,2,3\}\}$;

(c) $\{1,2\} \in \{1,2,\{1,2\}\}$;

(d) $\{1,2\} \subset \{\{1\},\{2\},\{1,2,3\}\}$;

(e) $\{1\} \in \{1,2,\{1,2,3\}\}$;

(f) $\{1\} \subset \{1,2,\{1,2,3\}\}$;

(g) $1 \in \{1,2,\{1,2\}\}$;

(h) $\{1\} \subset \{1,2,\{1\},\{2,3\}\}$.

1.1.6. Ábrázolja az alábbi halmazokat derékszögű koordináta-rendszerben:

(a) $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y-2=0\}$;

(b) $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2>0\}$;

(c) $C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2>2x+1\}$;

(d) $C_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}, x \neq 0, y \neq 0\right\}$.

1.2 Műveletek halmazokkal

1.2.1. Legyen $A = (-1,2]$ és $B = [1,4)$. Határozza meg és ábrázolja a számegyenesen az alábbi halmazokat!

(a) $A \cup B$;

(b) $A \cap B$;

(c) $A \setminus B$;

(d) $B \setminus A$.

1.2.2. Állapítsa meg az $X = (A \setminus (B \cap C)) \cup ((A \setminus B) \setminus C)$ halmaz elemeit, ha

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ páros}\}; \\ B &= \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}; \\ C &= \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\}. \end{aligned}$$

1.2.3. Legyen $A = [-1,3] \subset \mathbb{R}$, $B = (2,6] \subset \mathbb{R}$, és $C = [-4,7) \subset \mathbb{R}$.

(a) Határozza meg az $X = [(A \cup B) \setminus C] \cup [C \setminus (A \cap B)]$ halmazt!

(b) Határozza meg az $A \triangle B$ halmazt!

1.2.4. Határozza meg az $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ és $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ halmazt, ha

(a) $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$;

(b) $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3n-2 \text{ vagy } x = 3n-1\}$;

(c) $A_n = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{n}\right\}$.

1.2.5. Az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik nem? (A és B tetszőleges halmazok.)

(a) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$;

(b) $(A \cap B) \subset A$;

(c) $(A \cap B) \subset A \setminus B$;

(d) $(A \setminus B) \subset (A \cup B)$;

(e) $(A \cap B) \subset (A \setminus (A \setminus B))$.

1.2.6. Hozza egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

(a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$;

(b) $(A \cup B) \cap (B \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B})$.

1.2.7. Ha az A, B, C halmazok páronként diszjunktak, akkor mivel egyenlő az

$$X = \big((A \setminus B) \cap (B \setminus C)\big) \cup (C \setminus A)$$

halmaz?

1.2.8. Ha $A \subseteq B \subseteq C$, akkor mivel egyenlő az

$$Y = \big((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)\big) \setminus (A \cap B \cap C)$$

halmaz?

1.2.9. Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$; $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = cx + d\}$. Mit mondhat az a, b, c, d paraméterekről, ha tudja, hogy

(a) $A \setminus B = A$;

(b) $A \setminus B = \emptyset$;

(c) $A \cap B = \{(0, 0)\}$;

(d) $\{(1, 0), (0, 1)\} \subset (A \cap B)$.

1.2.10. Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra:

(a) $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;

(b) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$;

(c) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$;

(d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(e) $\overline{\overline{A \cap B} \cup C} \cup \overline{A \cap \overline{C}} \cup B = \overline{A} \cup B \cup C$;

(f) $\overline{A \cap B} \cap \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{\overline{A} \cap B}}$;

(g) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

1.2.11. A H halmaz A, B és X részhalmazára:

$$\overline{X \cup A} \cup \overline{X \cup \overline{A}} = B.$$

Fejezze ki az X halmazt A-val és B-vel!

1.2.12. Legyenek x, y, z különböző elemek és $A := \{x, y, z\}$. Sorolja fel az A hatványhalmazának elemeit!

1.2.13. Legyen $A = \mathcal{P}(\{a, b\})$ és $B = \mathcal{P}(\{b, c\})$. Határozza meg az alábbi halmazok elemeit!

(a) $A \cup B$;

(b) $A \cap B$;

(c) $A \setminus B$;

(d) $B \setminus A$;

(e) $A \triangle B$.

1.2.14. Határozza meg az alábbi halmazok összes elemét!

(a) $\mathcal{P}(\emptyset)$;

(b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$;

(c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

1.2.15. Legyenek A és B adott halmazok. Bizonyítsa be, hogy

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

1.3 Descartes-szorzat

1.3.1. Hány közös eleme van az $A \times B$ és $B \times A$ halmaznak, ha

$$A = \{0; 1; 2; 3\} \quad \text{és} \quad B = \{0; 1; 2; 4\}?$$

1.3.2. Határozza meg az $(A \times B) \cap (B \times A)$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$ halmazt, ha $A = B$!

1.3.3. Legyen $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$. Határozza meg a következő halmazokat:

(a) $(A \setminus B) \times (B \setminus A)$;

(b) $(A \cup B) \times (A \cap B)$;

(c) $(A \setminus B) \times (B \cap A)$;

(d) $(B \setminus A) \times (B \cup A)$.

1.3.4. Léteznek-e olyan A és B halmazok, amelyekre

(a) $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$;

(b) $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x)\}$;

(c) $A \times B = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (7, 1), (7, 2), (7, 3)\}$;

(d) $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (1, 3)\}$.

1.3.5. A sík mely részhalmazát jelölik ki a derékszögű koordináta-rendszerben az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz következő részhalmazai?

(a) $[0, 1] \times [0, 1]$;

(b) $\{0\} \times (1, +\infty)$;

(c) $[1, +\infty) \times (-\infty, 0)$;

(d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

(e) $\mathbb{N} \times (-\pi, \pi)$;

(f) $\mathbb{R} \times \emptyset$.

1.3.6. Döntse el, hogy az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ halmaz alábbi részhalmazai előállnak-e $A\times B$ alakban az $\mathbb{R}$ halmaz valamely A, B részhalmazaival!

(a) $D_1 = \{(x, y) \mid 2 \le x < 3, -1 < y < 2\}$;

(b) $D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

(c) $D_3 = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$;

(d) $D_4 = \{(x, y) \mid x = 3, y \in \mathbb{R}\}$;

(e) $D_5 = \{(x, y) \mid x, y \le 0\}$;

(f) $D_6 = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1 - y \le 1\}$;

(g) $D_7 = \{(x, y) \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$.

1.4 Relációk

1.4.1. Határozza meg az alábbi relációk értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!

(a) $A := \{-5, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B := \{-2, 1, 2, 3\}$, $\rho \subset A \times B$ és $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $x + y = 7$;

(b) $A := \{0, 1, 2\}$, $B := \{0, 3, 5\}$, $\sigma \subset A \times B$ és $x\sigma y$ akkor és csak akkor, ha $xy = 0$.

1.4.2. Legyen adott az $A = \{1, 3, 5, 7\}$ halmaz. Tekintsük az alábbi relációkat:

$$\rho_1 = \{(a, b) \mid a < b\} \subset A \times A, \qquad \rho_2 = \{(a, b) \mid a > b\} \subset A \times A,$$

$$\rho_3 = \{(a, b) \mid a \le b\} \subset A \times A, \qquad \rho_4 = \{(a, b) \mid a \ge b\} \subset A \times A.$$

(a) Határozza meg a relációk értelmezési tartományát és értékkészletét!

(b) Mi a fenti relációk egymáshoz való viszonya?

(c) Mi az $A \times A$ viszonya az egyes relációkhoz?

1.4.3. Adottak a

$$\rho = \{(1; 2), (2; 3), (3; 1), (4; 5), (5; 4)\} \qquad \text{és} \qquad \sigma = \{(1; 2), (1; 4), (2; 4), (3; 1), (4; 5)\}$$

relációk az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon.

(a) Határozza meg az adott relációk értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!

(b) Számítsa ki a $\sigma^2 \circ \rho^{-1}$ relációt!

1.4.4. Adott a

$$\sigma = \{(1; 5), (2; 4), (3; 1), (4; 5), (5; 3)\}$$

bináris reláció az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon. Számítsa ki a $\sigma \cap \sigma^3$ relációt!

1.4.5. Adottak a

$$\rho = \{(1;2),(2;3),(3;1),(4;5),(5;1)\} \qquad \text{és} \qquad \sigma = \{(1;5),(5;4),(2;4),(3;1),(4;1)\}$$

relációk az $A = \{1,2,3,4,5\}$ halmazon.

(a) Határozza meg a $(\sigma \circ \rho)^{-1}$ relációt!

(b) Határozza meg a $(\sigma \circ \rho) \cap (\rho \circ \sigma)$ relációt!

1.4.6. Legyen $A := \{a,b,c\}$. Adja meg az összes ekvivalenciarelációt az A halmazon!

1.4.7. Vizsgálja meg, hogy az alábbi relációk közül melyik reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív. Ennek alapján állapítsa meg, melyik reláció ekvivalencia, melyik parciális rendezés és melyik teljes rendezés!

(a) $\rho_1 = \{(a,b) \mid |a| = |b|\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(b) $\rho_2 = \{((a,b),(c,d)) \mid a+d = b+c\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$;

(c) $\rho_3 = \{(a,b) \mid a \parallel b\} \subset L \times L$, ahol L a sík összes egyeneseinek halmaza;

(d) $\rho_4 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és $x\rho_4 y$ akkor és csak akkor, ha $x \mid y$;

(e) $\rho_5 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és $x\rho_5 y$ akkor és csak akkor, ha $x \mid y$;

(f) $\rho_6 = \{(a,b) \mid a$ eltolható b-be$\} \subset S \times S$, ahol S a sík összes sokszögeinek halmaza;

(g) $\rho_7 = \{(a,b)$ |ha $a = b$ vagy b az a egyenesági leszármazottja, azaz b az a gyermeke, unokája, ...$\} \subset E \times E$, ahol E az összes emberek halmaza;

(h) $\rho_8 = \{(a,b)$ |ha a ugyanazokból a számjegyekből áll a tízes számrendszerben, mint $b\} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$;

(i) A egy adott halmaz, $\phi \subset P(A) \times P(A)$ és $x\phi y$ akkor és csak akkor, ha $x = y$;

(j) A egy adott halmaz, $\psi \subset P(A) \times P(A)$ és $x\psi y$ akkor és csak akkor, ha $x \subset y$.

1.4.8. Igazolja, hogy ha ρ és σ az $A \neq \emptyset$ halmazon értelmezett két reláció, akkor:

(a) Ha ρ és σ szimmetrikus, akkor $\rho \cap \sigma$ és $\rho \cup \sigma$ szimmetrikus;

(b) Ha ρ tranzitív, akkor ρ^{-1} tranzitív;

(c) Ha ρ és σ tranzitív, akkor $\rho \cap \sigma$ tranzitív.

1.4.9. Legyenek A,B,C,D,E,F adott halmazok, $F \subset A \times B$, $G \subset C \times D$, $H \subset E \times F$. Bizonyítsa be, hogy

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H).$$

1.4.10. Legyen $X := \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$ a $\leq$ relációval teljesen rendezett halmaz.

(a) Határozza meg X legkisebb és legnagyobb elemét!

(b) Határozza meg X alsó illetve felső korlátainak halmazát $\mathbb{R}$-ben. Mivel egyenlő $\sup X$ és $\inf X$ $\mathbb{R}$-ben?

1.4.11. Az alábbi halmazok esetén határozzuk meg $\sup X$-et és $\inf X$-et (ha létezik)!

(a) $X := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

(b) $X := [-1, 1]$;

(c) $X := \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x < 0\}$.

1.4.12. Adjon példát olyan teljesen rendezett halmazra, amelyben van legkisebb és legnagyobb elem, de amelynek van olyan végtelen részhalmaza, hogy annak sem infimuma sem szupremuma nem létezik!

1.5 Függvények

1.5.1. A függvényre adott definíció alapján válassza ki az alábbi relációk közül a függvényeket:

(a) $\{(1;5), (-2;3), (6;7), (3;5), (10;5)\}$;

(b) $\{(1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6)\}$;

(c) $\{(2;2), (3;2), (4;2), (5;2)\}$;

(d) $\{(-1;3), (4;-7), (8;-1), (9;-7), (10;8)\}$;

(e) $\{(-1;5), (4;8), (3;8), (-1;4), (8;7), (2;0)\}$.

1.5.2. Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Állapítsa meg, hogy az alábbi relációk közül melyek definiálnak függvényt!

(a) $\varphi_1 = \{(x, y) \mid y = x\} \subseteq A \times A$

(b) $\varphi_2 = \{(x, y) \mid x = 4\} \subseteq A \times A$

(c) $\varphi_3 = \{(x, y) \mid y = 5\} \subseteq A \times A$

(d) $\varphi_4 = \{(x, y) \mid y \neq x\} \subseteq A \times A$

(e) $\varphi_5 = \{(x, y) \mid y \leq x\} \subseteq A \times A$

(f) $\varphi_6 = \{(x, y) \mid y = x + 1\} \subseteq A \times A$

1.5.3. Döntse el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények:

(a) $\rho \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $x \mid y$;

(b) $\mathbb{P}$ a prímszámok halmaza, $f \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ és $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $x \mid y$;

(c) $A := \{0, 2, 4\}$, $B := \{1, 3, 5\}$, $\rho \subset A \times B$ és $x\rho y$ akkor és csak akkor, ha $xy = 0$;

(d) $A := \{0,2,4\}$, $B := \{1,3,5\}$, $\sigma \subset B \times A$ és $x\sigma y$ akkor és csak akkor, ha $xy = 0$;

(e) $\varphi = \{(a,b)$ |ha a ugyanazokból a számjegyekből áll a tízes számrendszerben, mint $b\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon;

(f) $f \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és xfy akkor és csak akkor, ha $2x = y$;

(g) $f \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és xfy akkor és csak akkor, ha $x^2 = y^2$;

(h) $f \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és xfy akkor és csak akkor, ha $x^2 = y^2$.

1.5.4. Legyen $A = \{0,1\}$. Adja meg az összes $f : A \to A$ függvényt. Ezek közül melyek injektívek, illetve szűrjektívek?

1.5.5 . Az alábbi függvények közül melyek injektívek, illetve szürjektívek? Adja meg azon függvények értékkészletét, amelyek nem szürjektívek!

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3$;

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f_2(x) = x^4$;

(c) $f_3 : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = x^3$;

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \sin x$.

1.5.6. Döntse el, hogy az alábbi függvények közül melyek invertálhatók! Azokban az esetekben amikor a függvény invertálható határozza meg az inverz függvényt!

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2x + 1$;

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$;

(c) $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$;

(d) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f_4(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

1.5.7. Vizsgálja meg, hogy az

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ x-1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény bijektív-e!

1.5.8. Legyen adott az $f : [-\sqrt{3}; \sqrt{3}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 9 - x^4$ függvény.

(a) Határozza meg f egy bijektív leszűkítését!

(b) Írja fel a leszűkített függvény inverzét!

1.5.9. Legyen adott az $f : [0; 9] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ függvény.

(a) Határozza meg f egy bijektív leszűkítését!

(b) Írja fel a leszűkített függvény inverzét!

1.5.10. Legyen adott az $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ függvény.

(a) Határozza meg f egy bijektív leszűkítését!

(b) Írja fel a leszűkített függvény inverzét!

1.5.11. Határozza meg a $\varphi \circ \varphi$, $\psi \circ \psi$, $\varphi \circ \psi$ és $\psi \circ \varphi$ függvényt, ha

(a) $\varphi(x) = x^2$ és $\psi(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ és $\psi(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(c) $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ x, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$ és $\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0 \\ -x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$.

1.6 Halmazok számossága

1.6.1. Adjon meg bijekciót a következő halmazok között!

(a) $\mathbb{R}^+$ és $\mathbb{R}$;

(b) $(0, 1]$ és $[1, +\infty)$;

(c) $[0, 1]$ és $[5, 9]$.

1.6.2. Legyen $\mathcal{A}$ adott halmazrendszer, $f \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, és AfB akkor és csak akkor, ha A és B egyenlő számosságú. Bizonyítsa be, hogy f ekvivalencia-reláció $\mathcal{A}$-n!

1.6.3. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Bizonyítsa be, hogy

(a) $[0, 1) \sim [0, +\infty)$;

(b) $(a, b) \sim (0, 1)$;

(c) $(0, 1) \sim (a, +\infty)$;

(d) $(a, +\infty) \sim (-\infty, -a)$;

(e) $(0, 1) \sim \mathbb{R}$.

1.6.4. Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{R}$ bármely két zárt intervalluma ekvivalens!

1.7 Útmutatások és megoldások

1.1.1. $A = \{0\}$, azaz $A \neq \emptyset$. $B = C = \emptyset$.

1.1.2. A bizonyítás indirekt úton könnyen elvégezhető.

1.1.3.

(a) $A_1 = \{-3, 3\}$;

(b) $A_2 = \{3, 6\}$;

(c) $A_3 = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$;

(d) $A_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(e) $A_5 = \{9, 11, 13\}$;

(f) $A_6 = \{1\}$;

(g) $A_7 = \{-12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4\}$;

(h) $A_8 = \{-3, -2, -1, 0\}$.

1.1.4.

(a) $B_1 = \{0, 1, 2\}$;

(b) $B_2 = \{1\}$;

(c) $B_3 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;

(d) $B_4 = \{1, 2, 3\}$;

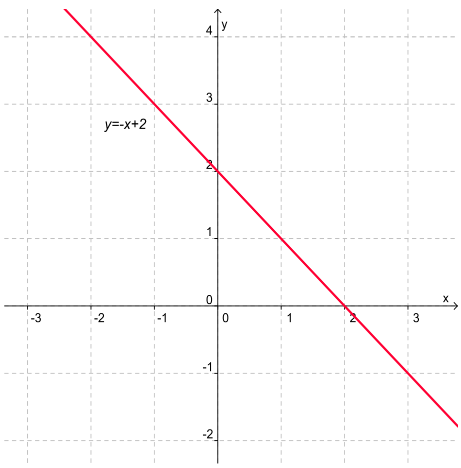
(e) $B_5 = \{1, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$;

(f) $B_6 = \{-5, -6, -7\}$.

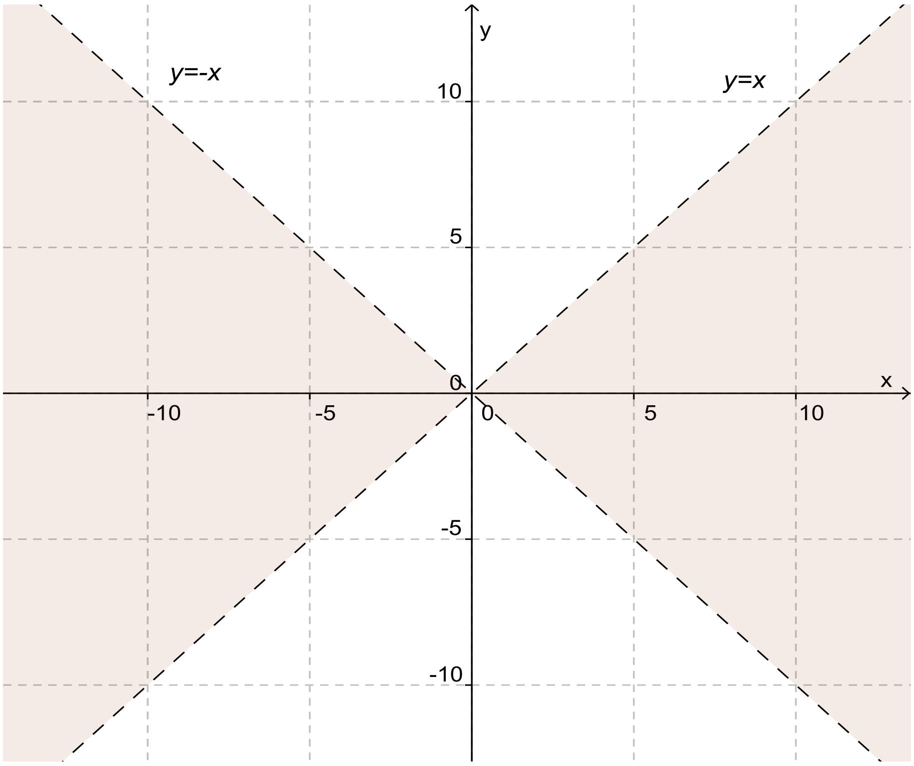
1.1.5. A (b), (c), (f), (g) és (h) állítások igazak.

1.1.6.

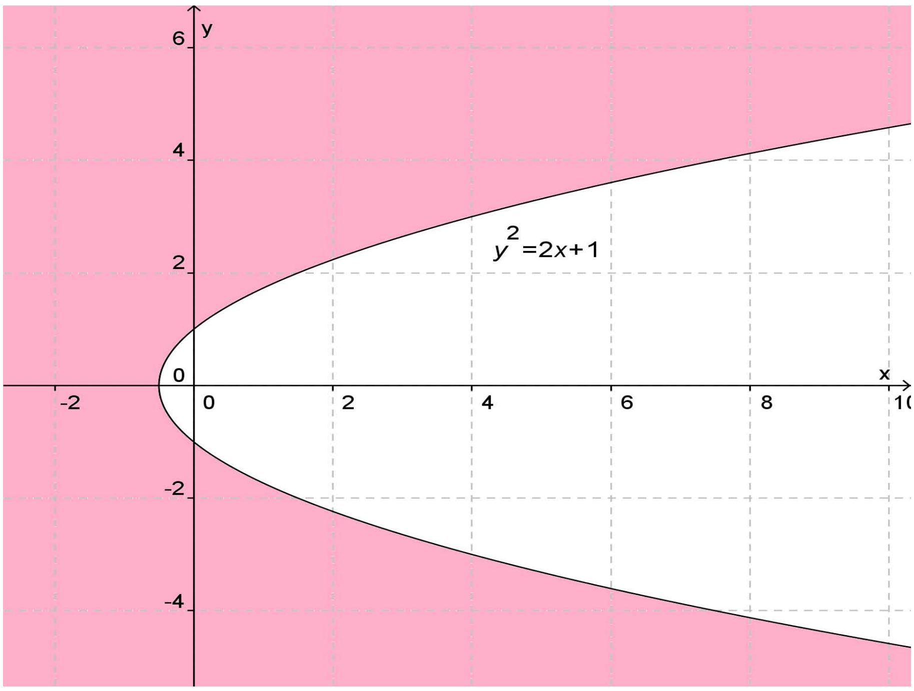
(a) A $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 2 = 0\}$ halmaz elemei az $y = -x + 2$ egyenes pontjai.



(b) A $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$ halmaz elemei az $y = x$ és $y = -x$ egyenesek között találhatóak a Descartes-féle koordináta-rendszerben.

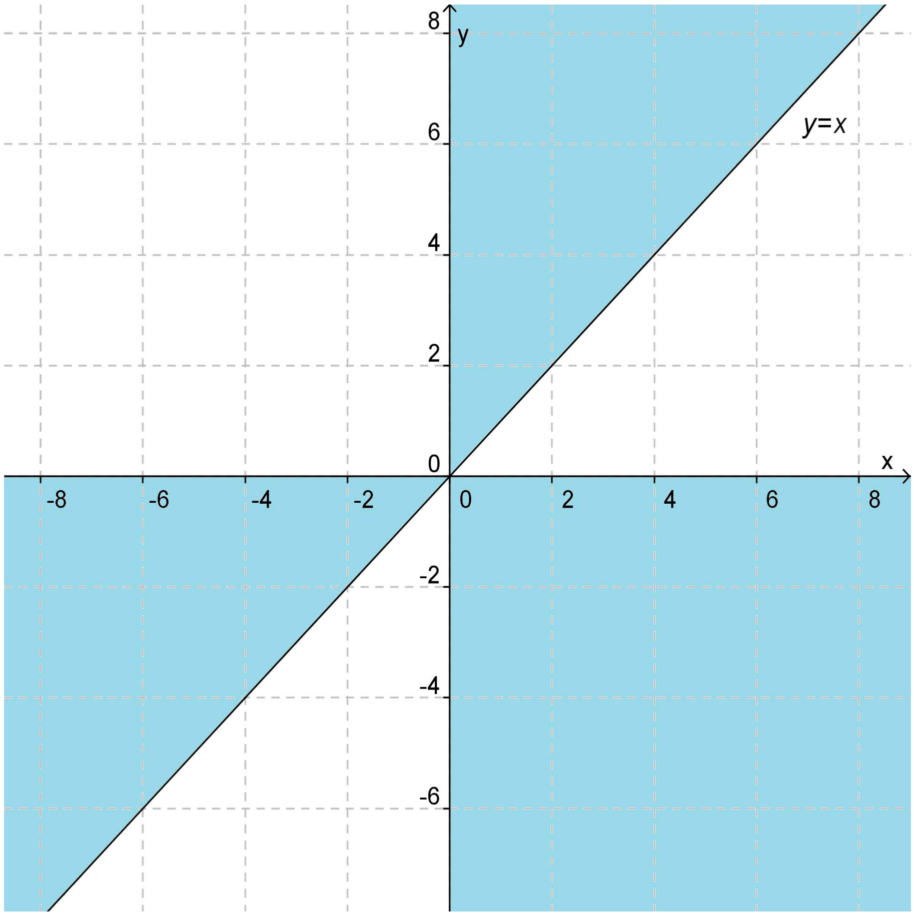


(c) A $C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > 2x + 1\}$ elemei:



A parabola pontjai nem tartoznak hozzá a C_3 halmazhoz.

(d) A $C_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x} > \frac{1}{y}, x \neq 0, y \neq 0\right\}$ halmaznak nincs eleme a II. síknegyedben, továbbá az x-tengely és az y-tengely pontjai sem tartozhatnak a C_4 halmazhoz.



1.2.1.

(a) $A \cup B = (-1, 4)$;

(b) $A \cap B = [1, 2]$;

(c) $A \setminus B = (-1, 1)$;

(d) $B \setminus A = (2, 4)$.

1.2.2. Mivel $B \cap C = \{3\}$, így $A \setminus (B \cap C) = A$. Az összeg második tagja üres halmaz, mert

$$A \setminus B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ páros és } n \geq 4\},$$

és így

$$(A \setminus B) \setminus C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ páros}, n \geq 4, n \leq 2\} = \emptyset.$$

Emiatt $X = A \cup \emptyset = A$.

1.2.3.

(a) Ekkor $A \cup B = [-1, 6]$, $A \cap B = (2, 3]$. Így

$$(A \cup B) \setminus C = \emptyset \qquad \text{és} \qquad C \setminus (A \cap B) = [-4, 2] \cup (3, 7).$$

Tehát

$$X = \emptyset \cup [-4, 2] \cup (3, 7) = [-4, 2] \cup (3, 7).$$

(b) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = [-1, 2] \cup (3, 6]$.

1.2.4.

(a) $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{Z}$ és $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{-1, 0, 1\}$;

(b) $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 3k, k \in \mathbb{N}\}$ és $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$;

(c) $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ és $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{1\}$.

1.2.5. Igaz az (a), (b), (d) és (e) állítás.

1.2.6.

(a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup \emptyset = A$;

(b) $(A \cup B) \cap (B \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$.

1.2.7. $X = (A \cap B) \cup C = \emptyset \cup C = C$.

1.2.8. $Y = B \setminus A$.

1.2.9. Az adott halmazok $\mathbb{R}^2$ egy-egy egyenesével szemléltethetők. Emiatt:

(a) Ha $A \setminus B = A$, akkor az egyenesek párhuzamosak és nem esnek egybe, tehát $a = c$ és $b \neq d$.

(b) Ha $A \setminus B = \emptyset$, akkor az egyenesek egybe esnek, tehát $a = c$ és $b = d$.

(c) Ha $A \cap B = \{(0, 0)\}$, akkor a két egyenes az origóban metszi egymást, így $a \neq c$ és $b = d = 0$.

(d) Ha $\{(1, 0), (0, 1)\} \subset (A \cap B)$, akkor két olyan egybeeső egyenesről van szó, amelyekre

$$a = c = -1 \qquad \text{és} \qquad b = d = 1.$$

1.2.10. A bizonyítások a halmazokra tanult tulajdonságok felhasználásával könnyen elvégezhetők:

(a) $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;

(b) $A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{A \cap B} = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \setminus B) = A \setminus B$;

(c) $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C})=(A\cap\overline{B}\cap A)\cap\overline{C}=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=A\cap\overline{B\cup C}=$
$=A\setminus(B\cup C)$;

(d) $A\setminus(B\cap C)=A\cap\overline{B\cap C}=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;

(e) $\overline{\overline{A\cap B}\cup C}\cup\overline{A\cap\overline{C}}\cup B=(\overline{\overline{A\cap B}}\cap C)\cup(\overline{A}\cup\overline{\overline{C}})\cup B=(A\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cup C)\cup B=\overline{A}\cup B\cup C$,
mivel $(A\cap B\cap\overline{C})\subset B$;

(f) Az egyenlőség bal oldala:
$\overline{A\cap B}\cap\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup B)=\big((\overline{A}\cup\overline{B})\cap A\big)\cup\big((\overline{A}\cup\overline{B})\cap B\big)=$
$=(\overline{A}\cap A)\cup(\overline{B}\cap A)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{B}\cap B)=\emptyset\cup(\overline{B}\cap A)\cup(\overline{A}\cap B)\cup\emptyset=(\overline{B}\cap A)\cup(\overline{A}\cap B)=$
$=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\bigtriangleup B.$
Az egyenlőség jobb oldala:
$\overline{\overline{\overline{A\cap\overline{\overline{B}}}\cap\overline{\overline{A}\cap B}}}=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\bigtriangleup B.$
Az egyenlőség jobb és bal oldalán álló kifejezések tehát egyenlőek, az állítás tehát igaz.

(g) Tekintsük az egyenlőség jobb oldalán álló kifejezést!
$(A\cap B)\triangle(A\cap C)=\big((A\cap B)\setminus(A\cap C)\big)\cup\big((A\cap C)\setminus(A\cap B)\big)=$
$=\big((A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C})\big)\cup\big((A\cap C)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\big)=$
$=\big((A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{C})\big)\cup\big((A\cap C\cap\overline{A})\cup(A\cap C\cap\overline{B})\big)=$
$=\emptyset\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup\emptyset\cup(A\cap C\cap\overline{B})=A\cap\big((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B})\big)=$
$=A\cap\big((B\setminus C)\cup(C\setminus B)\big)=A\cap(B\triangle C).$

1.2.11. Alkalmazzuk a bal oldalon a De Morgan azonosságot, majd a disztributív törvényt:

$$\overline{X\cup A}\cup\overline{X\cup\overline{A}}=(\overline{X}\cap\overline{A})\cup(\overline{X}\cap A)=\overline{X}\cap(\overline{A}\cup A)=B.$$

Ebből $\overline{X}\cap H=B$, azaz $\overline{X}=B$ adódik. Azaz $X=\overline{B}$.

1.2.12. Ha $A=\{x,y,z\}$, akkor

$$\mathcal{P}(A)=\big\{\emptyset,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\big\}.$$

1.2.13. $A=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ és $B=\{\emptyset,\{b\},\{c\},\{b,c\}\}$.

(a) $A\cup B=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\}\}$;

(b) $A\cap B=\{\emptyset,\{b\}\}$;

(c) $A\setminus B=\{\{a\},\{a,b\}\}$;

(d) $B\setminus A=\{\{c\},\{b,c\}\}$;

(e) $A\triangle B=\{\{a\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\}\}$.

1.2.14. Mivel $|\emptyset| = 0$, így $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^0 = 1$, emiatt $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))| = 2^1 = 2$ és $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))| = 2^2 = 4$, azaz:

(a) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$;

(b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$;

(c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\{\emptyset\}\big\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}$.

1.2.15. Legyen H tetszőleges eleme a bal oldalon álló hatványhalmaznak, azaz $H \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Ekkor nyilvánvaló, hogy $H \subset (A \cap B)$. Emiatt $H \subset A$ és $H \subset B$, ahonnan $H \in \mathcal{P}(A)$ és $H \in \mathcal{P}(B)$ adódik, azaz $H \in (\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B))$. Tehát

$$\mathcal{P}(A \cap B) \subset (\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)).$$

A fordított irányú tartalmazás a felhasznált kifejezések páronkénti ekvivalenciája miatt analóg módon adódik, tehát

$$(\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$$

szintén teljesül, azaz

$$\mathcal{P}(A \cap B) = (\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)).$$

1.3.1. $|(A \times B) \cap (B \times A)| = 9$

1.3.2. Ha $A = B$, akkor

$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \times A) \cap (A \times A) = A \times A$,

$(A \times B) \setminus (B \times A) = (A \times A) \setminus (A \times A) = \emptyset$.

1.3.3. Ha $A = \{1; 2; 3\}$ és $B = \{2; 3; 4\}$, akkor

$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4\}, \quad A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}, \quad A \cap B = \{2; 3; \}.$$

Tehát:

(a) $(A \setminus B) \times (B \setminus A) = \{(1, 4)\}$;

(b) $(A \cup B) \times (A \cap B) = \{(1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3); (3, 2); (3, 3); (4, 2); (4, 3)\}$;

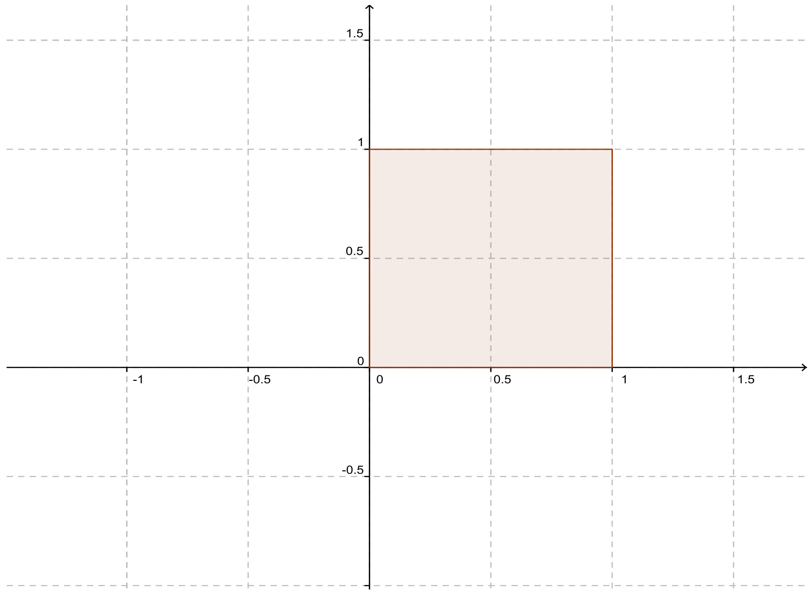
(c) $(A \setminus B) \times (B \cap A) = \{(1, 2); (1, 3)\}$;

(d) $(B \setminus A) \times (B \cup A) = \{(4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}$.

1.3.4. Az (a) és (c) esetben léteznek a feltételnek megfelelő A és B halmazok, míg a (b) és (d) esetben nem (pl. a szorzathalmaz számossága legalább 2 elemű halmazok esetén nem lehet prímszám).

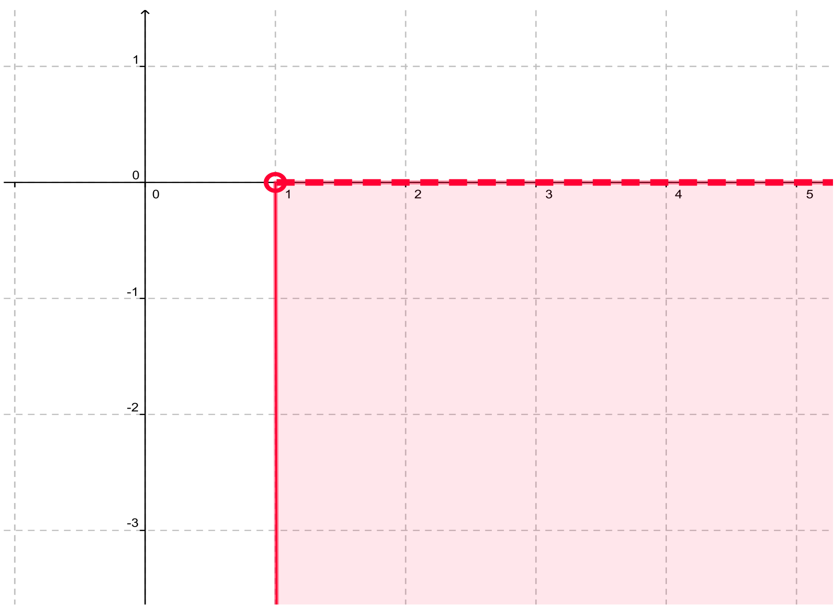
1.3.5.

(a) $[0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$;



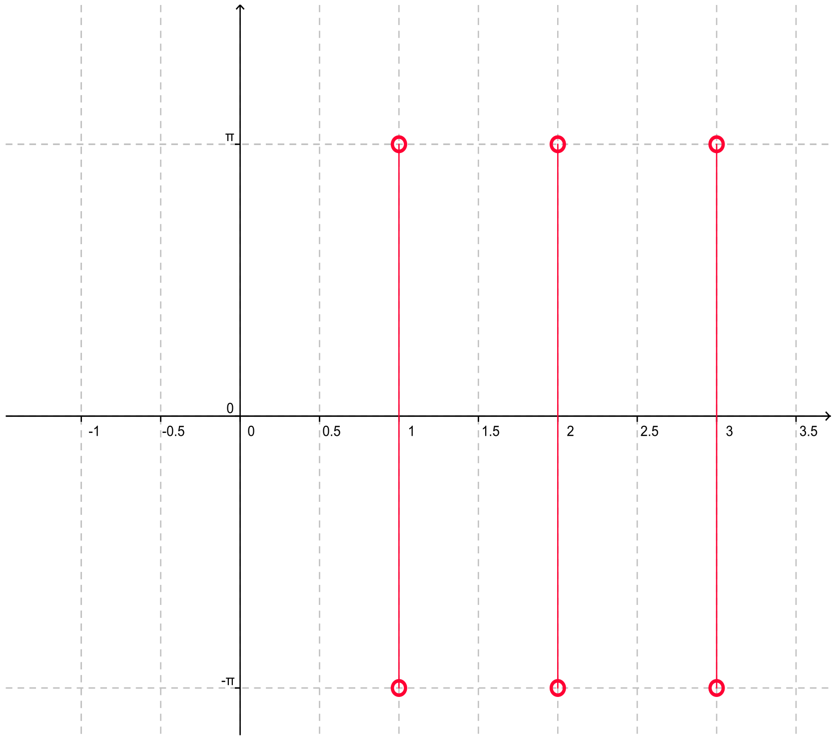
(b) $\{0\} \times (1, +\infty) = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < y\}$. A keresett halmaz egy olyan félegyenes, amely a $(0,1)$ pontból indul és az y tengely pozitív felével egyirányú. A $(0,1)$ pont nem eleme a halmaznak.

(c) $[1, +\infty) \times (-\infty, 0)$;



(d) A $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ szorzathalmaz a sík egész koordinátájú pontjainak halmaza.

(e) Az $\mathbb{N} \times (-\pi, \pi)$ halmaz megszámlálhatóan végtelen párhuzamos nyílt szakaszból áll.



(f) $\mathbb{R} \times \emptyset = \emptyset$.

1.3.6. (a), (d), (e) előáll, a többi nem.

1.4.1. A kért halmazok megadásához célszerű először a relációt megadni halmazként.

(a) $\rho = \{(4,3);((5,2);(9,-2)\}$, tehát

$$\mathcal{D}_\rho = \{4;5;9\}, \qquad \mathcal{R}_\rho = \{3;2;-2\}, \qquad \rho^{-1} = \{(3,4);(2,5);(-2,9)\};$$

(b) $\sigma = \{(0,0);((0,3);(0,5);(1,0);(2,0)\}$, tehát

$$\mathcal{D}_\sigma = \{0;1;2\}, \quad \mathcal{R}_\sigma = \{0;3;5\}, \quad \sigma^{-1} = \{(0,0);(3,0);(5,0);(0,1);(0,2)\};$$

Megjegyzés: Látható, hogy $\mathcal{D}_\sigma = A$, $\mathcal{R}_\sigma = B$, azonban $\sigma \neq A \times B$.

1.4.2. Adjuk meg a vizsgált relációkat halmazként!

$$\rho_1 = \{(1,3);(1,5);(1,7);(3,5);(3,7);(5,7)\}, \quad \rho_3 = \rho_1 \cup \{(1,1);(3,3);(5,5);(7,7)\}$$

és

$$\rho_2 = \{(3,1);(5,1);(5,3);(7,1);(7,3);(7,5)\}, \quad \rho_4 = \rho_2 \cup \{(1,1);(3,3);(5,5);(7,7)\}.$$

(a) $\mathcal{D}_{\rho_1} = \{1, 3, 5\}$, $\mathcal{D}_{\rho_2} = \{3, 5, 7\}$, $\mathcal{D}_{\rho_3} = \mathcal{D}_{\rho_4} = A$,

$\mathcal{R}_{\rho_1} = \{3, 5, 7\}$, $\mathcal{R}_{\rho_2} = \{1, 3, 5\}$, $\mathcal{R}_{\rho_3} = \mathcal{R}_{\rho_4} = A$.

(b) $\rho_1 = \rho_2^{-1} \subseteq A \times A$, $\rho_1 \subset \rho_3$ és $\rho_2 \subset \rho_4$.

(c) $\rho_2 \cup \rho_3 = A \times A$.

1.4.3.

(a) $\mathcal{D}_\rho = \{1; 2; 3; 4; 5\} = A$, $\mathcal{R}_\rho = \{1; 2; 3; 4; 5\} = A$ és

$$\rho^{-1} = \{(2, 1); (3, 2); (1, 3); (5, 4); (4, 5)\},$$

továbbá $\mathcal{D}_\sigma = \{1; 2; 3; 4\}$, $\mathcal{R}_\sigma = \{1; 2; 4; 5\}$ és

$$\sigma^{-1} = \{(1, 3); (2, 1); (4, 1); (4, 2); (5, 4)\}.$$

(b) Tekintsük először a σ^2 relációt!

$$\sigma^2 = \{((1, 4)); (1, 5); (2, 5); (3, 2); (3, 4)\}$$

Ennek megfelelően:

$$\sigma^2 \circ \rho^{-1} = \{(1, 2); (1, 4); (2, 4); (2, 5); (3, 5)\}.$$

1.4.4. Határozzuk meg először a σ^2 relációt!

$$\sigma^2 = \{(1, 3); (2, 5); (3, 5); (4, 3); (5, 1)\}$$

Mivel $\sigma^3 = \sigma^2 \circ \sigma$, így

$$\sigma^3 = \{(1, 1); (2, 3); (3, 3); (4, 1); (5, 5)\}.$$

Tehát $\sigma \cap \sigma^3 = \emptyset$.

1.4.5.

(a) $(\sigma \circ \rho)^{-1}$ meghatározásához először adjuk meg a $\sigma \circ \rho$ relációt!

$$\sigma \circ \rho = \{(1, 4); (2, 1); (3, 5); (4, 4); (5, 5)\}$$

Így:

$$(\sigma \circ \rho)^{-1} = \{(4, 1); (1, 2); (5, 3); (4, 4); (5, 5)\}.$$

(b) Határozzuk meg a $\rho \circ \sigma$ relációt!

$$\rho \circ \sigma = \{(1, 1); (2, 5); (3, 2); (4, 2); (5, 5)\}$$

A feladat (a) részében már meghatároztuk a $\sigma \circ \rho$ relációt, tehát:

$$(\sigma \circ \rho) \cap (\rho \circ \sigma) = \{(5, 5)\}.$$

1.4.6. Az $A = \{a, b, c\}$ halmazon az alábbi öt ekvivalenciareláció adható meg:

$R_1 = \{(a,a); (b,b); (c,c)\}$; $R_2 = \{(a,a); (b,b); (c,c); (a,b); (b,a)\}$;

$R_3 = \{(a,a); (b,b); (c,c); (a,c); (c,a)\}$; $R_4 = \{(a,a); (b,b); (c,c); (b,c); (c,b)\}$;

$R_5 = A \times A$.

1.4.7.

(a) ρ_1 ekvivalenciareláció.

(b) ρ_2 ekvivalenciareláció.

(c) ρ_3 ekvivalenciareláció.

(d) ρ_4 parciális rendezés. A ρ_4 reláció nem rendezés, mert pl. $(3,5) \notin \rho_4$ és $(5,3) \notin \rho_4$, azaz ρ_4 nem lineáris.

(e) ρ_5 reflexív, tranzitív, nem antiszimmetrikus (mert pl. $(3,-3) \in \rho_5$ és $(-3,3) \in \rho_5$, de $3 \neq -3$), nem szimmetrikus, nem lineáris reláció.

(f) ρ_6 ekvivalenciareláció.

(g) ρ_7 parciális rendezés.

(h) ρ_8 ekvivalenciareláció.

(i) ϕ ekvivalenciareláció.

(j) ψ parciális rendezés.

1.4.8. A $(\sigma \cap \rho) \subset A \times A$, illetve a $(\sigma \cup \rho) \subset A \times A$ relációkat az alábbiak szerint értelmezzük ($x, y \in A$):

$$x(\sigma \cap \rho)y \;\Leftrightarrow\; x\sigma y \text{ és } x\rho y,$$

illetve

$$x(\sigma \cup \rho)y \;\Leftrightarrow\; x\sigma y \text{ vagy } x\rho y.$$

(a) Legyenek σ és ρ szimmertikus relációk. Ekkor bármely $(x,y) \in \sigma$ esetén $(y,x) \in \sigma$ is teljesül, továbbá bármely $(r,t) \in \rho$ esetén $(t,r) \in \rho$ is fennáll. Tekintsünk egy tetszőleges (a,b) elempárt a $(\sigma \cap \rho)$ relációból. Az értelmezés szerint ekkor $(a,b) \in \sigma$ és $(a,b) \in \rho$ egyaránt fennáll. Mivel σ és ρ szimmetrikusak, így $(b,a) \in (\sigma \cap \rho)$ azonnal adódik.

Legyen most $(c,d) \in (\sigma \cup \rho)$ tetszőleges. A definíció szerint $c\sigma d$ vagy $c\rho d$ teljesül. Ha $c\sigma d$, akkor σ szimmetriája miatt $d\sigma c$ is teljesül, így $(d,c) \in (\sigma \cup \rho)$. Ha $(c,d) \notin \sigma$, akkor $c\rho d$ teljesül. Mivel ρ szimmetrikus, ezért $d\rho c$ is fennáll, emiatt pedig $((d,c) \in (\sigma \cup \rho)$, azaz $(\sigma \cup \rho)$ szimmetrikus.

(b) Legyen $(x,y) \in \rho$ és $(y,z) \in \rho$. ρ tranzitivitása miatt $(x,z) \in \rho$ adódik. Az inverz reláció definíciója szerint ekkor

$$(y,x) \in \rho^{-1}, \qquad (z,y) \in \rho^{-1}, \qquad (z,x) \in \rho^{-1}.$$

Tehát $(z,y) \in \rho^{-1}$ és $(y,x) \in \rho^{-1}$ esetén $(z,x) \in \rho^{-1}$ is fennáll, azaz ρ tranzitivitásából következik a ρ^{-1} reláció tranzitivitása.

(c) Legyen $(x,y) \in (\rho \cap \sigma)$ és $(y,z) \in (\rho \cap \sigma)$. Az értelmezés szerint ekkor $(x,y) \in \rho$, $(y,z) \in \rho$, továbbá $(x,y) \in \sigma$, $(y,z) \in \sigma$. ρ és σ tranzitivitása miatt $(x,z) \in \rho$ és $(x,z) \in \sigma$ teljesül, következésképpen $(x,z) \in (\rho \cap \sigma)$, tehát $(\rho \cap \sigma)$ tranzitív.

1.4.9. Legyen $(a,d) \in H \circ (G \circ F)$. Ekkor létezik olyan $c \in C$, hogy $(c,d) \in H$ és $(a,c) \in (G \circ F)$. Ez utóbbi miatt létezik olyan $b \in B$, hogy $(a,b) \in F$ és $(b,c) \in G$. Viszont $(c,d) \in H$ és $(b,c) \in G$ miatt $(b,d) \in (H \circ G)$, így $(a,d) \in (H \circ G) \circ F$.

Megfordítva: Ha $(a,d) \in (H \circ G) \circ F$, akkor létezik $b \in B$, hogy $(a,b) \in F$ és $(c,d) \in (H \circ G)$. Emiatt létezik olyan $c \in C$, hogy $(b,c) \in G$ és $(c,d) \in H$. Így $(a,c) \in (G \circ F)$, ahonnan adódik, hogy $(a,d) \in H \circ (G \circ F)$.

1.4.10.

(a) X-nek nincs legkisebb eleme, $\max X = 1$.

(b) X alsó korlatainak halmaza: $(-\infty, 0]$; X felső korlatainak halmaza: $[1, +\infty)$, $\sup_{\mathbb{R}} X = 1$, $\inf_{\mathbb{R}} X = 0$.

1.4.11.

(a) $\sup_{\mathbb{R}} X = \dfrac{1}{2}$, $\inf_{\mathbb{R}} X = 0$.

(b) $\sup_{\mathbb{R}} X = 1$, $\inf_{\mathbb{R}} X = -1$.

(c) $\sup_{\mathbb{R}} X = 0$, $\inf_{\mathbb{R}} X = -5$.

1.4.12. Tekintsük például az

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \mid -3 \le q \le 3\} \subset \mathbb{Q}$$

halmazt és a

$$B = \{q \in \mathbb{Q} \mid -\sqrt{3} \le q \le \sqrt{3}\} \subset A$$

végtelen részhalmazt. Ekkor $\min A = -3$, $\max A = 3$, de $\inf_A B$ és $\sup_A B$ nem létezik, hiszen a B halmaz esetén az alsó korlátok halmazának nincs maximális eleme, a felső korlátok halmazának pedig nincs minimális eleme.

1.5.1. Az (a), (c) és (d) relációk függvények, mert a relációkhoz tartozó rendezett elempárok első komponensei egymástól különbözőek. A (b) és (e) relációk nem függvények.

1.5.2. A φ_1, a φ_3 és a φ_6 relációk függvények.

1.5.3.

(a) ρ nem függvény, mert pl. $(2,4) \in \rho$ és $(2,6) \in \rho$ is fennáll.

(b) f függvény, ugyanis bármely $p_1, p_2 \in P$ esetén, ha $p_1 | p_2$, akkor $p_1 = p_2$, azaz f a P halmaz identikus függvénye, amely nyilvánvalóan invertálható.

(c) $\rho = \{(0,1); (0,3); (0,5)\}$, tehát ρ nem függvény.

(d) $\sigma = \{(1,0); (3,0); (5,0)\}$, tehát σ függvény.

(e) φ nem függvény, mert pl. $(38,38) \in \varphi$ és $(38,83) \in \varphi$.

(f) f invertálható függvény.

1.5.4. Az alábbi négy függvény adható meg:

$$f_1 = \{(0,0); (1,1)\}, \qquad f_2 = \{(0,1); (1,0)\},$$

$$f_3 = \{(0,0); (1,0)\}, \qquad f_4 = \{(0,1); (1,1)\}.$$

Az f_1 és f_2 függvények injektívek és szűrjektívek, azaz bijektívek. f_3 és f_4 nem injektív és nem szűrjektív függvények.

1.5.5.

(a) Az f_1 függvény injektív és szűrjektív, azaz bijektív.

(b) Az f_2 függvény nem injektív, de szűrjektív.

(c) Az f_3 függvény injektív, de nem szűrjektív. $\mathcal{R}_{f_3} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

(d) Az f_4 függvény nem injektív és nem szűrjektív. $\mathcal{R}_{f_4} = [-1, 1]$.

1.5.6.

(a) Az f_1 függvény bijektív, azaz invertálható.

$$f_1^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_1^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

(b) Az f_2 függvény nem bijektív, így nem létezik inverze.

(c) Az f_3 függvény bijektív, tehét van inverze.

$$f_3^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad f_3^{-1}(x) = \frac{1}{x}.$$

(d) Az f_4 függvény bijektív, azaz invertálható.

$$f_4^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f_4^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

1.5.7. A függvény nem injektív, mert

$$f(1) = f(2) = 1.$$

Így a függvény nem bijektív.

1.5.8.

(a) Az f függvény egy bijektív leszűkítése:

$$f|_{[0,+\infty)} : [0, +\infty) \to (-\infty, 9], \qquad f|_{[0,+\infty)}(x) = 9 - x^4.$$

(b) A leszűkített függvény inverze:

$$(f|_{[0,+\infty)})^{-1} : (-\infty, 9] \to [0, +\infty), \qquad (f|_{[0,+\infty)})^{-1}(x) = \sqrt[4]{9 - x}.$$

1.5.9.

(a) Az f függvény egy bijektív leszűkítése:

$$f|_{[0,9]} : [0, 9] \to [-1, 2], \qquad f|_{[0,9]}(x) = \sqrt[3]{x - 1}.$$

(b) A leszűkített függvény inverze:

$$(f|_{[0,9]})^{-1} : [-1, 2] \to [0, 9], \qquad (f|_{[0,9]})^{-1}(x) = x^3 + 1.$$

1.5.10.

(a) Az f függvény egy bijektív leszűkítése:

$$f|_{[0,1]} : [0, 1] \to [0, 1], \qquad f|_{[0,1]}(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

(b) A leszűkített függvény inverze:

$$(f|_{[0,1]})^{-1} : [0, 1] \to [0, 1], \qquad (f|_{[0,1]})^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

1.5.11.

(a) $(\varphi \circ \varphi)(x) = x^4$, $(\psi \circ \psi)(x) = 2^{2^x}$, $(\varphi \circ \psi)(x) = 2^{2x} = 4^x$, $(\psi \circ \varphi)(x) = 2^{x^2}$.

(b) $(\varphi \circ \varphi)(x) = x$, $(\psi \circ \psi)(x) = \cos(\cos x)$, $(\varphi \circ \psi)(x) = \dfrac{1}{\cos x}$,
$(\psi \circ \varphi)(x) = \cos \dfrac{1}{x}$.

(c) $(\varphi \circ \varphi)(x) = \varphi(x)$, $(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(x)$, $(\psi \circ \psi)(x) = (\varphi \circ \psi)(x) = 0$.

1.6.1.

(a) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$;

(b) $g : (1, 0] \to [1, +\infty)$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$;

(c) $h : [0, 1] \to [5, 9]$, $h(x) = 4x + 5$.

1.6.2. f reflexív, mert AfA nyilvánvalóan bármely $A \in \mathcal{A}$ esetén fennáll. f szimmetrikus is, hiszen ha bármely $A, B \in \mathcal{A}$ esetén AfB, azaz $A \sim B$ fennáll, akkor $B \sim A$ is teljesül, azaz BfA következik. f tranzitivitásának megmutatásához tekintsünk olyan $A, B, C \in \mathcal{A}$ halmazokat, amelyekre AfB és BfC. Ekkor $A \sim B$ és $B \sim C$ miatt $A \sim C$ azonnal adódik, azaz AfC teljesül. f mindezek értelmében ekvivalenciareláció.

1.6.3.

(a) $f_1 : [0, 1) \to [0, +\infty)$, $\qquad f_1(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

(b) $f_2 : (0, 1) \to (a, b)$, $\qquad f_2(x) = a + (b - a)x$;

(c) $f_3 : [0, 1) \to (a, +\infty)$, $\qquad f_3(x) = a - 1 + \dfrac{1}{x}$;

(d) $f_4 : (a, +\infty) \to (-\infty, -a)$, $\qquad f_4(x) = -x$;

(e) $f_5 : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $\qquad f_5(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 1}$.

1.6.4. Legyen $a < b$, $c < d$ tetszőleges valós számok. $[a, b] \sim [c, d]$, mert az

$$f : [a, b] \to [c, d], \qquad f(x) = \frac{d - c}{b - a}x + \frac{cb - ad}{b - a}$$

függvény bijekció.

2 A valós számok halmaza

2.1 Indirekt bizonyítások

2.1.1. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{5}$ irracionális szám!

2.1.2. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{35}$ irracionális szám!

2.1.3. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{45}$ irracionális szám!

2.1.4. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ irracionális szám!

2.1.5. Igazoljuk, hogy négy irracionális szám között mindig van három, amelyeknek az összege is irracionális!

2.1.6. Lehet e a 3 - nem feltétlenül különböző - egész kitevős hatványai közül ezernek az összege éppen 3333?

2.1.7. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\underbrace{1111\ldots1}_{n}$, azaz n darab 1-esből álló szám prím, akkor n is prím. Igaz-e az állítás megfordítása?

2.2 A teljes indukció

2.2.1. Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.2.2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőségeket!

(a) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;

(b) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$;

(c) $1^2-2^2+3^2-...+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$;

(d) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$;

(e) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$;

(f) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$;

(g) $1+2+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1$;

(h) $1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + ... + n! \cdot n = (n+1)! - 1$;

(i) $1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - ... - \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{n!}$.

2.2.3. Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy az alábbi egyenlőtlenségek igazak!

(a) $2^n > n^2$, ha $n \geq 5$ és $n \in \mathbb{N}$;

(b) $3^n > n^3$, ha $n \geq 4$ és $n \in \mathbb{N}$;

(c) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1$, ha $n \geq 2$ és $n \in \mathbb{N}$;

(d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, ha $n \geq 2$ és $n \in \mathbb{N}$;

(e) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, ha $n \geq 2$ és $n \in \mathbb{N}$;

(f) $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}$, ha $n \geq 2$ és $n \in \mathbb{N}$.

2.2.4. Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy az alábbi oszthatósági tulajdonságok teljesülnek!

(a) $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$;

(b) $3 \mid 4^n + 5$;

(c) $9 \mid 4^n + 15n - 1$;

(d) $5 \mid 2^{4n+1} + 3$;

(e) $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

(f) $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$;

(g) $120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$.

2.2.5. Bizonyítsa be, hogy n darab egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre osztja!

2.2.6. Tegyük fel, hogy $a + \frac{1}{a}$ egész. Bizonyítsa be, hogy $a^n + \frac{1}{a^n}$ is egész ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$)!

2.2.7. Tudjuk, hogy $a + b = 2$ és $a^2 + b^2 = 4$. Bizonyítsa be, hogy

$$a^n + b^n = 2^n,$$

ha $n > 2$ és $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$!

2.2.8. Bizonyítsa be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az alábbi egyenlőség!

$$(2+1)\left(2^2+1\right) \; ... \; \left(2^{2^n}+1\right) = 2^{2^{n+1}} - 1$$

2.2.9. Igazoljuk a

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \; ... \; \cdot \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x}, \qquad (\sin x \neq 0, \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

trigonometrikus azonosságot!

2.3 A binomiális tétel

Az alábbi feladatokban a hatványok binomiális tétel szerinti kifejtésében k-adik tagon ($k = 0, 1, \ldots, n$) azt a tagot értjük, amelynek együtthatója $\binom{n}{k}$.

2.3.1. Mutassa meg, hogy $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ és $k \leq n$ esetén fennáll az

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

összefüggés!

2.3.2. Bizonyítsa be teljes indukcióval a Newton-féle binomiális tételt!

2.3.3. Az $(1 + \sqrt{2})^n$ kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésének második tagja 110. Mekkora a kifejtés utolsó előtti tagja?

2.3.4. Fejtse ki a binomiális tétel alapján az $(x^2 - 2y^3)^5$ hatványt!

2.3.5. Határozza meg az $\left(\frac{a}{x} - \sqrt{x}\right)^{16}$ hatvány binomiális tétel szerinti kifejtésének középső tagját!

2.3.6. Írja fel a $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ hatvány binomiális tétel szerinti kifejtésének negyedik tagját!

2.3.7. Számítsa ki a $(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})^n$ hatványkitevőjét, ha a binomiális tétel szerinti kifejtésének második tagjában $\sqrt{x^5}$ szerepel!

2.3.8. Mekkora x értéke, ha a $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^6$ kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésének középső tagja $\frac{5}{9}$? Oldja meg a feladatot Pascal-háromszög felhasználásával is!

2.3.9. Számítsa ki az $E(x) = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{12}$ kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésének azon tagját, amely nem tartalmazza x-et!

2.3.10. Adott $F(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$. Határozza meg binomiális tétel szerinti kifejtésének azon tagját, amelyik nem tartalmazza x-et!

2.3.11. A $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{x}\right)^{12}$ hatvány binomiális tétel szerinti kifejtésének hányadik tagjában lesz x együtthatója 7?

2.3.12. A $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{18}$ hatvány binomiális tétel szerinti kifejtésének hányadik tagjában lesz x és y kitevője egyenlő egymással?

2.3.13. Számítsa ki a $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ összeget!

2.3.14. Az $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^m$ binomiális tétel szerinti kifejtésében az együtthatók összege 128. Írja fel a kifejtésnek azt a tagját, amelyben x ötödik hatványon szerepel!

2.3.15. Határozza meg az alábbi összegeket!

(a) $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+...+n\binom{n}{n}$;

(b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+...+(-1)^n\binom{n}{n}$;

(c) $\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+...+(n+1)\binom{n}{n}$;

(d) $\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}+...+(n-1)\binom{n}{n}$.

2.4 Nevezetes egyenlőtlenségek

2.4.1. Igazolja a *Bernoulli*-egyenlőtlenséget! Mutassa meg, hogy ha $n\in\mathbb{N}$ és $x>-1$, akkor

$$(1+x)^n\geq 1+nx,$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha vagy $n=1$ vagy ($n>1$ esetén) $x=0$.

2.4.2. Igazolja, hogy bármely $a,b\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ esetén teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek!

(a) $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$;

(b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$.

2.4.3. Bizonyítsa be, hogy az azonos kerületű téglalapok közül a négyzet a legnagyobb területű!

2.4.4. Bizonyítsuk be, hogy bármely derékszögű háromszög befogóinak összege sosem nagyobb, mint átfogójának $\sqrt{2}$-szerese!

2.4.5. Bizonyítsa be, hogy bármely α hegyesszögre

$$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha\geq 2.$$

2.4.6. Bizonyítsa be, hogy minden olyan pozitív a,b számra, amelyre

$$a+b=1,$$

igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}.$$

2.4.7. Bizonyítsa be, hogy bármely három $a, b, c \in \mathbb{R}$ számra érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

2.4.8. Milyen x értékre lesz az $\dfrac{a+bx^4}{x^2}$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ tört értéke a legkisebb?

2.4.9. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Bizonyítsa be, hogy

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}.$$

2.4.10. Igazolja a *Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz*-féle egyenlőtlenséget, azaz mutassa meg, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ esetén fennáll a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right)$$

egyenlőtlenség!

2.4.11. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Bizonyítsa be, hogy

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}.$$

2.4.12. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $x_i, p_i \in \mathbb{R}^+$ $(i = 1, 2, ..., n)$ számok esetén érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$(p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n)^2 \leq (p_1 + p_2 + ... + p_n)(p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + ... + p_nx_n^2).$$

2.4.13. Igazolja, hogy tetszőleges $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3\right)^2 \leq \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{6}x_3^2.$$

2.5 Útmutatások és megoldások

2.1.1. Tegyük fel, hogy $\sqrt{5}$ racionális. Ekkor felírható két egész szám hányadosaként:

$$\sqrt{5} = \frac{p}{q},$$

ahol $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ és $(p, q) = 1$. A felírt egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emelve, majd q^2-tel átszorozva kapjuk, hogy

$$5q^2 = p^2.$$

Vizsgáljuk meg a két oldalon álló számok prímtényezős felbontását! Mivel négyzetszám prímtényezős felbontásában minden kitevő páros, így a jobb oldalon 5 páros kitevőjű hatványa áll, a bal oldalon pedig páratlan. Ez ellentmond a számelmélet alaptételének, tehát ellentmondásra jutottunk. $\sqrt{5}$ nem racionális.

2.1.2. A bizonyítás a 2.1.1. állítás igazolásához hasonló, itt is vizsgálhatjuk az 5 kitevőjét a két oldalon.

2.1.3. A bizonyítás a 2.1.1. és a 2.1.2. állítások igazolásához hasonló, itt is vizsgálhatjuk az 5 kitevőjét a két oldalon.

2.1.4. Itt az indirekt feltevés és a négyzetre emelés után $\sqrt{10}$-ről kell az előzőekhez hasonlóan igazolni, hogy irracionális.

2.1.5. Tegyük fel, hogy nincs, azaz bármely három irracionális szám összege racionális. Jelölje a négy irracionális számot a, b, c és d. A feltétel szerint

$$\begin{aligned} a + b + c &= r_1, \\ a + c + d &= r_2, \\ a + b + d &= r_3, \\ b + c + d &= r_4, \end{aligned}$$

ahol $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{Q}$. Négy racionális szám összege racionális, tehát

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 3(a + b + c + d) = r_5, \qquad (r_5 \in \mathbb{Q}).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$a + b + c + d = \frac{r_5}{3} = r_6$$

szintén racionális szám. Ekkor

$$a + b + c + d = r_1 + d = r_6,$$

azaz

$$d = r_6 - r_1,$$

tehát $d \in \mathbb{Q}$, mert előáll két racionális szám különbségeként. Ellentmondásra jutottunk. Tehát négy irracionális szám között mindig van három, amelyeknek az összege is irracionális.

2.1.6. Tegyük fel, hogy lehetséges a feladat állítása. Jelölje a legkisebb kitevőjű hatványt 3^a, $(a \in \mathbb{Z})$. A felírásban szereplő összes többi hatvány

$$3^a \cdot 3^b, \qquad (b \in \mathbb{N})$$

alakú. A hatványok összege megegyezik egy szorzattal, amelynek az egyik tényezője 3^a, a másik pedig 1000 darab páratlan szám összege, ami páros. Ha a nem negatív, akkor a szorzat páros szám, mert egyik tényezője páros. Ha a negatív egész, akkor egy páros számot osztunk egy páratlan számmal, tehát eredményül vagy páros számot kapunk, vagy nem egész számot. Így ellentmondásra jutottunk, mert 3333 nem lehet a hatványok összege.

2.1.7. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy n nem prím. Ekkor $n = 1$ vagy $n = ab$, ahol $a > 1$, $b > 1$. $n = 1$-re a szám nem prím, tehát az állítás erről nem mond semmit. Ha $n = ab$, ahol $a > 1$, $b > 1$, akkor osszuk az n darab 1-es számjegyből álló számot b darab olyan számra, amelyek mindegyike éppen a darab 1-esből áll.

$$\overbrace{\underbrace{111\ldots1}_{a}\underbrace{111\ldots1}_{a}\ldots\underbrace{111\ldots1}_{a}}^{n}$$

Az a darab 1-esből álló számot jelölje t $(t > 1)$:

$$t = \underbrace{111\ldots1}_{a}.$$

Az eredeti n jegyű szám felírható a következő alakban:

$$\underbrace{111\ \ldots\ 1}_{n} = t\left(1 + 10^a + 10^{2a} + \ \ldots\ + 10^{a(b-1)}\right),$$

ahol a második tényező is nyilvánvalóan nagyobb, mint 1. A vizsgált szám tehát nem lehet prím, mert két egynél nagyobb természetes szám szorzata. Ellentmondásra jutottunk, ezért az eredeti állítás igaz.
A megfordítás nem igaz, mert pl. $n = 3$ esetén $111 = 3 \cdot 37$.

2.2.1. Teljes indukcióval bizonyítunk.

(1) Könnyű ellenőrizni, hogy az állítás $n = 1$ esetén igaz.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1)$-re. Bizonyítandó, hogy

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Tekintsük a bizonyítandó állítás bal oldalán álló kifejezést és alkalmazzuk az indukciós feltevést!

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Az állítást tehát igazoltuk, mert a bizonyítandó állítás jobb oldalán álló összefüggéshez jutottunk.

2.2.2. Teljes indukcióval bizonyítjuk a feladat összes állítását.

(a) Három lépésben igazoljuk az állítást.

(1) Könnyű ellenőrizni, hogy az állítás $n = 1$ esetén igaz.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Tekintsük a bizonyítandó állítás bal oldalán álló kifejezést és alkalmazzuk az indukciós feltevést!

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Az állítást igazoltuk, mert a bizonyítandó állítás jobb oldalán álló összefüggéshez jutottunk.

(b) Három lépésben bizonyítunk.

(1) Könnyű ellenőrizni, hogy az állítás $n = 1$ esetén igaz.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + ... + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$$

Tekintsük a bizonyítandó állítás bal oldalán álló kifejezést és alkalmazzuk az indukciós feltevést!

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) =$$

$$= (k+1)(k+2)\left(\frac{1}{3}k + 1\right) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$$

Az állítást igazoltuk, mert a bizonyítandó állítás jobb oldalán álló összefüggéshez jutottunk.

(c) Ebben az esetben is három lépésben bizonyítunk.

(1) Könnyen ellenőrizhető, hogy az állítás $n = 1$ esetén igaz.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Alkalmazzuk az indukciós feltevést!

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 =$$

$$= (-1)^k\frac{2(k+1)^2 - k(k+1)}{2} = (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Az állítás igaz.

(d) Az

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

egyenlőséget kell igazolni, amely az előző bizonyítások mintájára könnyen elvégezhető.

(e) Az

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

egyenlőséget kell igazolni. Teljes indukcióval három lépésben könnyen igazolható az állítás.

(f) Három lépésben teljes indukcióval bizonyítunk.

(1) Könnyű ellenőrizni, hogy az állítás $n = 1$ esetén igaz.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)...\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2k+2}.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)...\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \frac{k+3}{2k+4}.$$

Tekintsük a bizonyítandó állítás bal oldalán álló kifejezést és alkalmazzuk az indukciós feltevést!

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)...\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \frac{k+2}{2k+2} \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) =$$

$$= \frac{k+2}{2(k+1)} \cdot \frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2} = \frac{k^2+4k+3}{2(k+1)(k+2)} = \frac{k+3}{2k+4}.$$

Az állítást igazoltuk, mert a bizonyítandó állítás jobb oldalán álló összefüggéshez jutottunk.

(g) Három lépésben igazoljuk az állítást.

(1) Könnyű ellenőrizni, hogy az állítás $n = 1$ esetén igaz.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

Tekintsük a bizonyítandó állítás bal oldalán álló kifejezést és alkalmazzuk az indukciós feltevést!

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Az állítást igazoltuk.

(h) Három lépésben igazoljuk ezt az állítást is.

(1) Könnyű ellenőrizni, hogy az állítás $n = 1$ esetén igaz.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + ... + k! \cdot k = (k+1)! - 1$$

Bevezetjük az

$$S_k = 1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + ... + k! \cdot k$$

jelölést. A feltétel értelmében:

$$S_k = (k+1)! - 1.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + \ldots + k! \cdot k + (k+1)! \cdot (k+1) = (k+2)! - 1,$$

azaz

$$S_{k+1} = (k+2)! - 1.$$

Tekintsük a bizonyítandó állítás bal oldalán álló kifejezést és alkalmazzuk az indukciós feltevést!

$$\underbrace{\underbrace{1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + \ldots + k! \cdot k}_{S_k} + (k+1)! \cdot (k+1)}_{S_{k+1}} = (k+1)! - 1 + (k+1)! \cdot (k+1),$$

azaz

$$S_{k+1} = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1.$$

Az állítást tehát igazoltuk.

(i) Itt is teljes indukcióval bizonyítunk három lépésben.

(1) Könnyen ellenőrizhető, hogy az állítás $n = 1$ esetén igaz.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - ... - \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{k!}.$$

Vezessük be az

$$S_k = 1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - ... - \frac{k-1}{k!}$$

jelölést!

(3) Bizonyítunk $(k + 1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - ... - \frac{k-1}{k!} - \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)!},$$

azaz

$$S_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$$

Tekintsük a bizonyítandó állítás bal oldalán álló kifejezést és alkalmazzuk az indukciós feltevést!

$$\underbrace{\underbrace{1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - ... - \frac{k-1}{k!}}_{S_k} - \frac{k}{(k+1)!}}_{S_{k+1}} = \frac{1}{k!} - \frac{k}{(k+1)!},$$

azaz

$$S_{k+1} = \frac{k+1-k}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Az állítást igazoltuk.

2.2.3. Valamennyi egyenlőtlenség bizonyítható teljes indukcióval.

(a) Három lépésben igazoljuk az állítást.

(1) $n = 5$ esetén az állítás igaz, mert $2^5 > 5^2$ $(32 > 25)$.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, vagyis $2^k > k^2$.

(3) Bizonyítunk $(k + 1)$-re. Bizonyítandó, hogy $2^{k+1} > (k + 1)^2$. Induljunk ki a felírt egyenlőtlenség bal oldalából és alkalmazzuk az indukciós feltevést!

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2.$$

Megmutatjuk, hogy

$$2 \cdot k^2 > (k+1)^2,$$

azaz

$$k^2 > 2k + 1.$$

Ha $k > 4$, akkor $k^2 > 4k > 2k + 1$. Az állítás tehát igaz.

(b) Három lépésben bizonyítunk.

(1) $n = 4$ esetén az állítás igaz, mert $3^4 > 4^3$ $(81 > 64)$.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, vagyis

$$3^k > k^3.$$

(3) Bizonyítandó, hogy $3^{k+1} > (k+1)^3$, azaz

$$3 \cdot 3^k > k^3 + 3k^2 + 3k + 1.$$

Az indukciós feltétel miatt

$$3 \cdot 3^k > 3k^3.$$

Azt kell tehát belátnunk, hogy

$$3k^3 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1,$$

azaz

$$2k^3 > 3k^2 + 3k + 1.$$

Figyelembe véve, hogy $k > 3$, adódik, hogy

$$k^3 > 3k^2,$$

továbbá

$$k^3 = k^2 \cdot k > 9k > 3k + 1.$$

Emiatt

$$2k^3 = k^3 + k^3 > 3k^2 + 3k + 1.$$

Az állítás igaz.

(c) Itt is három lépésben végezzük el a bizonyítást. Alkalmazzuk az

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

jelölést!

(1) $n = 2$ esetén az állítás igaz, mert

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1.$$

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz $S_k > 1$.

(3) Bizonyítunk $(k+1)$-re. Bizonyítandó, hogy $S_{k+1} > 1$. Könnyen belátható, hogy

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{k^2+1} + \ldots + \frac{1}{k^2+2k+1} - \frac{1}{k}.$$

Az indukciós feltételt alkalmazva adódik, hogy

$$S_{k+1} > 1 + \frac{1}{k^2+1} + \ldots + \frac{1}{k^2+2k+1} - \frac{1}{k}.$$

Már csak azt kell belátni, hogy

$$\frac{1}{k^2+1} + \ldots + \frac{1}{k^2+2k+1} \geq \frac{1}{k},$$

mert ekkor

$$S_{k+1} > 1$$

is teljesül. Helyettesítsük a felírt egyenlőtlenség bal oldalán álló $2k+1$ tagú összeg minden tagját az összegben szereplő legkisebb taggal:

$$\frac{1}{k^2+1} + \ldots + \frac{1}{k^2+2k+1} > \frac{2k+1}{k^2+2k+1} = \frac{2k+1}{k^2+k+k+1}.$$

Alkalmazzuk most a $k \geq 2$ feltételből adódó $k^2 > k+1$ egyenlőtlenséget:

$$\frac{2k+1}{k^2+k+k+1} > \frac{2k+1}{k^2+k+k^2} = \frac{2k+1}{k(2k+1)} = \frac{1}{k},$$

azaz

$$\frac{1}{k^2+1} + \ldots + \frac{1}{k^2+2k+1} \geq \frac{1}{k}$$

teljesül, így az eredeti állítás is igaz.

(d) Három lépésben bizonyítunk.

(1) $n = 2$ esetén az állítás igaz, mert

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}.$$

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24}.$$

Ehhez azt kell igazolni, hogy a kimaradó és az újonnan hozzávett tagok különbsége pozitív. Ez igaz, mert

$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} > 0.$$

(e) Három lépésben igazoljuk az állítást.

(1) Az állítás $n = 2$ esetén igaz, mert

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}.$$

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}.$$

Alkalmazzuk az indukciós feltételt!

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\sqrt{k+1} > \sqrt{k}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, így

$$\frac{\sqrt{k}\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}} > \frac{\sqrt{k}\sqrt{k}+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}.$$

Az állítás tehát igaz.

(f) Három lépésben igazoljuk az állítást.

(1) Az állítás $n = 2$ esetén igaz, mert

$$\frac{4!}{4} = 6 = \frac{18}{3} > \frac{16}{3}.$$

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} > \frac{4^k}{k+1}$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} > \frac{4^{k+1}}{k+2}.$$

Alakítsuk át a bal oldalon álló törtet és alkalmazzuk az indukciós feltételt!

$$\frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{2(2k+1)}{k+1} \geq \frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{2(2k+1)}{k+1}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{2(2k+1)}{k+1} = \frac{4^{k+1}}{k+2} \cdot \frac{(k+2)(2k+1)}{2(k+1)^2} > \frac{4^{k+1}}{k+2},$$

mert

$$\frac{(k+2)(2k+1)}{2(k+1)^2} = \frac{2k^2+5k+2}{2k^2+4k+2} > 1.$$

Az állítást tehát igazoltuk.

2.2.4. Az összes állítás teljes indukcióval igazolható.

(a) Három lépésben igazoljuk az állítást.

(1) $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert $7^1 + 3^2 = 16 = 4 \cdot 4$.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz $4 \mid 7^k + 3^{k+1}$.

(3) Bizonyítunk $(k+1)$-re. Bizonyítandó, hogy $4 \mid 7^{k+1} + 3^{k+2}$. Alakítsuk át az állításban szereplő kifejezést:

$$7^{k+1} + 3^{k+2} = 7 \cdot 7^n + 7 \cdot 3^{n+1} - 4 \cdot 3^{n+1} = \underbrace{7(7^n + 3^{n+1})} - \underbrace{4 \cdot 3^{n+1}}.$$

Az indukciós feltétel miatt $4 \mid 7(7^n + 3^{n+1})$. Nyilvánvaló, hogy $4 \mid 4 \cdot 3^{n+1}$, így

$$4 \mid 7(7^n + 3^{n+1}) - 4 \cdot 3^{n+1},$$

amiből azonnal adódik a bizonyítandó állítás.

(b) Három lépésben igazoljuk az állítást.

(1) $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert $4 + 5 = 9 = 3 \cdot 3$.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz $3 \mid 4^k + 5$.

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy $3 \mid 4^{k+1} + 5$. Alakítsuk át az állításban szereplő kifejezést:

$$4^{k+1} + 5 = 4 \cdot 4^k + 5 = \underbrace{4^k + 5} + \underbrace{3 \cdot 4^k}.$$

Az indukciós feltétel miatt $3 \mid 4^k + 5$. Nyilvánvaló, hogy $3 \mid 3 \cdot 4^k$, így azonnal adódik a bizonyítandó állítás.

(c) Három lépésben igazoljuk az állítást.

(1) $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert $4 + 15 - 1 = 18 = 9 \cdot 2$.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$9 \mid 4^k + 15n - 1.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$9 \mid 4^{k+1} + 15k + 14.$$

Alakítsuk át az állításban szereplő kifejezést:

$$4^{k+1} + 15k + 14 = 4 \cdot 4^k + 15k + 14 = \underbrace{4^k + 15k - 1} + \underbrace{3 \cdot (4^k + 5)}.$$

Az indukciós feltétel miatt $9 \mid 4^k + 15k - 1$. A 2.2.4. feladat (b) részében igazoltuk, hogy $3 \mid 4^k + 5$, így

$$9 \mid 3 \cdot (4^k + 5).$$

Tehát

$$9 \mid 4^k + 15k - 1 + 3 \cdot (4^k + 5).$$

Az állítás igaz.

(d) Három lépésben igazoljuk az állítást.

(1) $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert $2^5 + 3 = 32 + 3 = 35 = 5 \cdot 7$.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$5 \mid 2^{4k+1} + 3.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$5 \mid 2^{4k+5} + 3.$$

Alakítsuk át az állításban szereplő kifejezést:

$$2^{4k+5} + 3 = 16 \cdot 2^{4k+1} + 3 = \underbrace{2^{4k+1} + 3} + \underbrace{15 \cdot 2^{4k+1}}.$$

Az indukciós feltétel miatt $5 \mid 2^{4k+1} + 3$. Nyilvánvaló, hogy

$$5 \mid 15 \cdot 2^{4k+1}.$$

Tehát

$$5 \mid 2^{4k+5} + 3.$$

Az állítás igaz.

(e) Három lépésben igazoljuk az állítást.

(1) $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert $3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35 = 7 \cdot 5$.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$7 \mid 3^{2k+1} + 2^{k+2}.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$7 \mid 3^{2k+3} + 2^{k+3}.$$

Alakítsuk át az állításban szereplő kifejezést:

$$3^{2k+3} + 2^{k+3} = 9 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2} = \underbrace{2 \cdot (3^{2k+1} + 2^{k+2})} + \underbrace{7 \cdot 3^{2k+1}}.$$

Az indukciós feltétel miatt $7 \mid 2 \cdot (3^{2k+1} + 2^{k+2})$. Nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$7 \mid 7 \cdot 3^{2k+1}.$$

Tehát $7 \mid 3^{2k+3} + 2^{k+3}$. Az állítás igaz.

(f) Itt is három lépésben igazoljuk az állítást.

(1) $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert $8 \mid 5 + 2 + 1$, azaz $8 \mid 8$.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, azaz

$$8 \mid 5^k + 2 \cdot 3^{k-1} + 1,$$

tehát felírható az alábbi egyenlőség:

$$5^k + 2 \cdot 3^{k-1} + 1 = 8A,$$

ahol $A \in \mathbb{Z}^+$. Átrendezve:

$$5^k = 8A - 2 \cdot 3^{k-1} - 1.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$8 \mid 5^{k+1} + 2 \cdot 3^k + 1.$$

Legyen

$$B = 5^{k+1} + 2 \cdot 3^k + 1 = 5 \cdot 5^k + 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} + 1.$$

Behelyettesítve a feltételt:

$$B = 5(8A - 2 \cdot 3^{k-1} - 1) + 6 \cdot 3^{k-1} + 1 = 40A - 4(3^{k-1} + 1).$$

3^{k-1} mindig páratlan, ezért a zárójeles kifejezés mindig páros. Ennek négyszerese osztható 8-cal. $40A$ nyilvánvalóan osztható 8-cal, tehát

$$8 \mid B.$$

Az állítás igaz.

(g) Három lépésben igazoljuk az állítást.

(1) $n = 1$ esetén az állítás igaz, mert $120 \mid 1 - 5 + 4$, azaz $120 \mid 0$.

(2) Feltesszük, hogy az állítás $k \in \mathbb{N}$ esetén igaz, vagyis

$$120 \mid k^5 - 5k^3 + 4k,$$

így felírható az alábbi egyenlőség:

$$k^5 - 5k^3 + 4k = 120A,$$

ahol $A \in \mathbb{Z}^+$.

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$-re. Bizonyítandó, hogy

$$120 \mid (k+1)^5 - 5(k+1)^3 + 4(k+1).$$

Legyen

$$B = (k+1)^5 - 5(k+1)^3 + 4(k+1) = k^5 + 5k^4 + 5k^3 - 5k^2 - 6k.$$

Átalakítva és behelyettesítve a feltételt:

$$B = \underbrace{k^5 - 5k^3 + 4k}_{120A} + 5k^4 + 10k^3 - 5k^2 - 10k,$$

vagyis

$$B = 120A + 5(k-1)k(k+1)(k+2).$$

A jobb oldalon a második kifejezésben négy szomszédos szám szorzata áll, közöttük biztosan van 3-mal osztható és van két páros szám is. Ezen páros számok egyike 4-gyel osztható, ezért

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \mid 5(k-1)k(k+1)(k+2),$$

azaz

$$120 \mid 5(k-1)k(k+1)(k+2).$$

Tehát

$$120 \mid 120A + 5(k-1)k(k+1)(k+2),$$

$$120 \mid B.$$

Az állítás igaz.

2.2.5. A bizonyítás teljes indukcióval történik:

(1) Egy egyenes a síkot két részre osztja. $n = 1$-et behelyettesítve

$$\frac{1^2 + 1 + 2}{2} = 2$$

adódik, az összefüggés tehát $n = 1$ esetén helyes.

(2) Tegyük fel, hogy n darab egyenes a síkot legfeljebb $\dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ részre osztja.

(3) Igazoljuk, hogy $(n+1)$ egyenes a síkot legfeljebb $\dfrac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$ részre osztja. Ha az $(n+1)$-edik egyenes az előző n darab egyenes mindegyikét metszi, akkor n darab metszéspont és ezáltal $(n+1)$ darab új síkrész keletkezik. Felhasználva a feltételt, a síkrészek száma:

$$\frac{n^2+n+2}{2}+n+1=\frac{n^2+n+2+2n+2}{2}=\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2},$$

az állítás tehát igaz.

2.2.6. Teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $a+\dfrac{1}{a}$, $a\in\mathbb{R}$ egész.

(1) $n=1$ esetén nyilvánvalóan igaz az állítás. Vizsgáljuk az $n=2$ esetet! Ekkor

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2a\cdot\frac{1}{a}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2,$$

ami egész, tehát ebben az esetben is igaz az állítás.

(2) Tegyük fel, hogy $k\in\mathbb{N}$ esetén igaz az állítás, azaz

$$a^k+\frac{1}{a^k}\in\mathbb{Z}.$$

Ekkor $(k-1)\in\mathbb{N}$ esetén is fennáll az állítás, azaz

$$a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}}\in\mathbb{Z}.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1)\in\mathbb{N}$ esetén, azaz igazoljuk, hogy

$$a^{k+1}+\frac{1}{a^{k+1}}\in\mathbb{Z}.$$

Az alábbi felbontás jobb oldalán szereplő valamennyi tag egész szám a feltételek értelmében:

$$a^{k+1}+\frac{1}{a^{k+1}}=\left(a^k+\frac{1}{a^k}\right)\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}}\right),$$

az állítás tehát igaz.

2.2.7. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

(1) $n=1$ esetén nyilvánvalóan igaz az állítás. Ha $a+b=2$ és $a^2+b^2=4$, akkor

$$(a+b)^2=a^2+b^2-2ab \quad\Rightarrow\quad 2ab=0,$$

azaz

$$a=0 \qquad \text{vagy} \qquad b=0.$$

Tehát $n=2$-re is igaz az állítás.

(2) Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás, azaz, ha $a+b=2$ és $a^2+b^2=4$, akkor
$$a^k+b^k=2^k.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$ esetén, azaz igazoljuk, hogy
$$a^{k+1}+b^{k+1}=2^{k+1}.$$
Alakítsuk át a bizonyítandó állítás bal oldalán álló összeget:
$$a^{k+1}+b^{k+1}=(a+b)(a^k+b^k)-ab(a^{k-1}+b^{k-1}).$$
A második tag $ab=0$ miatt 0, így
$$a^{k+1}+b^{k+1}=(a+b)(a^k+b^k)=2\cdot 2^k=2^{k+1}.$$
Az állítás igaz.

2.2.8. Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást.

(1) $n=1$ esetén az egyenlőség bal oldala
$$(2+1)(2^2+1)=3\cdot 5=15,$$
jobb oldala:
$$2^{2^2}-1=2^4-1=16-1=15.$$
Az állítás igaz $n=1$-re.

(2) Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás, azaz
$$(2+1)(2^2+1)\cdot \ldots \cdot \left(2^{2^k}+1\right)=2^{2^{k+1}}-1.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$ esetén. Igazoljuk, hogy
$$(2+1)(2^2+1)\cdot \ldots \cdot \left(2^{2^{k+1}}+1\right)=2^{2^{k+2}}-1.$$
Alkalmazzuk az indukciós feltételt:
$$(2+1)(2^2+1)\cdot \ldots \cdot \left(2^{2^{k+1}}+1\right)=\left(2^{2^{k+1}}-1\right)\cdot\left(2^{2^{k+1}}+1\right),$$
és az $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ azonosságot! Ekkor
$$\left(2^{2^{k+1}}-1\right)\cdot\left(2^{2^{k+1}}+1\right)=\left(2^{2^{k+1}}\right)^2-1=2^{2\cdot 2^{n+1}}-1=2^{2^{n+2}}-1.$$
Az állítás tehát igaz.

2.2.9. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

(1) Az állítás $n = 0$ esetén igaz, mert

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x} = \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x}, \qquad (\sin x \neq 0).$$

(2) Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás, azaz

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ \ldots \ \cdot \cos 2^k x = \frac{\sin 2^{k+1}x}{2^{k+1}\sin x}, \qquad (\sin x \neq 0)$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$ esetén. Bizonyítandó, hogy

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ \ldots \ \cdot \cos 2^k x \cdot \cos 2^{k+1}x = \frac{\sin 2^{k+2}x}{2^{k+2}\sin x}, \qquad (\sin x \neq 0).$$

Tekintsük a bizonyítandó állítás bal oldalát és alkalmazzuk az indukciós összefüggést! Ekkor:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \ \ldots \ \cdot \cos 2^k x \cdot \cos 2^{k+1}x = \frac{\sin 2^{k+1}x}{2^{k+1}\sin x} \cdot \cos 2^{k+1}x =$$

$$= \frac{2\sin 2^{k+1}x \cdot \cos 2^{k+1}x}{2^{k+2}\sin x} = \frac{\sin 2^{k+2}x}{2^{k+2}\sin x},$$

amit bizonyítani kellett.

2.3.1. Ismert, hogy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \text{és} \qquad \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))!}.$$

Végezzük el az összeadást:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))!} =$$

$$= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(n-k)! \cdot (k+1)!} = \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(n-k)! \cdot (k+1)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(n-k)! \cdot (k+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2.3.2. A **Newton-féle binomiális tétel**: Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

azaz

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Bizonyítás:
A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk.

(1) $n = 0$ esetén $(a+b)^0 = 1$ miatt az állítás igaz.

(2) Tegyük fel, hogy $(n-1)$ -re is igaz az állítás, azaz

$$(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0}a^{n-1} + \binom{n-1}{1}a^{n-2}b + \ldots + \binom{n-1}{n-1}b^{n-1}.$$

(3) Bizonyítunk n-re:

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}\cdot(a+b) =$$

$$=\left[\binom{n-1}{0}a^{n-1} + \ldots + \binom{n-1}{n-2}ab^{n-2} + \binom{n-1}{n-1}b^{n-1}\right]\cdot(a+b) =$$

$$=\binom{n-1}{0}a^n + \binom{n-1}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n-1}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n-1}{n-1}ab^{n-1} +$$

$$+\binom{n-1}{0}a^{n-1}b + \binom{n-1}{1}a^{n-2}b^2 + \ldots + +\binom{n-1}{n-2}ab^{n-1} + \binom{n-1}{n-1}b^n =$$

$$=\binom{n-1}{0}a^n + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}\right]a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n}b^n =$$

$$=\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

mert $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$. Az állítás tehát igaz.

2.3.3. A kifejtés 2. tagja:

$$\binom{n}{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 = \binom{n}{2}\cdot 2 = 110,$$

azaz

$$\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot 2 = 110,$$

ahonnan átrendezéssel az alábbi másodfokú egyenlet adódik:

$$n^2 - n - 110 = 0.$$

Mivel $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, így csak az $n = 11$ gyök fogadható el megoldásként. A kifejtés utolsó előtti tagja emiatt:

$$\binom{n}{n-1}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} = \binom{11}{10}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{10} = 352.$$

2.3.4. A binomiális tétel alapján:

$$(x^2-2y^3)^5 = \binom{5}{0}(x^2)^5 + \binom{5}{1}(x^2)^4(-2y^3) + \binom{5}{2}(x^2)^3(-2y^3)^2 + \binom{5}{3}(x^2)^2(-2y^3)^3 +$$

$$+\binom{5}{4}(x^2)(-2y^3)^4+\binom{5}{5}(-2y^3)^5=x^{10}-10x^8y^3+40x^6y^6-80x^4y^9+80x^2y^{12}-32y^{15}.$$

2.3.5. Ha $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ páros, akkor a kifejtés $\frac{n}{2}$-edik tagját a kifejtés középső tagjának nevezzük. A keresett tag tehát:

$$(-1)^8\binom{16}{8}\left(\frac{a}{x}\right)^8\left(\sqrt{x}\right)^8=12870\cdot\frac{a^8}{x^4}.$$

2.3.6. A binomiális tétel szerinti kifejtés k-adik tagja az a tag, ahol az együttható $\binom{n}{k}$. A kifejtés negyedik tagja tehát:

$$\binom{12}{4}\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{a^2}\right)^8\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{a}\right)^4=\frac{40095}{4096}\sqrt[3]{a^{22}}.$$

2.3.7. A binomiális tétel szerinti kifejtés második tagja:

$$\binom{n}{2}\cdot\underbrace{\left(\sqrt{x}\right)^{n-2}\cdot\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}_{\sqrt{x^5}}.$$

Azaz

$$\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n-1}{2}=\frac{5}{2},$$

amiből adódik, hogy

$$n=6.$$

2.3.8. A binomiális tétel szerinti kifejtés középső tagja:

$$\binom{6}{3}\cdot\sqrt{x^3}\cdot\frac{1}{x^3}.$$

Emiatt:

$$\binom{6}{3}\cdot\sqrt{x^3}\cdot\frac{1}{x^3}=\frac{5}{9},$$

azaz

$$20\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{5}{9}.$$

Innen pedig egyszerű számolással

$$x=6\cdot\sqrt[3]{6}$$

adódik.

2.3.9. Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ esetén kapjuk meg a binomiális tétel szerinti kifejtésnek azt a tagját, amelyik nem tartalmazza x-et. Az $E(x)$ keresett tagjának általános alakja:

$$\binom{12}{k}\cdot(x^2)^{12-k}\cdot\left(\frac{-2}{x}\right)^k.$$

Nyilvánvaló, hogy
$$\binom{12}{k} \cdot (x^2)^{12-k} \cdot \left(\frac{-2}{x}\right)^k = \binom{12}{k} \cdot (-1)^k \cdot 2^k \cdot x^{24-3k}.$$
A keresett tag x-et a nulladik hatványon tartalmazza (azaz nem tartalmazza x-et), így
$$24 - 3k = 0,$$
azaz
$$k = 8$$
adódik. A keresett tag tehát:
$$\binom{12}{8} \cdot (x^2)^4 \cdot \left(\frac{-2}{x}\right)^8 = 126720.$$

2.3.10. Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esetén kapjuk meg a binomiális tétel szerinti kifejtésnek azt a tagját, amelyik nem tartalmazza x-et. Az $F(x)$ keresett tagjának általános alakja:
$$\binom{17}{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^k \cdot \left(\sqrt[4]{x^3}\right)^{17-k} = \binom{17}{k} \cdot \sqrt[12]{x^{153-17k}}.$$
A keresett tag x-et a nulladik hatványon tartalmazza (azaz nem tartalmazza x-et), így
$$17k = 153,$$
azaz
$$k = 9$$
adódik. A keresett tag tehát:
$$\binom{17}{9} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^9 \cdot \left(\sqrt[4]{x^3}\right)^8 = 680.$$

2.3.11. A hatodikban.

2.3.12. A kilencedikben.

2.3.13. A Newton-féle binomiális tételből $a = b = 1$ esetén adódik, hogy
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

2.3.14. Az előző feladat eredményét használjuk fel, emiatt:
$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 128 = 2^7 = 2^m,$$

azaz
$$m = 7.$$

A kifejtés k-adik tagja:
$$\binom{7}{k}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{7-k}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{k} = \binom{7}{k}x^{\frac{63-11k}{6}}.$$

A keresett tagban x az ötödik hatványon szerepel, azaz meg kell oldani az alábbi egyenletet:
$$\frac{63-11k}{6} = 5.$$

Ennek $k = 3$ a megoldása. A keresett tag:
$$\binom{7}{3}x^5 = 35x^5.$$

2.3.15. Vezessük be az alábbi jelöléseket!

(a) $S_1 = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$;

(b) $S_2 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}$;

(c) $S_3 = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \ldots + (n+1)\binom{n}{n}$;

(d) $S_4 = \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} + \ldots + (n-1)\binom{n}{n}$.

A megoldások:

(a) Az S_1 összeg kiszámításához tekintsük az alábbi $(n+1)$ sorból és $(n+1)$ oszlopból álló táblázatot!

$$\begin{array}{ccccccccc}
\binom{n}{0} & + & \binom{n}{1} & + & \binom{n}{2} & + & \ldots & + & \binom{n}{n} \\
\binom{n}{0} & + & \binom{n}{1} & + & \binom{n}{2} & + & \ldots & + & \binom{n}{n} \\
\binom{n}{0} & + & \binom{n}{1} & + & \binom{n}{2} & + & \ldots & + & \binom{n}{n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
\binom{n}{0} & + & \binom{n}{1} & + & \binom{n}{2} & + & \ldots & + & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Minden sorban és a főátlóban álló összeg is a **2.3.13.** feladat értelmében:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n.$$

A főátló alatt és felett a tagok összege mindkét esetben éppen S_1, így felírható az alábbi összefüggés:

$$2S_1+2^n=(n+1)\cdot 2^n,$$

azaz

$$2S_1=n\cdot 2^n,$$

amiből adódik, hogy

$$S_1=n\cdot 2^{n-1}.$$

(b) A Newton-féle binomiális tetelből $a=1$ és $b=-1$ választással számolható az S_2 összeg:

$$S_2=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(1+(-1))^n=0.$$

(c) Könnyen látható, hogy

$$S_3=S_1+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}+2^n=(n+2)\cdot 2^{n-1}.$$

(d) Válasszuk le az S_1 összegből S_4-et! Ekkor

$$S_4=S_1-\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}\right]=S_1-(2^n-1)=n\cdot 2^{n-1}-2^n+1,$$

azaz

$$S_4=(n-2)\cdot 2^{n-1}+1.$$

2.4.1. Teljes indukcióval bizonyítunk.

(1) Az állítás $n=1$ esetén egyenlőség formájában igaz.

(2) Tegyük fel, hogy az állítás $n>1$ estén minden $x>-1$-re teljesül.

(3) Bizonyítunk $n+1$ esetén.

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)\geq(1+nx)(1+x)=1+(n+1)x+nx^2.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$1+(n+1)x+nx^2\geq 1+(n+1)x,$$

mert $nx^2\geq 0$ $(\forall x>-1)$, így

$$(1+x)^{n+1}\geq 1+(n+1)x.$$

Egyenlőség csak $nx^2=0$ esetén, azaz $x=0$ esetén teljesül.

2.4.2. Emeljük négyzetre az egyenlőtlenség mindkét oldalát, majd szorozzunk néggyel. Ekkor az

$$4ab \leq (a+b)^2$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Vegyünk el mindkét oldalból $4ab$-t és végezzük el a négyzetre emelést. Az egynemű tagok összevonása után az alábbi egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$0 \leq a^2 - 2ab - b^2,$$

azaz

$$0 \leq (a-b)^2,$$

amely nyilvánvalóan minden a és b valós szám esetén igaz. Következésképpen a

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

egyenlőtlenség szintén teljesül. Egyenlőség $a = b$ esetén áll fenn. Az előbb igazolt egyenlőtlenség átírható az

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

ekvivalens alakba. Ha elvégezzük a négyzetre emelést a bal oldalon, mindkét oldalt megszorozzuk 4-gyel és minden tagot jobb oldalra rendezünk, majd elvégezzük az egynemű tagok összevonását, akkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$0 \leq 2a^2 + 2b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = (a-b)^2,$$

ami, ahogyan azt korábban is láttuk, nyilvánvalóan igaz.

2.4.3. Jelöljük a-val ill. b-vel a téglalap oldalait. Ekkor a téglalap kerülete

$$K = 2(a+b),$$

területe pedig

$$T = ab.$$

Írjuk fel a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget!

$$T = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{K^2}{16}.$$

A téglalap területe akkor lesz a legnagyobb, ha egyenlőség áll fenn, azaz $a = b$, tehát az adott kerületű téglalapok közül a négyzet a legnagyobb területű.

2.4.4. Jelöljük a-val és b-vel a derékszögű háromszög befogóit és c-vel az átfogóját. Ekkor

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

A 2.4.2. feladat (b) részében igazolt összefüggésből adódik, hogy

$$\frac{a+b}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2},$$

azaz
$$\frac{a+b}{2} \le \frac{c}{\sqrt{2}},$$
így
$$a+b \le \sqrt{2} \cdot c.$$

2.4.5. A 2.4.2. feladat (a) részében igazolt egyenlőtlenségből adódik, hogy
$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha \ge 2\sqrt{\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha} = 2.$$

2.4.6. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget fogjuk alkalmazni. A 2.4.2. feladat (b) részében szereplő egyenlőtlenséget írjuk át a következő alakra:
$$\frac{x^2+y^2}{2} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$
Használjuk az alábbi jelöléseket!
$$x = a + \frac{1}{a} \qquad \text{és} \qquad y = b + \frac{1}{b}.$$
Ekkor
$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \ge \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}\right)^2.$$
A feltételek szerint $a+b=1$, így
$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \ge \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2,$$
azaz
$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \ge \frac{1}{4}\left(1 + \frac{a+b}{ab}\right)^2,$$
tehát
$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \ge \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2.$$
Az $\frac{1}{ab}$ tört értéke akkor a legkisebb, ha a nevező a legnagyobb értéket veszi fel. Ennek vizsgálatához tekintsük újra a számtani és mértani közép közötti összefüggést! A 2.4.2. feladat (a) részében szereplő egyenlőtlenségből azonnal adódik, hogy
$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Az $a+b=1$ feltétel miatt adódik, hogy
$$ab \leq 4,$$
tehát
$$\frac{1}{ab} \geq 4 \qquad \text{és} \qquad 1+\frac{1}{ab} \geq 5.$$
Ebből következik, hogy
$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \geq \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\cdot 5^2 = \frac{25}{2}.$$

2.4.7. A 2.4.2. feladat (a) részében szereplő egyenlőtlenség alapján:
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$
$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc},$$
$$\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}.$$
Szorozzuk össze a felírt egyenlőtlenségeket! Ekkor
$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geq \sqrt{a^2b^2c^2} = abc,$$
azaz
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

2.4.8. Alkalmazzuk a 2.4.2. feladat (a) részében szereplő egyenlőtlenséget! Ekkor
$$\frac{a+bx^4}{x^2} = \frac{a}{x^2}+bx^2 \geq 2\sqrt{\frac{a}{x^2}bx^2} = 2\sqrt{ab}.$$
Egyenlőség akkor áll fenn, ha
$$\frac{a}{x^2} = bx^2,$$
azaz ha
$$x^2 = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$
Ekkor a legkisebb a tört értéke.

2.4.9. Igazoljuk, hogy n darab pozitív szám számtani közepe nem nagyobb az n darab szám kvadratikus közepénél, azaz
$$\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n},$$

ha $n \in \mathbb{N}$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ..., n)$. A bizonyításhoz induljunk ki abból, hogy

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \le \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 \le \frac{x_3^2 + x_4^2}{2}.$$

A felírt egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right)^2 = \left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2}\right)^2 \le \frac{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2}{2},$$

továbbá

$$\frac{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2}{2} \le \frac{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \frac{x_3^2 + x_4^2}{2}}{2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4},$$

azaz

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}\right)^2 \le \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4}.$$

Hasonlóképpen abból, hogy

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}\right)^2 \le \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{4}$$

és

$$\left(\frac{x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{2}\right)^2 \le \frac{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}{4},$$

adódik, hogy

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_8}{8}\right)^2 \le \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_8^2}{8}.$$

A fenti eljárást folytatva igazolhatjuk a felírt állítást 2^m darab tetszőleges számra. Megmutatjuk, hogy ha a tétel igaz $n+1$ darab számra, azaz

$$(*) \qquad \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}}{n+1}\right)^2 \le \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + x_{n+1}^2}{n+1},$$

akkor n-re is igaz. Helyettesítsük be a $(*)$ egyenlőtlenségbe x_{n+1} helyébe az alábbi törtet:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Ekkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n+1}}{n+1}\right)^2 \le \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^2}{n+1},$$

továbbá

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n+x_{n+1}}{n+1} = \frac{x_1+x_2+...+x_n+\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}{n+1} =$$

$$= \frac{\dfrac{n+1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)}{n+1} = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}.$$

Azaz a fenti egyenlőtlenség átírható az alábbi ekvivalens alakba:

$$(**)\qquad \left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2+\left(\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^2}{n+1}.$$

Szorozzuk meg a $(**)$ egyenlőtlenség mindkét oldalát $n+1$-gyel:

$$(n+1)\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^2 \leq x_1^2+x_2^2+...+x_n^2+\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^2,$$

majd vegyük el mindkét oldalból az

$$\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^2$$

négyzetet, majd osszunk n-nel! Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}.$$

Megjegyzés: A teljes indukciós bizonyítással ellentétben, amely az n-edik állapotból az $n+1$-edik állapotba való átmenetet vizsgálja, a fenti bizonyítás az $n+1$-edik állapotból az n-edik állapotba való átmeneten alapul. A matematikai tételek bizonyításának ezt a módját *fordított indukciós eljárás*nak nevezzük.

2.4.10. A *Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz*-féle egyenlőtlenség fontos szerepet játszik a matematikában. Nézzük egy lehetséges bizonyítását! Induljunk ki a következő egyenlőségből:

$$(*)\qquad (zx_1+y_1)^2+(zx_2+y_2)^2+...+(zx_n+y_n)^2 =$$

$$= (z^2x_1^2+2zx_1y_1+y_1^2)+(z^2x_2^2+2zx_2y_2+y_2^2+...+(z^2x_n^2+2zx_ny_n+y_n^2) =$$
$$= Az^2+2Bz+C,$$

ahol

$$A = x_1^2+x_2^2+...+x_n^2,$$
$$B = x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n,$$
$$C = y_1^2+y_2^2+...+b_n^2.$$

A $(*)$ egyenlőség bal oldala négyzetösszeg, így semmilyen z érték mellett sem lehet negatív. Akkor sem, ha

$$z = -\frac{B}{A}.$$

Ha z helyébe ezt az értéket írjuk a $(*)$ egyenlőség jobb oldalán kapott kifejezésbe, akkor az alábbi összefüggést kapjuk:

$$A\frac{B^2}{A^2} - 2B\frac{B}{A} + C = \frac{AC - B^2}{A} \geq 0.$$

Mivel $A > 0$, ezért

$$AC - B^2 \geq 0,$$

tehát

$$B^2 \leq AC.$$

Ha A, B és C helyébe beírjuk a megfelelő összegeket, akkor éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

2.4.11. Tekintsük a következő egyenlőséget:

$$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + ... + (x_n + y_n)^2 =$$

$$(x_1 + y_1)x_1 + ... + (x_n + y_n)x_n + (x_1 + y_1)y_1 + ... + (x_1 + y_1)y_n,$$

zárt alakban:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\, x_i + \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) y_i.$$

Írjuk fel a *Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz*-féle egyenlőtlenséget!

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)$$

Legyen

$$a_1 = x_1 + y_1, \quad a_2 = x_2 + y_2, \quad ... \quad a_n = x_n + y_n,$$

továbbá

$$b_1 = x_1, \quad b_2 = x_2, \quad ... \quad b_n = x_n.$$

Ekkor a *Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz*-féle egyenlőtlenség értelmében:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\, x_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Hasonlóképpen adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\, y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Adjuk össze az utóbbi két egyenlőtlenséget! Ekkor az alábbi egyenlőtlenség adódik:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2}\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}\right].$$

Osszuk el a kapott egyenlőtlenség mindkét oldalát $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2}$-el, ekkor a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2}.$$

2.4.12. Írjuk fel a bizonyítandó egyenlőtlenséget zárt alakban:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^2\right)$$

Írjuk fel a *Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz*-féle egyenlőtlenséget!

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2\right)$$

Legyen most bármely $i=1,2,...,n$ esetén

$$a_i=\sqrt{p_i} \qquad \text{és} \qquad b_i=\sqrt{p_i}\cdot x_i.$$

Ezzel a helyettesítéssel a*Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz*-féle egyenlőtlenségből azonnal adódik az állítás.

2.4.13. Írjuk fel $n=3$ esetén a 2.4.12. feladatban szereplő egyenlőtlenséget!

$$\left(\sum_{i=1}^{3}p_ix_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{3}p_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}p_ix_i^2\right)$$

Legyen most

$$p_1=\frac{1}{2}, \qquad p_2=\frac{1}{3}, \qquad p_3=\frac{1}{6}.$$

Ekkor

$$\sum_{i=1}^{3}p_i=p_1+p_2+p_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1,$$

így a fenti egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{6}x_3\right)^2 \le \frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{3}x_2^2+\frac{1}{6}x_3^2.$$

3 Valós számsorozatok

3.1 Korlátos és monoton sorozatok

3.1.1. Vizsgálja meg korlátosság és monotonitás szempontjából az alábbi sorozatokat!

(a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{2n+3}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$; (b) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{n+2}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

(c) $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{n-1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$; (d) $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{n^2+1}{n^2+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

(e) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{3^{n+1}-1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; (f) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{2+(-5)^n}{5^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

(g) $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{(-1)^n+2^{n+1}}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; (h) $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{(-1)^n\dfrac{n^2+2}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

(i) $\{i_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; (j) $\{j_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1-2+3-4+...-2n}{1+2+3+4+...+2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

3.1.2. Adott az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{(-1)^n \sin\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat.

(a) Monoton-e a sorozat?

(b) Korlátos-e a sorozat?

3.1.3. Vizsgálja meg az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1+(-1)^n\dfrac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ általános taggal adott sorozatot!

(a) Monoton-e a sorozat?

(b) Korlátos-e a sorozat? Ha igen, adjon alsó és felső korlátot!

3.1.4. Határozza meg az alábbi sorozatok értékkészletének infimumát és szuprémumát!

(a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$; (b) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(3+(-1)^n)n\}_{n=1}^{\infty}$;

(c) $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1+2(-1)^n+3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$; (d) $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{n^{(-1)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

(e) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{3n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

3.1.5. Vizsgálja monotonitás szempontjából az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot!

3.1.6. Vizsgálja monotonitás szempontjából az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot!

3.2 Konvergencia és divergencia

3.2.1. Határozza meg, hogy hányadik tagtól kezdve esnek a sorozat elemei a határérték adott ε sugarú környezetébe?

(a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{n+2}{3n-8}\right\}_{n=1}^{\infty}; \quad \varepsilon = 10^{-2}$

(b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{3 + \dfrac{(-1)^n}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}; \quad \varepsilon = 10^{-3}$

(c) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1-2+3-4+...-2n}{1+2+3+4+...+2n}\right\}_{n=1}^{\infty}; \quad \varepsilon = 0,001$

(d) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{3^n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}; \quad \varepsilon = 10^{-2}$

(e) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}\right\}_{n=1}^{\infty}; \quad \varepsilon = 10^{-2}.$

3.2.2. Határozza meg a következő sorozatok torlódási pontját (pontjait), ha létezik (léteznek)!

(a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{(-1)^{n-2}\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty};$

(b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{5+(-1)^n n^2}{5-n^2}\right\}_{n=1}^{\infty};$

(c) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{2n}{n+1}\sin^2\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty};$

(d) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{1-n}\cdot\cos(n\pi)\right\}_{n=1}^{\infty}.$

3.2.3. Vizsgálja meg a következő sorozatokat monotonitás, korlátosság, határérték és torlódási helyek meghatározása céljából!

(a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty};$

(b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{n-1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty};$

(c) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{5n-2}{5-10n}\right\}_{n=1}^{\infty};$

(d) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{3^{n+1}-1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty};$

(e) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1+n^2}{n^2+n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$

3.2.4. Konvergens-e az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat?

3.2.5. Konvergens-e az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\ln(n+1) - \ln n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat?

3.2.6. Adja meg az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{\sqrt{n}\sin(n!e^n)}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértékét!

3.2.7. Számítsa ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-5n+10}{4n^3+10n-6}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^2+7n+2}{3n^2+5n+7}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2+n+5}{n^4+54n-1}$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5-7n^3+4}{n^4-3n+5}$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+6}+5}{4n+2}$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{4n^2+5n}}{n+4}$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$; (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$.

3.2.8. Számítsa ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{5n^2+1}-n\right)$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+2n-1}-3n\right)$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+8n}-2n\right)$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n-\sqrt{3n^2+1}\right)$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(4n-\sqrt{4n^2+16}\right)$.

3.2.9. Számítsa ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6^n-8^n}{7^n}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6^n-8^n}{7^n+9^n}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}+5^n}{2^{3n}}$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left((0,4)^n-5\right)$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{2n-3}-4\cdot 6^{n+3}}{2^{4n+1}+8^{n+2}}$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty} (-0,99999)^n$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{2n+3}-7\cdot 5^{n+2}}{(-2)^{3n+1}+9^{n+2}}$; (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+3}+(-6)^{2n+2}}{6^{n+1}+5^{n-2}}$.

3.2.10. Számítsa ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7n}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{23}{n}}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3n^2}{31}}$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\dfrac{5n^2}{13}}+\sqrt[n]{\dfrac{5}{n^4}}\right)$.

3.2.11. Konvergens-e az $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\sqrt[n^2]{n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ sorozat?

3.2.12. Igazolja, hogy az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sqrt[3n^2]{n^2+2n+4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens!

3.2.13. Igazolja, hogy bármely k egész számra $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$ teljesül!

3.2.14. Számítsa ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{4n}\right)^n$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n}\right)^{2n}$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+4}{5n-1}\right)^{n+1}$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{3n+2}$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; (h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+2}$.

3.2.15. Számítsa ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{4}{n}\right)^n$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-\sqrt{2}}{5n}\right)^n$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{n}\right)^n$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{6}{n}\right)^{4n-2}$.

3.2.16. Igazolja, hogy az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat divergens!

3.2.17. Számítsa ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{2^n}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{3n}\right)^{2n+1}$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$.

3.2.18. Igazolja, hogy az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens!

3.2.19. Mutassa meg, hogy az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat Cauchy-sorozat!

3.2.20. Konvergens-e az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(1+\frac{\cos(n\pi)}{n}\right)^{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat?

3.2.21. Vizsgálja meg a következő sorozatokat konvergencia szempontjából!

(a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + ... + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right\}_{n=1}^{\infty}$;

(b) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$;

(c) $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + ... + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$;

(d) $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$;

3.3 Rekurzív sorozatok

3.3.1. Egy valós számsorozatra $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Bizonyítsa be, hogy

$$a_n = 2^n - 1$$

teljesül!

3.3.2. Egy valós számsorozatra $a_1 = 3$ és $a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$, ha $n \geq 2$. Igazolja, hogy a sorozat konvergens!

3.3.3. Egy valós számsorozatra $a_1 = 4$ és $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 5}{6}$, ha $n \geq 2$. Igazolja, hogy a sorozat konvergens!

3.3.4. Egy valós számsorozatot a következő rekurzív definícióval adunk meg:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1 \quad \text{és} \quad a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}.$$

Igazolja, hogy a sorozat konvergens és határozza meg a $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ határértéket!

3.3.5. Igazoljuk, hogy az $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ rekurzív definícióval adott sorozat konvergens!

3.3.6. Legyen $b > 0$ rögzített valós szám. Definiáljuk az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot az alábbi rekurzióval:

$$a_1 > 0 \text{ tetszőleges valós szám} \qquad \text{és} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right).$$

Igazolja, hogy

(a) $a_n \geq \sqrt{b}$, ha $n \geq 2$,

(b) $a_n \geq a_{n+1}$, ha $n \geq 2$,

(c) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sqrt{b}$.

3.4 Útmutatások és megoldások

3.1.1.

(a) A sorozat korlátos, mert

$$0 < a_n = \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1} < 2+1 = 3.$$

A monotonitás vizsgálatához nézzük meg az $a_n - a_{n+1}$ különbség előjelét!

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+5}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n > a_{n+1}$, a sorozat tehát szigorúan monoton csökkenő.

(b) A sorozat korlátos, mert

$$1 < b_n = \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \leq 3.$$

Vizsgáljuk meg a $b_n - b_{n+1}$ különbség előjelét!

$$b_n - b_{n+1} = \frac{n+2}{n} - \frac{n+3}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)} > 0,$$

azaz bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $b_n > b_{n+1}$, tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

(c) A sorozat korlátos, mert

$$0 \leq c_n = \frac{n-1}{n+2} = 1 - \frac{3}{n+1} < 1.$$

Vizsgáljuk meg a $c_n - c_{n+1}$ különbség előjelét!

$$c_n - c_{n+1} = \frac{n-1}{n+2} - \frac{n}{n+3} = \frac{-3}{(n+2)(n+3)} < 0,$$

azaz bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $c_n < c_{n+1}$, tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő.

(d) A sorozat korlátos, mert

$$0 < d_n < 1.$$

A monotonitás vizsgálatához nézzük meg az $d_n - d_{n+1}$ különbség előjelét!

$$d_n - d_{n+1} = \frac{n^2+1}{n^2+n} - \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2+n+1} = \frac{2-n}{n(n+1)(n+2)},$$

azaz $d_n > d_{n+1}$, ha $n < 2$, ekkor szigorúan monoton csökkenő a sorozat. Ha pedig $n > 2$, akkor $d_n < d_{n+1}$, tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő.

(e) A sorozat korlátos, mert
$$0 < e_n = 3 - \frac{1}{3^n} < 3.$$
A monotonitás vizsgálatához nézzük meg a $d_n - d_{n+1}$ különbség előjelét!
$$e_n - e_{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{3^n} - \frac{3^{n+2}-1}{3^{n+1}} = -\frac{2}{3^{n+1}} < 0,$$
tehát
$$e_n < e_{n+1},$$
azaz a sorozat szigorúan monoton növekvő.

(f) A sorozat nem monoton, mert tagjai váltakozó előjellel követik egymást. A páros indexű tagok pozitív előjelűek, a páratlan indexű tagok pedig negatív előjelűek. A sorozat korlátos:
$$-1 < f_n \leq \frac{2}{25}.$$

(g) A sorozat korlátos, mert:
$$0 < g_n = 2 + \frac{(-1)^n}{2^n} \leq \frac{3}{2}.$$
A sorozat pozitív tagú, de nem monoton, mert pl. $g_1 < g_2$, de $g_2 > g_3$.

(h) A sorozat nem korlátos. Ha $n > 3$, akkor
$$|a_n| > \frac{n^2+2}{n+n} = \frac{n^2}{2n} + \frac{2}{2n} = \frac{n}{2} + \frac{1}{n} > \frac{n}{2}.$$
Tehát bárhogyan rögzítjük a K számot, ha
$$\frac{n}{2} > |K|,$$
azaz
$$n > 2|K|,$$
akkor
$$|a_n| > K,$$
tehát a sorozat nem korlátos. A sorozat nem monoton, mert az elemei váltakozó előjellel követik egymást.

(i) A sorozat korlátos. A sorozat n-edik eleme egy $q = \dfrac{1}{2}$ kvóciensű $i_0 = 1$ kezdőtagú mértani sorozat n-edik részletösszege. A felső korlát kiszámításához felhasználjuk a mértani sorozat n-edik részletösszegére vonatkozó összefüggést.
$$0 < i_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) < 2.$$

A monotonitás vizsgálatához tekintsük az alábbi különbség előjelét!

$$i_n - i_{n+1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = -\frac{1}{2^{n+1}} < 0,$$

a sorozat tehát szigorúan monoton növekvő.

(j) A sorozat n-edik tagjának számlálója:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots - 2n = \underbrace{(1-2)}_{-1} + \underbrace{(3-4)}_{-1} + \ldots + \underbrace{((2n-1)-2n)}_{-1} = -n.$$

Az n-edik tag nevezőjének kiszámításához vegyük észre, hogy a nevező egy olyan számtani sorozat $2n$-edik részletösszege, ahol a kezdőelem és a differencia is egyaránt 1. Tehát

$$1 + 2 + \ldots + 2n = \frac{(1+2n)2n}{2} = n(1+2n).$$

Azaz

$$j_n = \frac{1-2+3-4+...-2n}{1+2+3+4+...+2n} = \frac{-n}{n(1+2n)} = \frac{-1}{2n+1}.$$

Vizsgáljuk először a sorozat monotonitását!

$$j_n - j_{n+1} = \frac{-2}{(1+2n)(2n+3)} < 0,$$

azaz

$$j_n < j_{n+1}.$$

A sorozat szigorúan monoton növekvő. A sorozat korlátos, mert negatív tagú, azaz $K = 0$ és a szigorúan monoton növekedés miatt a sorozat első eleme egyben alsó korlát is:

$$-\frac{1}{3} = j_1 \leq j_n < 0.$$

3.1.2. A sorozat nem monoton, mert tagjai váltakozó előjellel követik egymást. A páros indexű tagok pozitív előjelűek, a páratlan indexű tagok pedig negatív előjelűek. A sorozat korlátos:

$$-1 < a_n < 1.$$

3.1.3. Ez a sorozat sem monoton, mert tagjai váltakozó előjellel követik egymást. A páros indexű tagok pozitív előjelűek, a páratlan indexű tagok pedig negatív előjelűek. A sorozat korlátos:

$$-1 < a_n < 3.$$

3.1.4. A megoldás során célszerű a sorozat általános tagját vizsgálni.

(a) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat általános tagja:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} + 1, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\frac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy $\inf a_n = a_1 = -1$ és $\sup a_n = a_2 = \frac{3}{2}$.

(b) A $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(3+(-1)^n)n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat általános tagja:

$$b_n = \begin{cases} 4n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 2n, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

A sorozat alulról korlátos, de felülről nem korlátos, így nincs supremuma.

$$\inf b_n = b_1 = 2.$$

(c) A $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 + 2(-1)^n + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat elemei ciklikusan váltakoznak:

$$c_n = \begin{cases} -4, & \text{ha } n = 4k+1, k \in \mathbb{Z}^+, \\ 0, & \text{ha } n = 4k+2, k \in \mathbb{Z}^+, \\ 2, & \text{ha } n = 4k+3, k \in \mathbb{Z}^+, \\ 6, & \text{ha } n = 4k, k \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

Így $\inf c_n = -4$, $\sup c_n = 6$.

(d) A $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{n^{(-1)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat általános tagja:

$$d_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

A sorozat felülről nem korlátos, így supremum nincs. A sorozat alulról korlátos.

$$\inf\{d_n\} = 0.$$

(e) A sorozat szigorúan monoton növekvő és korlátos.

$$\sup\{e_n\} = 3, \qquad \text{és} \qquad \inf\{e_n\} = e_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

3.1.5. Ha $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$, akkor $a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+2)}$. Ekkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1,$$

azaz

$$a_{n+1} < a_n.$$

A sorozat szigorúan monoton csökkenő.

3.1.6. Ha $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}$, akkor

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}.$$

Ekkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1,$$

azaz

$$a_{n+1} < a_n.$$

A sorozat szigorúan monoton csökkenő.

3.2.1. A feladatok megoldásának első lépése a határérték kiszámítása.

(a) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{n+2}{3n-8}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n-8} = \frac{1}{3}.$$

Ahhoz, hogy meg tudjuk mondani, hogy hányadik tagtól kezdve esnek a sorozat elemei a határérték $\varepsilon = 10^{-2}$ sugarú környezetébe meg kell oldanunk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < 10^{-2},$$

azaz

$$\left|\frac{n+2}{3n-8} - \frac{1}{3}\right| < 10^{-2},$$

ahonnan

$$\frac{14}{9n-24} < 0,01,$$
$$n > 158,22$$

adódik. A sorozat elemei a 159. tagtól esenek a határérték $\varepsilon = 10^{-2}$ sugarú környezetébe.

(b) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{3 + \dfrac{(-1)^n}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{(-1)^n}{n+2}\right) = 3.$$

Ahhoz, hogy meg tudjuk mondani, hogy hányadik tagtól kezdve esnek a sorozat elemei a határérték $\varepsilon = 10^{-3}$ sugarú környezetébe meg kell oldanunk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$|a_n - 3| < 10^{-3},$$

azaz

$$\left|3+\frac{(-1)^n}{n+2}-3\right|<\frac{1}{1000},$$

ahonnan $n>998$ adódk. A sorozat elemei a 999. tagtól esnek a határérték $\varepsilon=10^{-3}$ sugarú környezetébe.

(c) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{1+2+3+4+\ldots+2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat általános tagja:

$$a_n=\frac{-n}{n(1+2n)}=-\frac{1}{1+2n}.$$

A sorozat határértéke:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+2n}=0.$$

Meg kell oldanunk az alábbi egyenlőtlenséget ahhoz, hogy meg tudjuk mondani, hogy hányadik tagtól kezdve esnek a sorozat elemei a határérték $\varepsilon=10^{-3}$ sugarú környezetébe:

$$|a_n-0|<10^{-3},$$

azaz

$$\left|-\frac{1}{1+2n}\right|<10^{-3}.$$

Innen $n>499,5$ adódik. A sorozat elemei az 500. tagtól esnek a határérték $\varepsilon=10^{-3}$ sugarú környezetébe.

(d) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{3^n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértéke:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

Meg kell oldanunk az alábbi egyenlőtlenséget ahhoz, hogy meg tudjuk mondani, hogy hányadik tagtól kezdve esnek a sorozat elemei a határérték $\varepsilon=10^{-2}$ sugarú környezetébe:

$$|a_n-0|<10^{-2},$$

azaz

$$\left|\frac{1}{3^n+1}\right|<10^{-2}.$$

Innen $n\geq 5$ adódik. A sorozat elemei az 5. tagtól esnek a határérték $\varepsilon=10^{-2}$ sugarú környezetébe.

(e) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{ha } n \text{ páros}\\ \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{ha } n \text{ páratlan}\end{cases}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértéke:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

A sorozat elemei a 7. tagtól vannak a határérték megadott ε sugarú környezetében.

3.2.2. A torlódási pontok meghatározásához célszerű a sorozat általános elemét vizsgálni.

(a) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{(-1)^{n-2}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak két torlódási pontja van, mert

$$a_n = (-1)^{n-2}\left(2+\frac{3}{n^2}\right) = \begin{cases} 2+\frac{3}{n^2}, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ -2-\frac{3}{n^2}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Így $t_1 = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right) = 2$ és $t_2 = \lim_{n\to\infty}\left(-2-\frac{3}{n^2}\right) = -2$, tehát a sorozat divergens.

(b) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{5+(-1)^n n^2}{5-n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak is két torlódási pontja van, mert

$$a_n = \frac{5+(-1)^n n^2}{5-n^2} = \begin{cases} \frac{5+n^2}{5-n^2}, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 1, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Emiatt $t_1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+n^2}{5-n^2}\right) = -1$ és $t_2 = 1$. A sorozat divergens, mert két torlódási pontja van.

(c) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{2n}{n+1}\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak szintén két torlódási pontja van.

$$\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 1, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases}$$

emiatt

$$a_n = \frac{2n}{n+1}\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \frac{2n}{n+1}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Azaz $t_1 = 0$ és $t_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = 2$. A sorozat divergens, mert két torlódási pontja van.

(d) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{(-1)^n}{1-n}\cdot\cos(n\pi)\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak egy torlódási pontja van. Felhasználva, hogy

$$\cos(n\pi) = (-1)^n,$$

adódik, hogy

$$a_n = \frac{(-1)^n}{1-n}\cdot\cos(n\pi) = \frac{(-1)^n\cdot(-1)^n}{1-n} = \frac{\left((-1)^2\right)^n}{1-n} = \frac{1}{1-n}$$

és

$$t = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-n} = 0.$$

A sorozat konvergens.

3.2.3. A feladat megoldása:

(a) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat korlátos, mert $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$k = 0 < a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} < 2 = K.$$

A monotonitás megállapításához az $a_n - a_{n+1}$ különbség előjelét vizsgáljuk!

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0,$$

emiatt $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n > a_{n+1},$$

tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő. A sorozat konvergens, határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

A sorozat konvergenciájából adódik, hogy egyetlen torlódási pontja van a sorozatnak, ami éppen a határérték.

(b) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n-1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat korlátos, mert $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$k = 0 \le a_n = \frac{n-1}{n+2} = \frac{n+2-3}{n+2} = 1 - \frac{3}{n+2} < 1 = K.$$

A monotonitás megállapításához az $a_n - a_{n+1}$ különbség előjelét vizsgáljuk!

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n-1}{n+2} - \frac{n}{n+3} = \frac{-3}{(n+2)(n+3)} < 0,$$

emiatt $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n < a_{n+1},$$

tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő. A sorozat konvergens, határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+2} = 1.$$

A sorozat konvergenciájából adódik, hogy egyetlen torlódási pontja van a sorozatnak, ami éppen a határérték.

(c) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{5n-2}{5-10n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat szigorúan monoton növekvő, mert

$$a_n - a_{n+1} = \frac{5n-2}{5-10n} - \frac{5(n+1)-2}{5-10(n+1)} = \frac{5}{25-100n^2} < 0,$$

azaz

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A sorozat korlátos, mert

$$k = a_1 = -\frac{3}{5} \leq a_n < 0.$$

A sorozat konvergens, mert szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos. A sorozat határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}.$$

A sorozat konvergenciájából adódik, hogy egyetlen torlódási pontja van a sorozatnak, ami a határérték.

(d) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{3^{n+1}-1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat korlátos, mert $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$k = 0 < a_n = \frac{3^{n+1}-1}{3^n} < \frac{3\cdot 3^n}{3^n} - \frac{1}{3^n} = 3 - \frac{1}{3^n} < 3 = K.$$

A monotonitás megállapításához az $a_n - a_{n+1}$ különbség előjelét vizsgáljuk!

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{3^n} - \frac{3^{n+2}-1}{3^{n+1}} = \frac{-2}{3^{n+1}} < 0,$$

emiatt $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n < a_{n+1},$$

tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő. A sorozat konvergens, határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}-1}{3^n} = 3.$$

A sorozat konvergenciájából adódik, hogy egyetlen torlódási pontja van a sorozatnak, ami a határérték.

(e) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1+n^2}{n^2+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat korlátos, mert $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$k = 0 < a_n = \frac{1+n^2}{n^2+n} < \frac{n+n^2}{n+n^2} = 1 = K.$$

A monotonitás megállapításához az $a_n - a_{n+1}$ különbség előjelét vizsgáljuk!

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1+n^2}{n^2+n} - \frac{1+(n+1)^2}{(n+1)^2+n+1} = \frac{2-n}{n(n+1)(n+2)},$$

azaz

$$a_n - a_{n+1} \begin{cases} > 0, & \text{ha } n < 2, \\ = 0, & \text{ha } n = 2, \\ < 0, & \text{ha } n > 2, \end{cases}$$

tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő, ha $n < 2$ és szigorúan monoton növekvő, ha $n > 2$. A sorozat konvergens, határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2}{n^2+n} = 1.$$

A sorozat konvergenciájából adódik, hogy egyetlen torlódási pontja van a sorozatnak, ami a határérték.

3.2.4. $-1 \le \sin n \le 1$, vagyis

$$\frac{-1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}.$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

így a rendőr-elv miatt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

A sorozat konvergens, mert van véges határérték.

3.2.5. Vizsgáljuk a sorozat általános tagját:

$$a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Felhasználjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

így

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

A sorozat konvergens.

3.2.6. $-1 \le \sin(n!e^n) \le 1$, vagyis

$$\frac{-\sqrt{n}}{n+1} \le \frac{\sqrt{n}\sin(n!e^n)}{n+1} \le \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} = 0$$

így a rendőr-elv miatt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\sin(n!e^n)}{n+1} = 0.$$

A sorozat konvergens.

3.2.7. A határértékek kiszámításánál felhasználjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n+10}{4n^3+10n-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}+\frac{10}{n^3}}{4+\frac{10}{n^2}-\frac{6}{n^3}}=0;$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+7n+2}{3n^2+5n+7}=2;$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+n+5}{n^4+54n-1}=0;$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^5-7n^3+4}{n^4-3n+5}=+\infty;$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+6}+5}{4n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{6}{n^2}}+\frac{5}{n}}{4+\frac{2}{n}}=\frac{1}{4};$

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{4n^2+5n}}{n+4}=0;$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}=4;$

(h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}=1.$

3.2.8. A határértékek kiszámításánál felhasználjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}\right]=$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0;$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{5n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{5n^2+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{5n^2+1}+n}{\sqrt{5n^2+1}+n}\right]=$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{\sqrt{5n^2+1}+n}=+\infty;$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+2n-1}-3n\right)=\frac{1}{3};$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+8n}-2n\right)=2;$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{3n^2+1}\right)=-\infty;$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4n-\sqrt{4n^2+16}\right)=+\infty.$

3.2.9. A határértékek kiszámításánál felhasználjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0,\ \text{ha } |q|<1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty,\ \text{ha } q>1.$$

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6^n-8^n}{7^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{6}{7}\right)^n-\left(\frac{8}{7}\right)^n\right]=-\infty;$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6^n-8^n}{7^n+9^n}=0;$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^n}{2^{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n+5^n}{8^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^n+\left(\frac{5}{8}\right)^n\right)=0;$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((0,4)^n-5\right)=-5;$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{2n-3}-4\cdot 6^{n+3}}{2^{4n+1}+8^{n+2}}=+\infty;$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}(-0,99999)^n=0;$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{2n+3}-7\cdot 5^{n+2}}{(-2)^{3n+1}+9^{n+2}}=\frac{1}{3};$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+3}+(-6)^{2n+2}}{6^{n+1}+5^{n-2}}=+\infty.$

3.2.10. A határértékek kiszámításánál felhasználjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1,$$

ha $c\in\mathbb{R}^+$.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\cdot 1=1.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{23}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{23}}{\sqrt[n]{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{23}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{1}=1.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3n^2}{31}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3n^2}}{\sqrt[n]{31}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n})^2}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{31}}=1.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\dfrac{5n^2}{13}}+\sqrt[n]{\dfrac{5}{n^4}}\right)=1+1=2.$

3.2.11. $n \geq 2$ esetén

$$1<\sqrt[n^2]{n}=\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}<\sqrt[n]{n}.$$

A rendőr-elv alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}1=1.$$

3.2.12. A rendőr-elvet alkalmazzuk. Nyilvánvaló, hogy

$$1<\sqrt[3n^2]{n^2+2n+4}<\sqrt[n]{7n^2}=\sqrt[n]{7}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2=1\cdot 1^2=1,$$

azonnal adódik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3n^2]{n^2+2n+4}=1.$$

3.2.13. Először nemnegatív k egész számokra igazoljuk az állítást. $k=0$ esetén az állítás nyilvánvalóan teljesül. $k\in\mathbb{N}$ esetén három lépésben teljes indukcióval bizonyítunk.

(1) $k=1$ esetén az e szám definíciója miatt az állítás igaz.

(2) Tegyük fel, hogy $k\geq 0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n=e^k.$

(3) Bizonyítunk $(k+1)\in\mathbb{N}$ esetén.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1+k}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{n+1+k}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n+1}}\right]=e^k\cdot e\cdot 1=e^{k+1}.$$

Itt felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n=e^k$. Ez nyilvánvalóan igaz, mert a $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat részsorozata az $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak.

Legyen mos k negatív egész szám. Ekkor végezzük el az alábbi átalakítást:

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=\frac{1}{\left(\frac{n+k-k}{n+k}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{-k}{n+k}\right)^{-k}\cdot\left(1+\frac{-k}{n+k}\right)^{n+k}}.$$

Azonnal adódik, hogy $n > |k|$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \frac{1}{1\cdot e^{-k}} = e^k.$$

3.2.14. A határértékek kiszámításánál felhasználjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha,$$

ha $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{4n}\right)^n = -\frac{1}{\sqrt[4]{e^5}}.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n}\right)^{2n} = (e^6)^2 = e^{12}.$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+4}{5n-1}\right)^{n+1} = e.$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{3n+2} = e^9.$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+2} = e^2.$

3.2.15. A határértékek kiszámításánál felhasználjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha,$$

ha $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{4}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = +\infty.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-\sqrt{2}}{5n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-\sqrt{2})}{n}\right)^n = 0.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} = e.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n} = \dfrac{1}{e}.$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = 0.$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3-\dfrac{6}{n}\right)^{4n-2} = +\infty.$

3.2.16. A sorozat általános tagját a Bernoulli-egyenlőtlenséggel becsüljük:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1+\sqrt{n}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\sqrt{n}\right) = +\infty$, így

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = +\infty.$$

A sorozat divergál $+\infty$-hez.

3.2.17. A határértékek kiszámításánál felhasználjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha},$$

ha $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)^{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n} = e.$

(b) Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} < \dfrac{1}{2}$, így valamely $n \in \mathbb{N}$ indextől teljesül, hogy

$$0 < \left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \frac{1}{2}.$$

Ezért, a rendőr elv miatt:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right)^n \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{3n}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n+1} \cdot \left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{2n+1}{n}} = 0 \cdot e^{-2} = 0.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e} \cdot e = 1.$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n = 1.$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n = e^{-2}.$

3.2.18. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$

3.2.19. Minden konvergens valós számsorozat Cauchy-sorozat, így elegendő megmutatni, hogy az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak van véges határértéke. Nyilvánvaló, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, hogy

$$\sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{2}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1$, így a rendőr-elv értelmében

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Emiatt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1\cdot 1 = 1,$$

azaz a sorozat konvergens, tehát Cauchy-sorozat is.

3.2.20. A sorozat divergens, mert két torlódási pontja van:

$$t_1 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = e^2 \qquad \text{és} \qquad t_2 = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} = \frac{1}{e^2}.$$

3.2.21. A sorozatok általános tagjának zárt alakját teljes indukciós bizonyítás segítségével lehet igazolni a sejtések kialakítását követően.

(a) A sorozat általános tagja:

$$a_n = \frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3} = \frac{(n+1)n(2n-1)}{n^3} = \frac{2n^3-3n^2+n}{n^3}.$$

A sorozat konvergens és határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2.$

(b) A sorozat általános tagja:

$$b_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

A sorozat konvergens és határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1.$

(c) A sorozat általános tagja:

$$c_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \frac{n-1}{2n}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}.$$

A sorozatnak két torlódási pontja van:

$$t_1 = -\frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Emiatt a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat divergens.

(d) Vizsgáljuk az $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat monotonitását!

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

így $d_{n+1} < d_n$, a sorozat tehát szigorúan monoton csökkenő. A sorozat minden eleme pozitív, ezért a sorozat alulról korlátos. Mivel a $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konnvergens.

3.3.1. A bizonyítás teljes indukcióval történik.

(1) $n = 1$-re $a_1 = 2 - 1 = 1$ adódik, ami igaz.

(2) Feltesszük, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás:

$$a_k = 2^k - 1.$$

(3) Bizonyítandó: $a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$. A képzési szabályt és a feltételt felhasználva:

$$a_{k+1} = 2\cdot(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Az állítás tehát igaz.

3.3.2. Képezzük a sorozat első öt elemét!

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = \frac{5}{3}, \qquad a_3 = \frac{7}{5}, \qquad a_4 = \frac{9}{7}, \qquad a_5 = \frac{11}{9}.$$

Az a sejtésünk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos. Először teljes indukcióval azt igazoljuk, hogy az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak 1 alsó korlátja.

(1) $n = 1$-re $a_1 = 3 > 1$, tehát az állítás igaz.

(2) Feltesszük, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás:

$$a_k > 1.$$

(3) Bizonyítandó: $a_{k+1} > 1$. A képzési szabályt és a feltételt felhasználva:

$$a_{k+1} = 2 - \frac{1}{a_k} > 2 - 1 = 1,$$

mert a feltétel szerint $a_k > 1$, azaz $\frac{1}{a_k} < 1$. Az állítás tehát igaz, a sorozat alulról korlátos.

Azt is teljes indukcióval igazoljuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

(1) Nyilvánvaló, hogy $a_1 > a_2$ teljesül.

(2) Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén:

$$a_k < a_{k-1}, \qquad \text{azaz} \qquad a_k - a_{k-1} < 0.$$

(3) Bebizonyítjuk, hogy $a_{k+1} < a_k$. A képzési szabályt és a feltételt felhasználva:

$$a_{k+1} - a_k = \left(2 - \frac{1}{a_k}\right) - \left(2 - \frac{1}{a_{k-1}}\right) = \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} \cdot a_k} < 0,$$

mert $a_{k-1} \cdot a_k > 1$, hiszen a sorozat minden eleme 1-nél nagyobb, valamint a feltétel szerint $a_k - a_{k-1} < 0$. Az állítás tehát igaz, a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos, így konvergens.

3.3.3. Képezzük a sorozat első öt elemét!

$$a_1 = 4, \qquad a_2 = \frac{7}{2}, \qquad a_3 = \frac{23}{8}, \qquad a_4 = \frac{283}{128}, \qquad a_5 = \frac{54004}{32768}.$$

A sorozat minden eleme pozitív. Az a sejtésünk alakulhat ki, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos. Először teljes indukcióval igazoljuk, hogy az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak 1 alsó korlátja.

(1) $n = 1$-re $a_1 = 4 > 1$, tehát az állítás igaz.

(2) Feltesszük, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás:

$$a_k > 1.$$

(3) Bizonyítandó, hogy $a_{k+1} > 1$ teljesül. A képzési szabályt és a feltételt felhasználva:

$$a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 5}{6} > \frac{1+5}{6} = 1,$$

mert a feltétel szerint $a_k > 1$, emiatt $a_k^2 > 1$. Az állítás tehát igaz, a sorozat alulról korlátos.

Azt is teljes indukcióval igazoljuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

(1) A sorozat második eleme: $a_2 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$. Nyilvánvaló, hogy $a_1 > a_2$ teljesül.

(2) Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén:

$$a_k < a_{k-1}, \qquad \text{azaz} \qquad a_k - a_{k-1} < 0.$$

(3) Bebizonyítjuk, hogy $a_{k+1} < a_k$. A képzési szabályt és a feltételt felhasználva:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{a_k^2 + 5}{6} - \frac{a_{k-1}^2 + 5}{6} = \frac{1}{6} \cdot (a_k^2 - a_{k-1}^2) < 0,$$

mert $a_k^2 - a_{k-1}^2 = (a_k + a_{k-1})(a_k - a_{k-1}) < 0$, hiszen a sorozat minden eleme pozitív, így $a_k + a_{k-1} > 0$ továbbá a feltétel szerint $a_k - a_{k-1} < 0$. Az állítás tehát igaz, a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos, emiatt konvergens.

3.3.4. Képezzük a sorozat első hat elemét! Ismert, hogy $a_1 = 0$ és $a_2 = 1$. Alkalmazzuk az $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ rekurziós összefüggést a további elemek képzéséhez!

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2},\\
a_4 &= \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4},\\
a_5 &= \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{8} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8},\\
a_6 &= \frac{\frac{5}{8}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{11}{16} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Sejtésünk az, hogy a sorozat általános elemét az n változó függvényeként az alábbi összefüggéssel tudjuk megadni:

$$a_{n+2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

A bizonyítást három lépésben teljes indukcióval végezzük.

(1) Az állítás az a_3, a_4, a_5 és a_6 tagok esetén teljesül.

(2) Tegyük fel, hogy a_n és a_{n+1} esetén az állítás igaz, azaz

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}} \text{ ill. } a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

(3) Bebizonyítjuk, hogy $a_{n+2} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{(-1)^n}{2^n}$. A feltételeket felhasználva:

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2},$$

azaz

$$a_{n+2} = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}}{2} =$$

$$= \frac{2 - 1 + \frac{1}{2} + ... + 2\frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}}{2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n}}{2^{n}}.$$

Az állítást tehát igazoltuk.

Az általános tag egy $q = -\frac{1}{2}$ kvóciensű mértani sorozat n-edik részletösszege, azaz

$$a_{n+2} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Így

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{2}{3},$$

mert $\lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0.$

3.3.5. Írjuk fel a sorozat első három tagját!

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \qquad a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

Sejtésünk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő. Igazoljuk teljes indukcióval!

(1) $a_1 < a_2$, mert $a_1^2 = 2 < 2 + \sqrt{2} = a_2^2$.

(2) Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$a_n < a_{n+1}.$$

(3) Bizonyítjuk, hogy $a_{n+1} < a_{n+2}$. A feltételből adódik, hogy

$$a_n + 2 < a_{n+1} + 2,$$

így:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} < \sqrt{a_{n+1} + 2} = a_{n+2}.$$

Az állítás tehát igaz, a sorozat szigorúan monoton növekvő.

Igazoljuk, hogy a sorozat felülről korlátos. Teljes indukcióval bizonyítunk!

(1) $a_1 < 2$ nyilvánvalóan teljesül.

(2) Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén:
$$a_n < 2.$$

(3) Bizonyítjuk, hogy $a_{n+1} < 2$. A feltételből adódik, hogy
$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2+2} = 2.$$
Az állítás tehát igaz, a sorozat felülről korlátos.

A sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, tehát konvergens.

3.3.6. $b > 0$ rögzített valós szám, továbbá az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat az alábbi rekurzióval adott:
$$a_1 > 0 \text{ tetszőleges valós szám} \qquad \text{és} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right).$$

(a) A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva becsüljük a_{n+1}-et, ha $n \geq 1$. Ekkor:
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{b}{a_n}} = \sqrt{b},$$
azaz $a_n \geq \sqrt{b}$, ha $n \geq 2$, vagyis a sorozat alulról korlátos.

(b) Azt kell megmutatnunk, hogy a sorozat monoton csökkenő. Ehhez felhasználjuk az (a) rész eredményét:
$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n^2 - b}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a_n - \sqrt{b}) \cdot (a_n + \sqrt{b})}{a_n} \geq 0,$$
ha $n \geq 2$.

(c) Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens, mert monoton csökkenő és alulról korlátos. Legyen
$$\lim_{n\to\infty} a_n = x.$$
A sorozatot definiáló rekurziós egyenlet mindkét oldalának határértékét véve azt kapjuk, hogy
$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{b}{x}\right),$$
amiből $x \geq \sqrt{b}$ miatt
$$x = \sqrt{b}$$
adódik, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{b}$.

4 Egyváltozós valós függvények

4.1 Korlátosság és monotonitás

4.1.1. Vizsgálja meg az alábbi függvényeket korlátosság szempontjából!

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax + b, \qquad$ ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$;

(b) $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = 6 - x^4$;

(c) $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{1}{x}$;

(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

(e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

4.1.2. Adjon meg olyan $A \in \mathbb{R}$ valós paramétert, hogy az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények korlátosak legyenek!

(a) $f_1(x) = 5 - Ax^3$;

(b) $f_2(x) = \dfrac{A}{x - 3}$;

(c) $f_3(x) = \cos(x + A)$;

(d) $f_4(x) = \sqrt{|x + A|}$.

4.1.3. Vizsgálja meg a következő függvényeket monotonitás szempontjából!

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax + b, \qquad$ ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$;

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 + 2x + 3$;

(c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = [x]$;

(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

4.2 Páros és páratlan függvények

4.2.1. Van-e páros vagy páratlan függvény az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények között?

(a) $f_(x) = x^2 - 3x$;

(b) $f_2(x) = x^3 - 3x$;

(c) $f_3(x) = x^4 - 3x$;

(d) $f_4(x) = x^4 - 3x^2$;

(e) $f_5(x) = |x| + 2$;

(f) $f_6(x) = |x + 2|$;

(g) $f_7(x) = 3^x$;

(h) $f_8(x) = 3^x + 3^{-x}$;

(i) $f_9(x) = 3^x - 3^{-x}$;

(j) $f_{10}(x) = \dfrac{3^x - 1}{3^x + 1}$.

4.2.2. Igazolja, hogy

(a) két páros függvény összege páros;

(b) két páratlan függvény összege páratlan;

(c) két páros függvény szorzata páros;

(d) kát páratlan függvény szorzata páros.

4.2.3. Adjon meg olyan páros és olyan páratlan függvényt, amelyeknek

(a) az összege páros;

(b) az összege páratlan;

(c) a szorzata páros;

(d) a szorzata páratlan.

4.2.4. Adjon meg olyan $p \in \mathbb{R}$ valós paramétert, hogy az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények párosak legyenek!

(a) $f_1(x) = 2x^6 - px^4 + 3x^2 + 1$;

(b) $f_2(x) = 5x^4 + px^3 - 3x^2$;

(c) $f_3(x) = (x^2 + px - 1)^2$;

(d) $f_4(x) = (x^3 - x + p)(x^3 + x + p)$.

4.2.5. Határozza meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyik páros és páratlan is!

4.3 Periodikus függvények

4.3.1. Bizonyítsa be, hogy az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ raconális}, \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

Dirichlet-féle függvénynek minden 0-tól különböző racionális szám periódusa! Van-e olyan irracionális szám, amelyik periódusa f-nek?

4.3.2. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre valamely $p \neq 0$ valós számmal

$$f(x + p) = -f(x)$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Bizonyítsa be, hogy az f függvény $2p$ szerint periodikus!

4.3.3. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyhez van olyan $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, hogy

$$f(a - x) = f(a + x) \qquad \text{és} \qquad f(b - x) = f(b + x)$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Bizonyítsa be, hogy f periodikus!

4.3.4. A valós számok halmazán értelmezett f függvényre fennáll, hogy

$$f(x + 1) + f(x - 1) = \sqrt{2} f(x),$$

ha $x \in \mathbb{R}$. Igazolja, hogy f peridikus függvény!

4.4 Szakaszonként lineáris függvények

4.4.1. Mely valós számokra igaz, hogy

(a) $\operatorname{sgn} x = x$;

(b) $\operatorname{sgn} x < x$;

(c) $\operatorname{sgn} x > x$;

(d) $|\operatorname{sgn} x| = |x|$;

(e) $|\operatorname{sgn} x| < |x|$;

(f) $|\operatorname{sgn} x| > |x|$.

4.4.2. Adja meg az összes olyan $x \in \mathbb{R}$ számot, amelyre az

$$\frac{1}{1+\operatorname{sgn} x} = \frac{1}{1-(\operatorname{sgn} x)^2}$$

egyenlőség fennáll!

4.4.3. Vázolja az alábbi egyváltozós valós függvényeket!

(a) $f_1(x) = \operatorname{sgn} x + \dfrac{1}{2}$;

(b) $f_2(x) = x \operatorname{sgn} x$;

(c) $f_3(x) = 2\operatorname{sgn}(x+2) + \operatorname{sgn}(1-x)$;

(d) $f_4(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 5x + 6)$;

(e) $f_5(x) = -x + \operatorname{sgn} x$;

(f) $f_6(x) = x\,(\operatorname{sgn} x)^2$.

4.4.4. Ábrázolja és jellemezze a következő függvényeket!

(a) $g_1(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

(b) $g_2(x) = |x+4| - 2$;

(c) $g_3(x) = |x+2| - |x-3|$;

(d) $g_4(x) = \left|\dfrac{2}{3}x - 4\right| + \left|\dfrac{1}{3}x + 1\right|$;

(e) $g_5(x) = |9 - x^2| - 2$;

(f) $g_6(x) = ||9 - x^2| - 2|$;

(g) $g_7(x) = 2\,|x-2| - \operatorname{sgn}(x+1)$.

4.4.5. Ábrázolja és jellemezze a következő függvényeket!

(a) $h_1(x) = [x] - x$;

(b) $h_2(x) = x + [x]$;

(c) $h_3(x) = [x-1] + 1$;

(d) $h_4(x) = -[x+2] + 2$;

(e) $h_5(x) = [x]^2$;

(f) $h_6(x) = [x]^2 + [-x]$;

(g) $h_7(x) = x \cdot [x]$;

(h) $h_8(x) = [x] + [-x]$;

(i) $h_9(x) = x + \{x\}$

(j) $h_{10}(x) = \left\{\dfrac{1}{x}\right\}$.

4.4.6. Meghatározható-e az $A \in \mathbb{R}$ paraméter értéke úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x] + A$ függvény páratlan legyen?

4.5 Függvények határértéke

4.5.1. Döntse el a definíció alapján, hogy az alábbi függvényeknek létezik-e határértéke az $x_0 = 0$ pontban!

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \operatorname{sgn} x$;

4.5.2. Bizonyítsa be, hogy $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} (2x-5) = -1$ úgy, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz megadunk egy jó δ-t!

4.5.3. Ha be szeretné látni, hogy $\lim\limits_{x \longrightarrow 3} (2+5x) = 17$ és adott egy ε, melyik a legnagyobb δ, amit használhat?

4.5.4. Az $f(x) = \dfrac{5}{2-x}$ függvény az $x_0 = 2$ helyen nincs értelmezve. Közelítse meg az $x_0 = 2$-t először az $\left\{x_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 + \dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozattal, majd az $\left\{x_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2 + \dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozattal, és határozza meg a megfelelő függvényértékek sorozatának határértékét. Értelmezze az eredményt!

4.5.5. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

(b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-25}{x-5}$;

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$;

(d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-x-12}{x-4}$;

(e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1}$;

(f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-5x^2+2x-4}{x^2-3x+3}$;

(g) $\lim\limits_{x \to -a} \dfrac{a^2-x^2}{x^3-a^3}$;

(h) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+1}$;

(i) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$;

(j) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^2+3x-1}{2x^2-x+1}$.

4.5.6. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4} \right)$;

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$;

(c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

(d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$;

(e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

(f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}$;

(g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3+2}{\sqrt{x^4-2}}$;

(h) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$;

(j) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$.

4.5.7. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^5 - x^2 + 2x + 6)$;

(b) $\lim\limits_{x\to1}(4x^3 - 2x^2 + 3x + 2)$;

(c) $\lim\limits_{x\to0}5x^2$;

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4 + 3x^3 - 1)$;

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}$;

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

4.5.8. Számítsa ki az alábbi határértékeket! A feladatok megoldásakor a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a, \qquad a \in \mathbb{R}$$

határérték felhasználásával és alkalmas átalakításokkal járhat el a legcélszerűbben.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{1+2x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{1+2x}\right)^{x+2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^3-1}\right)^{\frac{x^3}{2}}$;

(d) $\lim\limits_{x\to0+0}(1+3\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

4.5.9. Számítsa ki az alábbi határértékeket! A feladatok megoldásakor a

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

határérték felhasználásával és alkalmas átalakításokkal járhat el a legcélszerűbben.

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin^2\dfrac{x}{4}}{x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}$;

(h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

4.5.10. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 7x-2, & \text{ha } x \ge 2, \\ 3x+5, & \text{ha } x < 2 \end{cases}$$

függvény. Határozza meg a $\lim\limits_{x\to2+0}f(x)$ és $\lim\limits_{x\to2-0}f(x)$ féloldali határértékeket! Értelmezze az eredményt!

4.5.11. Határozza meg a $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{|x|}{x}$ és a $\lim\limits_{x\to0-0}\dfrac{|x|}{x}$ féloldali határértékeket! Értelmezze az eredményt!

4.5.12 . Határozza meg a $\lim\limits_{x\to 4+0} \dfrac{3}{x-4}$ és a $\lim\limits_{x\to 4-0} \dfrac{3}{x-4}$ féloldali határértékeket! Értelmezze az eredményt!

4.5.13 . Határozza meg a $\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{1}{x^2-7x+12}$ és a $\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{1}{x^2-7x+12}$ féloldali határértékeket! Értelmezze az eredményt!

4.5.14. Van-e határértéke az $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ függvénynek az $x_0 = 0$ helyen?

4.5.15. Adott az $f(x) = e^x \operatorname{sgn}(1-x)$ függvény. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$;

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$;

(d) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$;

(e) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

4.5.16. Számolja ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin 2x)\cdot \operatorname{tg} 3x}{5x^2 \cdot \cos x} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{(\sin 2x)\cdot \operatorname{tg} 3x}{5x^2 \cdot \cos x}$$

határértékeket!

4.5.17. Számolja ki a

$$\lim_{x\to 0} \left[\left(2x - \frac{3x^2}{\sin 4x}\right)\cdot \operatorname{ctg} x\right]$$

határértéket!

4.5.18. Határozza meg a

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-1} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-1}$$

határértékeket!

4.6 Függvények folytonossága, szakadási helyek

4.6.1. Van-e olyan $x_0 \in \mathbb{R}$, amelyre az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

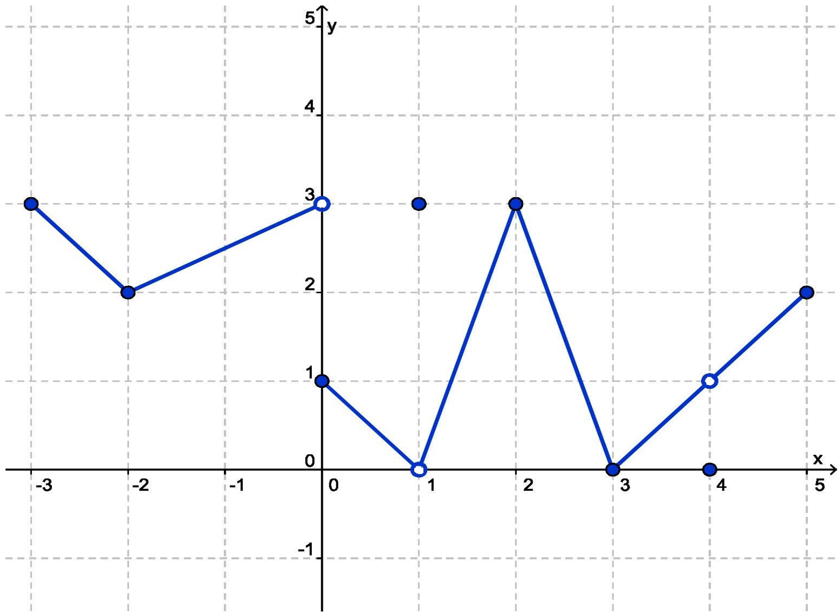
függvény folytonos?

4.6.2. Ábrázolja az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 + 4x)$$

függvényt! Folytonos-e a függvény az $x_0 = -4$ helyen?

4.6.3. Határozza meg az alábbi $f : [-3, 5] \to [0, 3]$ függvény szakadási pontjait!



4.6.4. Határozza meg a $C \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & \text{ha } \; x \neq 4, \\ C, & \text{ha } \; x = 4 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen!

4.6.5. Határozza meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } \; x \geq 2, \\ 2x - 1, & \text{ha } \; 1 < x < 2, \\ x - 1, & \text{ha } x \leq 1 \end{cases}$$

függvény szakadási pontjait!

4.6.6. Folytonos-e az $f(x) = [x]$ függvény a $[3, 4]$ intervallumon?

4.6.7. Határozza meg a $C, D \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & \text{ha } \; x < 0, \\ Cx + D, & \text{ha } \; 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x + 8}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény mindenhol folytonos legyen!

4.6.8. Hol és milyen szakadása van az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [2x] - 2x + 2$ függvénynek?

4.6.9. Állítsa elő az $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ függvény $x_0 = 0$ szakadási helyhez tartozó

(a) bal oldali határértékét;

(b) jobb oldali határértékét.

(c) Állapítsuk meg, hogy a függvénynek milyen szakadása van ezen a helyen!

(d) Vázoljuk fel a függvényt!

4.6.10. Állapítsa meg, hogy milyen szakadása van az

$$f(x) = 2^{\operatorname{tg} x} \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

függvénynek az $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ helyen és vázolja a függvényt!

4.6.11. Hol és milyen szakadása van az $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x}$ egyváltozós valós függvénynek?

4.6.12. Meg lehet-e adni az $A, B \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az alábbi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos legyen a valós számok halmazán?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{3x(x^2+2)}, & \text{ha } -\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4} \text{ és } x \neq 0, \\ A, & \text{ha } x = 0, \\ B, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

4.6.13. Megválasztható-e úgy az $A \in \mathbb{R}$ paraméter, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & \text{ha } x \neq 0, \\ A, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen a valós számok halmazán? Vázolja a függvény grafikonját!

4.6.14. Folytonos-e az $x_0 = 0$ helyen az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^2 \cdot \operatorname{ctg} 6x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 6, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény! Hol nem folytonos f?

4.6.15. Megválasztható-e úgy az $A \in \mathbb{R}$ paraméter, hogy az $f : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{x+1}{2}, & \text{ha } x < -1, \\ A \cdot \operatorname{sgn} \sqrt[3]{x-3}, & \text{ha } -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen az $x_0 = -1$ helyen?

4.6.16. Milyen $A \in \mathbb{R}$ paraméter esetén folytonos az $f : \left[-\frac{2}{7}, +\infty\right) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{7x+2} - \sqrt{6x+4}}{x-2}, & \text{ha } x \geq -\dfrac{2}{7} \text{ és } x \neq 2, \\ A, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

függvény?

4.6.17. Ábrázolja az

$$f(x) = \begin{cases} |\sin 2x|, & \text{ha } x > 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0, \\ 2^x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvényt! Adja meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét! Folytonos-e a függvény? Ha nem, akkor milyen típusú szakadása van?

4.6.18. Ábrázolja az

$$f(x) = \begin{cases} 2 - e^{-x}, & \text{ha } x > 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0, \\ \cos 2x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvényt! Adja meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét! Folytonos-e a függvény? Ha nem, akkor milyen típusú szakadása van?

4.6.19. Folytonos-e az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény?

4.6.20. Vázolja az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{ha } x \leq 0, \\ (1-x)^2, & \text{ha } 0 < x \leq 2, \\ 4 - x, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

függvényt! Folytonos-e a függvény? Ha nem, akkor milyen típusú szakadása van?

4.7 Racionális egész és törtfüggvények

4.7.1. Vázolja az alábbi racionális egész függvényeket!

(a) $f_1(x) = x - x^3$;

(b) $f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;;

(c) $f_3(x) = (x-1)(x+2)^2$;

(d) $f_4(x) = x^3(1-x^2)(1+x)$;

(e) $f_5(x) = (x^4 - 3x^3)(x+2)^2$;

(f) $f_6(x) = 2x^2 - x^4$.

4.7.2. Vázolja a következő racionális törtfüggvények grafikonját!

(a) $f_1(x) = \dfrac{x+1}{x^2(2-x)}$; (b) $f_2(x) = \dfrac{x-2}{x^3(x+2)}$;

(c) $f_3(x) = \dfrac{x^2-4}{(x+2)(x-1)^2}$; (d) $f_4(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

(e) $f_5(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$; (f) $f_6(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$;

(g) $f_7(x) = \dfrac{1+x^3}{x^2}$; (h) $f_8(x) = 2x - \dfrac{1}{x-1}$;

(i) $f_9(x) = \dfrac{x^4-1}{(x+1)^2}$; (j) $f_{10}(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$;

(k) $f_{11}(x) = x + \dfrac{1}{x+2}$; (l) $f_{12}(x) = x - \dfrac{x^2-1}{x+1}$;

(m) $f_{13}(x) = \dfrac{(x-2)^2x}{x^2-3x+2}$; (n) $f_{14}(x) = \dfrac{x^2(x-3)(x+1)}{x^2-4}$.

4.7.3. Vázolja a $g : \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x}{2x^3 + 6x^2 - 2x - 6}$$

függvény grafikonját! Hol és milyen szakadása van a függvénynek?

4.7.4. Megválasztható-e az $A, B \in \mathbb{R}$ paraméterek értéke úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - 2x^2 - 12x}{x^3 - 3x^2 - 10x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 5\}, \\ A, & \text{ha } x = -2, \\ B, & \text{ha } x = 5 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen a valós számok halmazán?

4.7.5. Megválasztható-e az $A, B \in \mathbb{R}$ paraméterek értéke úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \\ A, & \text{ha } x = 1, \\ B, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen a valós számok halmazán? Adja meg a függvény határértékét $-\infty$-ben és $+\infty$-ben!

4.7.6. Megválasztható-e az $A, B, C \in \mathbb{R}$ paraméterek értéke úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 9x}{2x^3 + 6x^2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}, \\ A, & \text{ha } x = -3, \\ B, & \text{ha } x = 0, \\ C, & \text{ha } x = 3 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen a valós számok halmazán?

4.7.7. Megválasztható-e az $A, B, C \in \mathbb{R}$ paraméterek értéke úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2}, & \text{ha } x \neq 0, \text{ és } x \neq -1 \\ A, & \text{ha } x = -1, \\ B, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen a valós számok halmazán?

4.8 Trigonometrikus függvények és inverzeik

4.8.1. Vázolja az alábbi függvények grafikonját!

(a) $f_1(x) = \cos 3x$;

(b) $f_2(x) = 1 - \sin 4x$;

(c) $f_3(x) = 2 \sin x + \cos x$;

(d) $f_4(x) = \cos x - \sin x$.

4.8.2. Vázolja az alábbi függvények grafikonját!

(a) $f_1(x) = \sin(\arcsin x)$;

(b) $f_2(x) = \arcsin(\sin x)$;

(c) $f_3(x) = \cos(\arccos x)$;

(d) $f_4(x) = \arccos(\cos x)$;

(e) $f_5(x) = \cos(\arcsin x)$;

(f) $f_6(x) = \cos(3 \arccos x)$;

(g) $f_7(x) = \arcsin(x - 4)$;

(h) $f_8(x) = \pi - \arccos(x + 2)$.

4.8.3. Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét pontosan!

(a) $\sin\left(\arccos \dfrac{4}{5}\right)$;

(b) $\operatorname{tg}\left(\arccos \dfrac{5}{13}\right)$;

(c) $\cos\left(\arcsin \dfrac{3}{5} + \arccos \dfrac{1}{3}\right)$;

(d) $\sin\left(\arccos \dfrac{1}{5} - \operatorname{arctg} 2\right)$.

4.8.4. Igazolja, hogy

(a) $2 \operatorname{arctg} 10 + \arcsin \dfrac{20}{101} = \pi$; (b) $\arccos \sqrt{\dfrac{2}{3}} - \arccos \dfrac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$.

4.8.5. Igazolja az

$$\arcsin x + \arccos x = 1$$

azonosságot!

4.8.6. Vázolja az alábbi függvények grafikonját!

(a) $f_1(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$; (b) $f_2(x) = \sqrt{-\operatorname{arctg}(x-1)}$;

(c) $f_3(x) = \sin^2(\operatorname{arctg} x)$; (d) $f_4(x) = \cos^2(\operatorname{arctg} x)$;

(e) $f_5(x) = \sin\left(\arcsin \dfrac{x+1}{2}\right)$; (f) $f_6(x) = x \cdot \operatorname{ctg}(\arcsin x)$;

(g) $f_7(x) = x \cdot \operatorname{tg}(\arccos x)$.

4.8.7. Készítse el az $f(x) = \operatorname{ctg} x + 1$ függvény grafikonját! Adja meg f egy bijektív leszűkítését és írja fel a leszűkített függvény inverzét és vázolja!

4.8.8. Adott az

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2x-1}, & \text{ha } x \le 0 \\ x + \pi, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény. A jobb és baloldali határértékek kiszámításával döntse el, hogy hol és milyen szakadási helye van a függvénynek! Számítsa ki a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ határértéket! Indokolja meg, hogy a $(-\infty, 0]$ intervallumon létezik f^{-1}! Írja fel az inverz függvényt, adja meg az értelmezési tartományát és az értékkészletét!

4.8.9. Írja fel az

$$f(x) = 2\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1, \qquad x \in (-\pi, 0)$$

függvény inverzét és vázolja az inverz függvényt!

4.8.10. Írja fel az

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2, \qquad x \in [0, \pi]$$

függvény inverzét és vázolja az inverz függvényt!

4.8.11. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

(a) $\arcsin x = \operatorname{arctg} x$; (b) $\arcsin x - \arcsin \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

4.9 Hiperbolikus függvények és inverzeik

4.9.1. Vázolja az alábbi függvényeket!

(a) $g_1(x) = \operatorname{sh}(3x - 9)$; (b) $g_2(x) = -2\operatorname{ch}(x + 2) - 4$;

(c) $g_3(x) = \operatorname{th}(x - 2) + 2$; (d) $g_4(x) = 1 + \operatorname{cth}(2x - 1)$;

(e) $g_5(x) = 2 + \operatorname{arsh}(x - 1)$; (f) $g_6(x) = \operatorname{arth}(2x)$.

4.9.2. Igazolja az alábbi összefüggéseket!

(a) $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$; (b) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$;

(c) $\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$; (d) $\operatorname{sh}(x - y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$;

(e) $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$; (f) $\operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$;

(g) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; (h) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$.

4.9.3. Fejezzük ki az alábbi függvényeket e-alapú logaritmussal!

(a) $f_1(x) = \operatorname{arsh} 2x$; (b) $f_2(x) = 2\operatorname{arsh} x;$;

(c) $f_3(x) = \operatorname{arsh}(x + 2)$; (d) $f_4(x) = 2 + \operatorname{arsh} x;$;

(e) $f_5(x) = 2\operatorname{arch} x$; (f) $f_6(x) = \operatorname{arth} 2x$.

4.9.4. Írja fel az alábbi függvényeket a legegyszerűbb alakban, majd vázolja őket!

(a) $f_1(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x)$; (b) $f_2(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{arch} x)$;

(c) $f_3(x) = \operatorname{arch}(\operatorname{ch} x)$; (d) $f_4(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{arch} x)$;

(e) $f_5(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)$; (f) $f_6(x) = 2\operatorname{ch}(\ln x)$;

(g) $f_7(x) = \operatorname{ch}(\ln 2x)$; (h) $f_8(x) = \operatorname{sh}(\ln x)$.

4.9.5. Számítsa ki az alábbi kifejezések pontos értékét!

(a) $\left(\ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{arch}1\right) \cdot \left(\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{2}\right)\right) - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} \cdot \arccos(-1)$;

(b) $\operatorname{sh}(\ln 2) + \ln 10 \cdot \lg e + \operatorname{arctg}\left(2 + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right)$;

(c) $\operatorname{ch}\left(2\operatorname{arsh}\frac{4}{3}\right)$;

(d) $\operatorname{ch}(\ln 2) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arch} 1 + \operatorname{arcctg} 0$;

(e) $\operatorname{sh}\left(2\operatorname{arch}\dfrac{5}{3}\right)$;

(f) $\operatorname{sh}\left(\operatorname{arth}\dfrac{1}{7}+\operatorname{arcth}13\right)$;

(g) $\operatorname{ch}\left(\operatorname{arth}\dfrac{1}{8}-\operatorname{arsh}\dfrac{1}{3}\right)$.

4.9.6. Számítsa ki az alábbi függvényértékeket!

(a) $\operatorname{sh}2$;

(b) $\operatorname{ch}3$;

(c) $\operatorname{th}1$;

(d) $\operatorname{cth}1$;

(e) $\operatorname{sh}(\ln 5)$;

(f) $\operatorname{ch}(\ln 5)$;

(g) $\operatorname{th}(\ln 3)$;

(h) $\operatorname{cth}e$;

(i) $\operatorname{arsh}2$;

(j) $\operatorname{arch}1$;

(k) $\operatorname{arsh}e^2$;

(l) $\operatorname{arsh}\dfrac{1}{e}$;

(m) $\operatorname{arth}\dfrac{1}{2}$;

(n) $\operatorname{arcth}2$;

(o) $\operatorname{arth}\dfrac{1}{e}$;

(p) $\operatorname{arcth}\dfrac{e^2+1}{e^2-1}$.

4.9.7. Igazolja, hogy

$$3\operatorname{arch}\frac{5}{4}-2\operatorname{arcth}97=0.$$

4.9.8. Igazolja, hogy fennáll az alábbi egyenlőség!

$$\operatorname{arsh}\frac{3}{4}=2\operatorname{arcth}3$$

4.9.9. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

(a) $\operatorname{arsh}x=\operatorname{arth}x$;

(b) $\operatorname{arsh}x=\operatorname{arch}x$;

(c) $\operatorname{arth}(x+2)-\operatorname{arth}(x+1)=-\operatorname{arcth}5$;

(d) $\operatorname{arsh}x=2\operatorname{arch}x$.

4.9.10. Hozza egyszerűbb alakra az

$$f(x)=\operatorname{arth}\frac{5x-3}{5-3x}$$

függvényt, majd vázolja a grafikonját!

4.10 Útmutatások és megoldások

4.1.1. A korlátosság definícióját használjuk a feladat megoldásakor.

(a) A függvény sem alulról sem felülről nem korlátos. Legyen például $a > 0$ és $K \in \mathbb{R}$. Mivel a valós számok halmaza felülről nem korlátos, így létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre

$$x > \frac{K-b}{a}$$

azaz

$$f(x) = ax + b > K,$$

tehát f felülről nem korlátos. Hasonlóképpen igazolható, hogy f alulról sem korlátos. Ha $a < 0$, akkor sincs sem felső, sem alsó korlát.

(b) Mivel $\forall x \in [0, +\infty)$ esetén $x^4 \geq 0$, ezért

$$6 - x^4 \leq 6,$$

tehát f felülről korlátos. Legyen $k \in \mathbb{R}$. Ekkor minden

$$x > \sqrt[4]{|6-k|}$$

valós számra teljesül, hogy

$$6 - x^4 < k,$$

azaz f alulról nem korlátos.

(c) f alulról korlátos, mert $\forall x \in (0, +\infty)$ esetén $f(x) > 0$, de f felülről nem korlátos.

(d) Az f függvény korlátos, mert $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $1 + x^2 \geq 1$, így $f(x) > 0$, azaz f alulról korlátos, továbbá $f(x) < 1$, vagyis f felülről is korlátos.

(e) Az f függvény korátos, mert $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

4.1.2. A feladat megoldása:

(a) $A = 0$.

(b) $A = 0$.

(c) Bármely $A \in \mathbb{R}$ esetén korlátos a függvény.

(d) Nincs a feltételnek megfelelő valós szám.

4.1.3. A monoton függvény definícióját használjuk a feladatok megoldásához.

(a) Legyen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 < x_2$. Ekkor

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1),$$

így $a > 0$ esetén $f(x_2) > f(x_1)$, tehát a függvény szigorúan monoton növekvő, mígy $a < 0$ esetén $f(x_2) < f(x_1)$, azaz f szigorúan monoton csökkenő.

(b) Legyen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 < x_2$. Ekkor

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + 2) = (x_2 - x_1)\left(\left(x_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 + 2\right) > 0,$$

azaz f szigorúan monoton növekvő $\mathbb{R}$-en.

(c) f monoton növekvő.

(d) Legyen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 < x_2$. Ekkor

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2(x_2 - x_1)(1 - x_1x_2}{(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)},$$

azaz f szigorúan monoton csökkenő a $(-\infty, -1]$ és az $[1, +\infty)$ intervallumon, mígy a $(-1, 1)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.

4.2.1. A páros és páratlan függvény definícióját használjuk a feladatok megoldásához.

(a) Az f_1 függvény nem páros és nem páratlan, mert $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_1(-x) = (-x)^2 - 3(-x) = x^2 + 3x \neq \pm f_1(x).$$

(b) Az f_2 függvény páratlan, mert $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_2(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f_2(x).$$

(c) Az f_3 függvény nem páros és nem páratlan, mert $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_3(-x) = (-x)^4 - 3(-x) = x^4 + 3x \neq \pm f_3(x).$$

(d) Az f_4 függvény páros, mert $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_4(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f_4(x).$$

(e) Az f_5 függvény páros, mert $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_5(-x) = |-x| + 2 = |x| + 2 = f_5(x).$$

(f) Az f_6 függvény nem páros és nem páratlan, , mert $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_6(-x) = |2 - x| =\neq \pm f_6(x).$$

(g) Az f_7 függvény nem páros és nem páratlan, , mert $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_7(-x) = 3^{-x} = \frac{1}{3^x} =\neq \pm f_7(x).$$

(h) Az f_8 függvény páros, mert $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_8(-x) = 3^{-x} + 3^{-(-x)} = 3^{-x} + 3^x = f_8(x).$$

(i) Az f_9 függvény páratlan, mert $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_9(-x) = 3^{-x} - 3^{-(-x)} = 3^{-x} - 3^x = -(3^x - 3^{-x}) = -f_9(x).$$

(j) Az f_{10} függvény páratlan, mert $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_{10}(-x) = \frac{3^{-x} - 1}{3^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{3^x} - 1}{\frac{1}{3^x} + 1} = \frac{1 - 3^x}{1 + 3^x} = -\frac{3^x - 1}{3^x + 1} = -f_{10}(x).$$

4.2.2. A páros és páratlan függvény definícióját használjuk a feladatok megoldásához.

(a) Legyenek $f, g : D_{f,g} \to \mathbb{R}$ páros függvények, azaz $\forall x \in D_{f,g}$ esetén $-x \in D_{f,g}$, továbbá

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{és} \qquad g(-x) = g(x).$$

Ekkor

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x).$$

Tehát két páros függvény összege is páros függvény.

(b) Legyenek $f, g : D_{f,g} \to \mathbb{R}$ páratlan függvények, azaz $\forall x \in D_{f,g}$ esetén $-x \in D_{f,g}$, továbbá

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{és} \qquad g(-x) = -g(x).$$

Ekkor

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -\big(f(x) + g(x)\big)(x) = -(f + g)(x).$$

Tehát két páratlan függvény összege is páratlan függvény.

(c) Legyenek $f, g : D_{f,g} \to \mathbb{R}$ páros függvények, azaz $\forall x \in D_{f,g}$ esetén $-x \in D_{f,g}$, továbbá

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{és} \qquad g(-x) = g(x).$$

Ekkor

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x).$$

Tehát két páros függvény szorzata is páros függvény.

(d) Legyenek $f, g : D_{f,g} \to \mathbb{R}$ páratlan függvények, azaz $\forall x \in D_{f,g}$ esetén $-x \in D_{f,g}$, továbbá

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{és} \qquad g(-x) = -g(x).$$

Ekkor

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot \big(-g(x) \big) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x).$$

Tehát két páratlan függvény szorzata páros függvény.

4.2.3. A páros és páratlan függvény definícióját használjuk a feladatok megoldásához.

(a) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges páros függvény, azaz $f(x) = f(-x)$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Legyen továbbá $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan páratlan függvény, amelyre $f + g$ páros függvény. Az

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) = (f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x),$$

csak akkor teljesül, ha

$$2g(x) = 0$$

vagyis

$$g(x) = 0.$$

(b) Legyen most $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges páratlan függvény, azaz

$$g(-x) = -g(x)$$

bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Legyen továbbá $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan páros függvény, amelyre $f + g$ páratlan függvény, azaz

$$(f + g)(-x) = -(f + g)(x) = -f(x) - g(x).$$

Az

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x) = -f(x) - g(x),$$

csak akkor teljesül, ha

$$2f(x) = 0$$

azaz

$$f(x) = 0.$$

(c) Egy páros és egy páratlan függvény szorzata mindig páratlan függvény, így nem adhatók meg a feltételeknek megfelelő függvények.

(d) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ páros függvény, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ páratlan függvény. A két függvény szorzata

$$fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (fg)(x) = x^3,$$

páratlan függvény.

4.2.4.

(a) Bármely $p \in \mathbb{R}$ esetén páros függvényt kapunk, mert páros függvények összege páros függvény.

(b) Csak $p = 0$ esetén lesz páros a függvény.

(c) Bármely $p \in \mathbb{R}$ esetén páros függvényt kapunk.

(d) Nincs a feltételnek megfelelő valós szám.

4.2.5. A feltétel szerint f páros és páratlan is, azaz

$$f(x) = f(-x) \qquad \text{és} \qquad f(x) = -f(-x)$$

egyszerre teljesül. Így

$$2f(x) = 0,$$

tehát

$$f(x) = 0$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

4.3.1. Legyen $r \in \mathbb{Q}, r \neq 0$. Ha $x \in \mathbb{Q}$, akkor

$$(x + r) \in \mathbb{Q},$$

míg $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ esetén

$$(x + r) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}),$$

ezért minden valós számra

$$f(x + r) = f(x),$$

vagyis r periódusa f-nek. Irracionális szám nem lehet periódusa a függvénynek, mert ha $p \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ periódusa lenne f-nek, akkor

$$0 = f(-p) = f(-p + p) = f(0) = 1$$

teljesülne, ami ellentmondás.

4.3.2. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x + 2p) = -f(x + p) = -\big(-f(x)\big) = f(x),$$

tehát igaz az állítás.

4.3.3. Legyen $p = 2(b - a)$. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x + p) = f(x + 2(b - a)) = f(b + (b + x - 2a)) = f(2a - x) = f(a + (a - x)) = f(x),$$

tehát f periodikus.

4.3.4. Írjuk át a feladatban szereplő egyenlőséget az alábbi alakba:

$$f(x + 1) = \sqrt{2}f(x) - f(x - 1).$$

Írjunk x helyére $(x+1)$-et és felhasználva az eredeti egyenletet az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$f(x+2) = \sqrt{2}f(x+1) - f(x) = \sqrt{2}\big(\sqrt{2}f(x) - f(x-1)\big) - f(x) = f(x) - \sqrt{2}f(x-1).$$

Írjunk az eredeti egyenletbe x helyére $(x+2)$-t és használjuk fel az $f(x+2)$-re és $f(x+1)$-re vonatkozó összefüggéseket. Ekkor

$$f(x+3) = \sqrt{2}\big(f(x) - \sqrt{2}f(x-1)\big) - \big(\sqrt{2}f(x) - f(x-1)\big) = -f(x-1).$$

Innen azonnal látszik, hogy

$$f(x+7) = -f(x+3) = f(x-1),$$

tehát f periodikus és periódusa 8.

4.4.1. A feladat megoldása:

(a) $H_1 = \{-1, 0, 1\}$; (b) $H_2 = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$;

(c) $H_3 = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$; (d) $H_4 = \{-1, 0, 1\}$;

(e) $H_5 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; (f) $H_6 = (-1, 1) \setminus \{0\}$.

4.4.2. Az egyenlet jobb oldalán álló kifejezés csak $x = 0$ esetén értelmezhető. Ekkor az egyenlőség fennáll, mert mindkét oldalon 1 adódik helyettesítési értékként.

4.4.3. Az $f : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$,

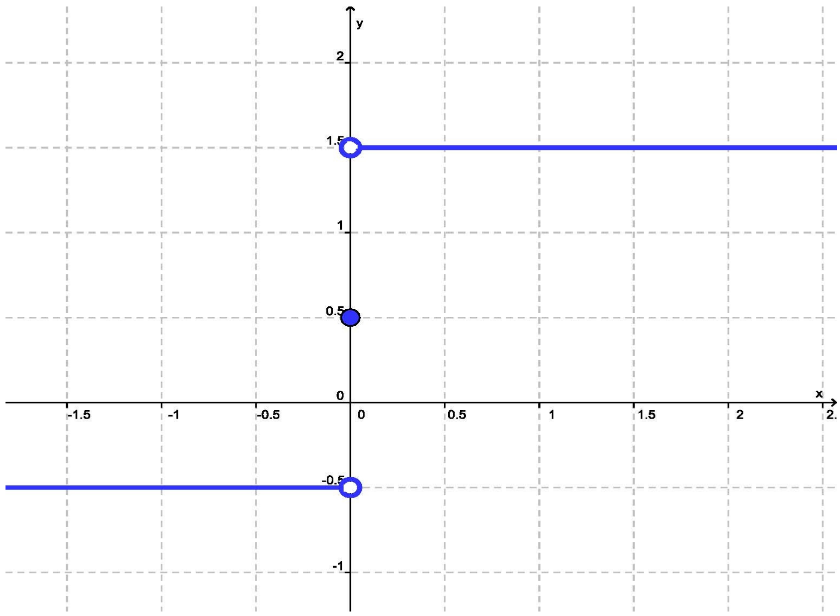
$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0; \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvényt *előjelfüggvénynek* nevezzük.

(a) Az $f_1 : \mathbb{R} \to \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$,

$$f_1(x) = \operatorname{sgn} x + \frac{1}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{ha } x < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 0; \\ \frac{3}{2}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény grafikonja két félegyenesből és egy diszkrét pontból áll. Az f_1 függvény korlátos, monoton növekvő, nem páros és nem páratlan.

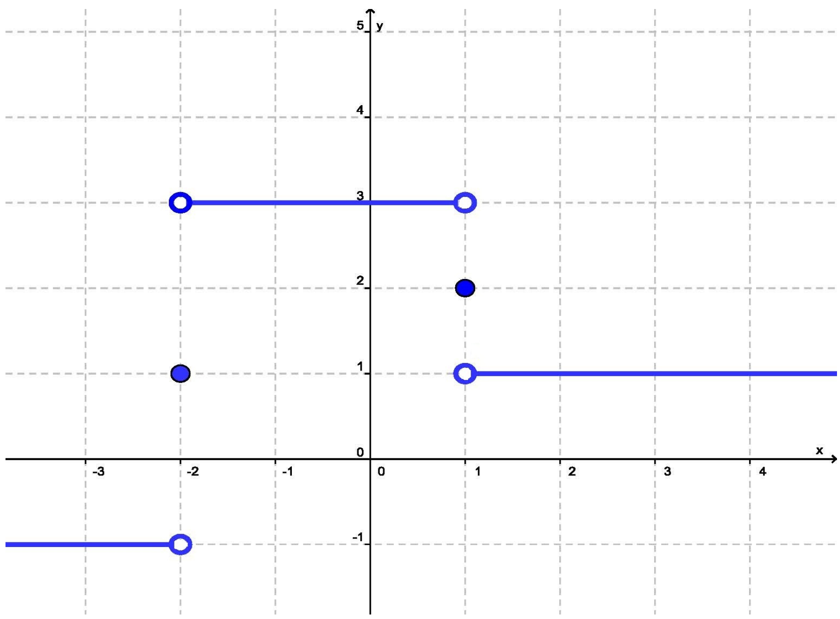


(b) $f_2(x) = x \operatorname{sgn} x = |x|$.

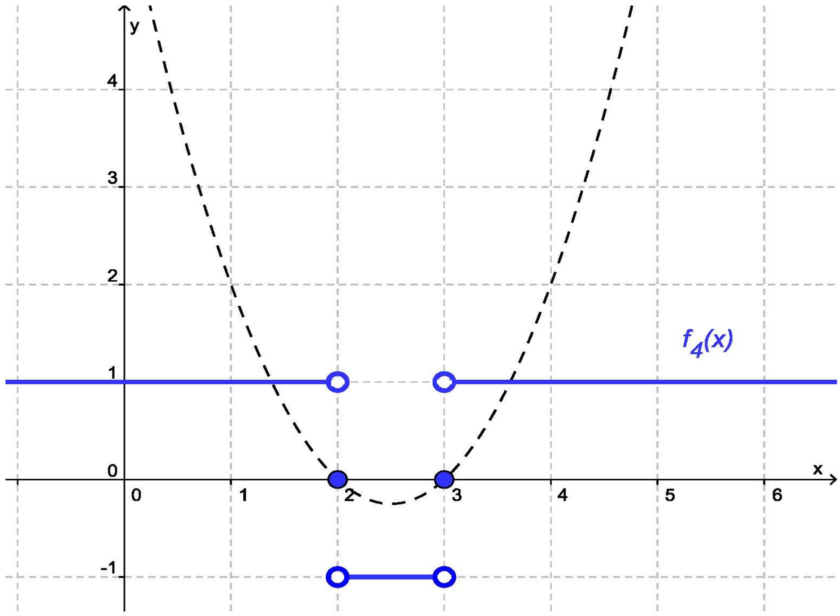
(c) Az $f_3 : \mathbb{R} \to \{-1, 1, 2, 3\}$,

$$f_3(x) = 2\operatorname{sgn}(x+2) + \operatorname{sgn}(1-x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } \; x < -2; \\ 1, & \text{ha } \; x = -2 \text{ vagy } x > 1; \\ 3, & \text{ha } \; -2 < x < 1 \\ 2, & \text{ha } \; x = 1 \end{cases}$$

függvény grafikonja:



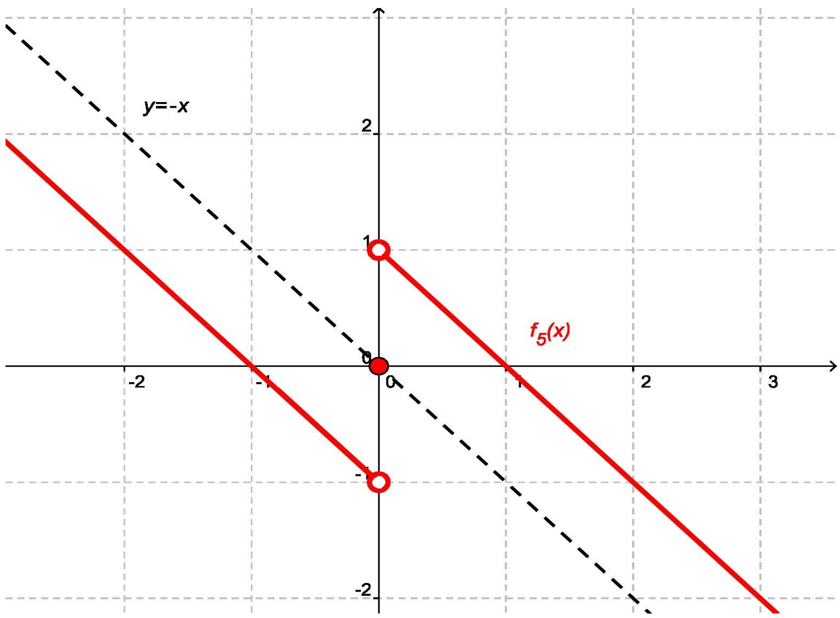
(d) Az $f_4 : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$, $f_4(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 5x + 6)$ függvény grafikonja:



(e) Az $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_5(x) = -x + \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -x + 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -x - 1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvény grafikonja:



(f) $f_6(x) = x\,(\operatorname{sgn} x)^2 = x$, tehát a függvény grafikonja az $y = x$ egyenes, mert

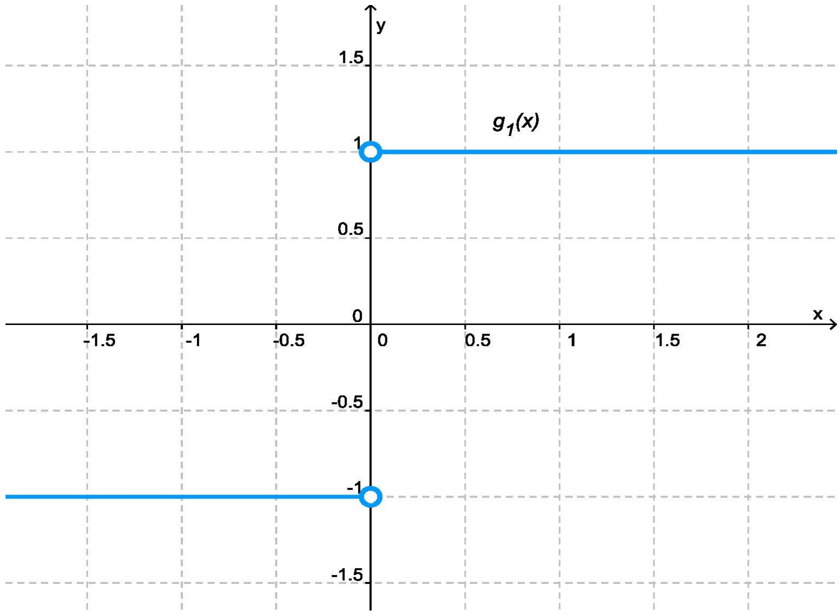
$$(\operatorname{sgn} x)^2 = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x \neq 0. \end{cases}$$

4.4.4.

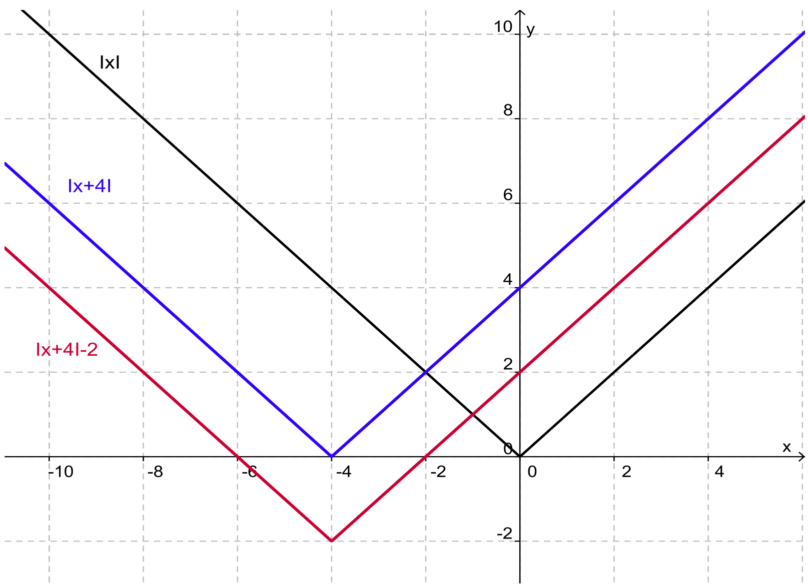
(a) A $g_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{-1, 1\}$,

$$g_1(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvény grafikonja két félegyenesből áll. A g_1 függvény páratlan, korlátos és monoton növekvő.

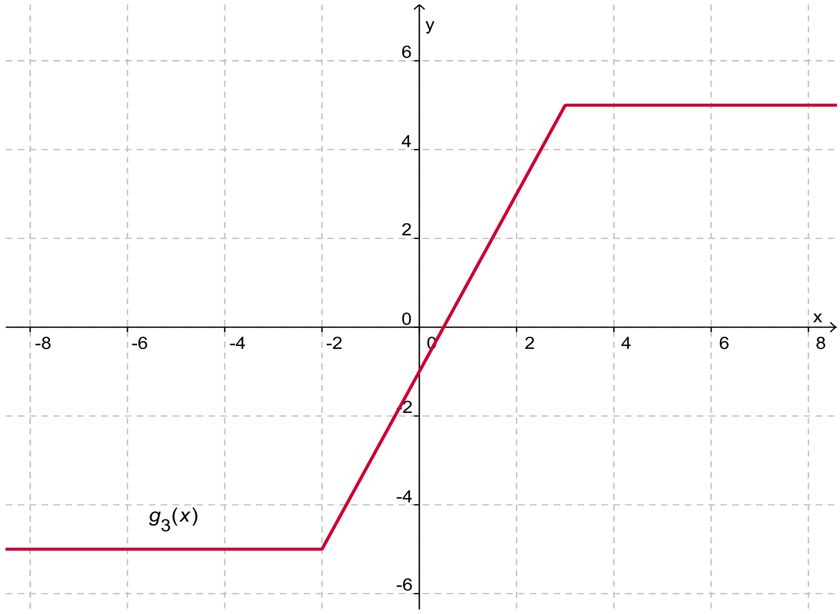


(b) A $g_2 : \mathbb{R} \to [-2, +\infty)$, $g_2(x) = |x + 4| - 2$ függvény grafikonja:

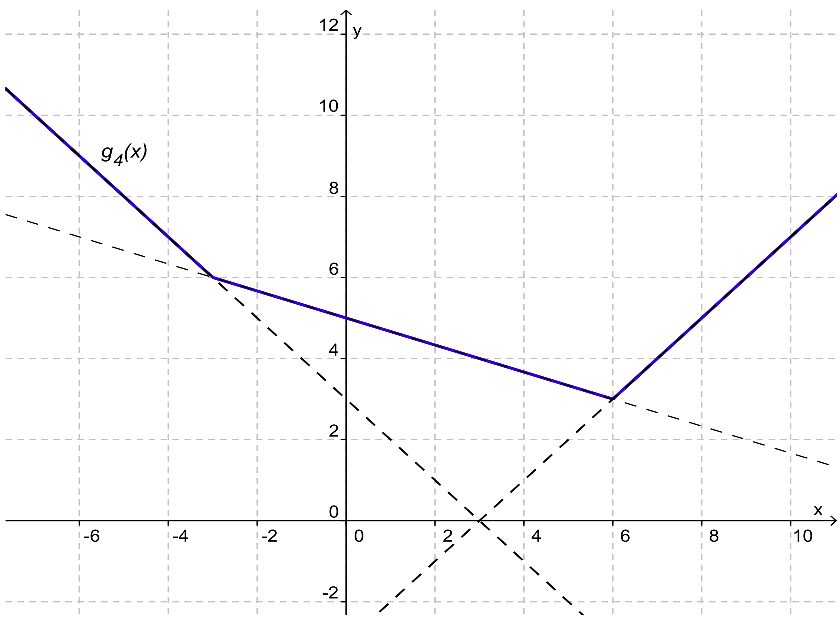


A g_2 függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos. Szigorúan monoton csökkenő a függvény, ha $x < -4$ és szigorúan monoton növekvő, ha $x > -4$. A függvény nem páros és nem páratlan.

(c) A $g_3 : \mathbb{R} \to [-5, 5]$, $g_3(x) = |x + 2| - |x - 3|$ függvény korlátos és monoton növekvő $\mathbb{R}$-en. A függvény nem páros és nem páratlan.

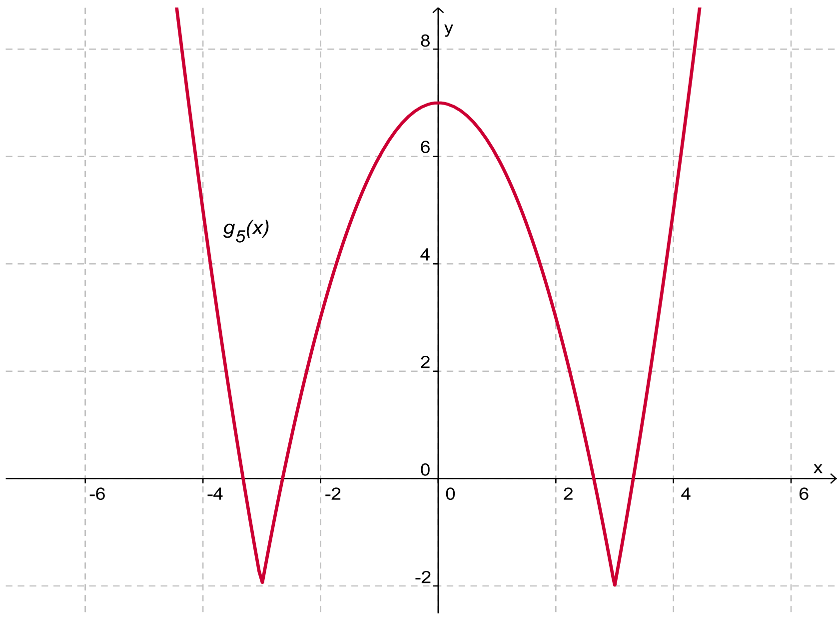


(d) A $g_4 : \mathbb{R} \to [3, +\infty)$, $g_4(x) = \left|\frac{2}{3}x - 4\right| + \left|\frac{1}{3}x + 1\right|$ függvény grafikonja:



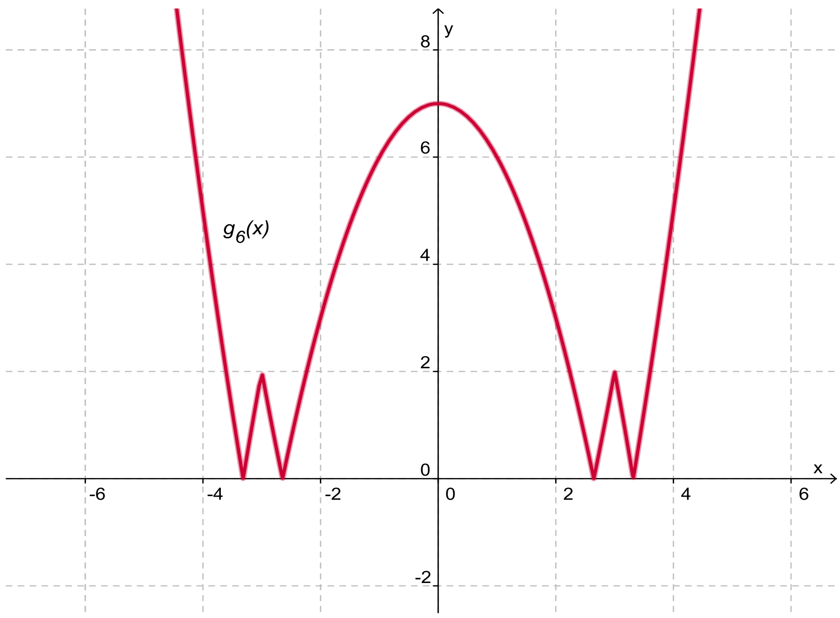
A g_4 függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos. Szigorúan monoton csökkenő a függvény, ha $x < 6$ és szigorúan monoton növekvő, ha $x > 6$. A függvény nem páros és nem páratlan.

(e) A $g_5 : \mathbb{R} \to [-2, +\infty)$, $g_5(x) = |9 - x^2| - 2$ alulról korlátos, páros függvény grafikonja:



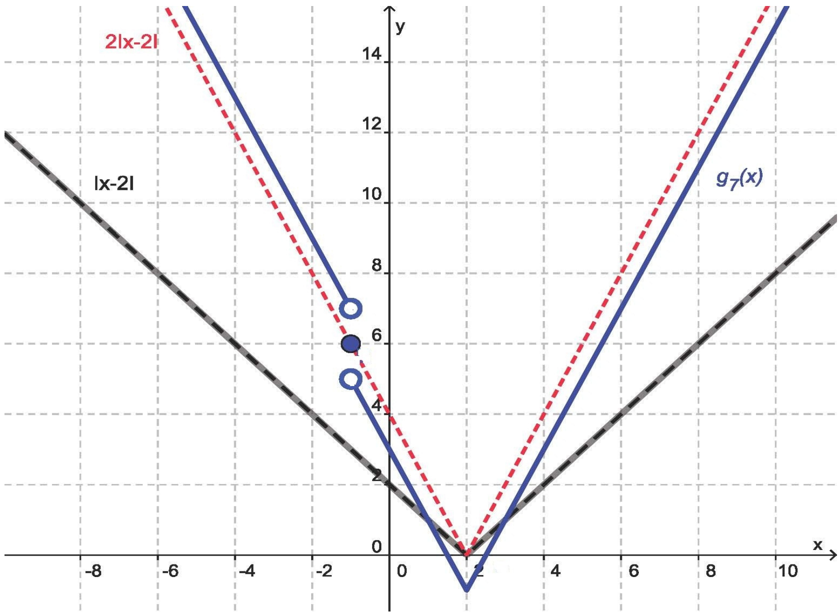
A függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $x < -3$ vagy $0 < x < 3$. Szigorúan monoton növekvő, ha $-3 < x < 0$ vagy $x > 3$.

(f) A $g_6 : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $g_6(x) = ||9 - x^2| - 2|$ alulról korlátos, páros függvény grafikonja:



Könnyen látható, hogy $g_6(x) = |g_5(x)|$.

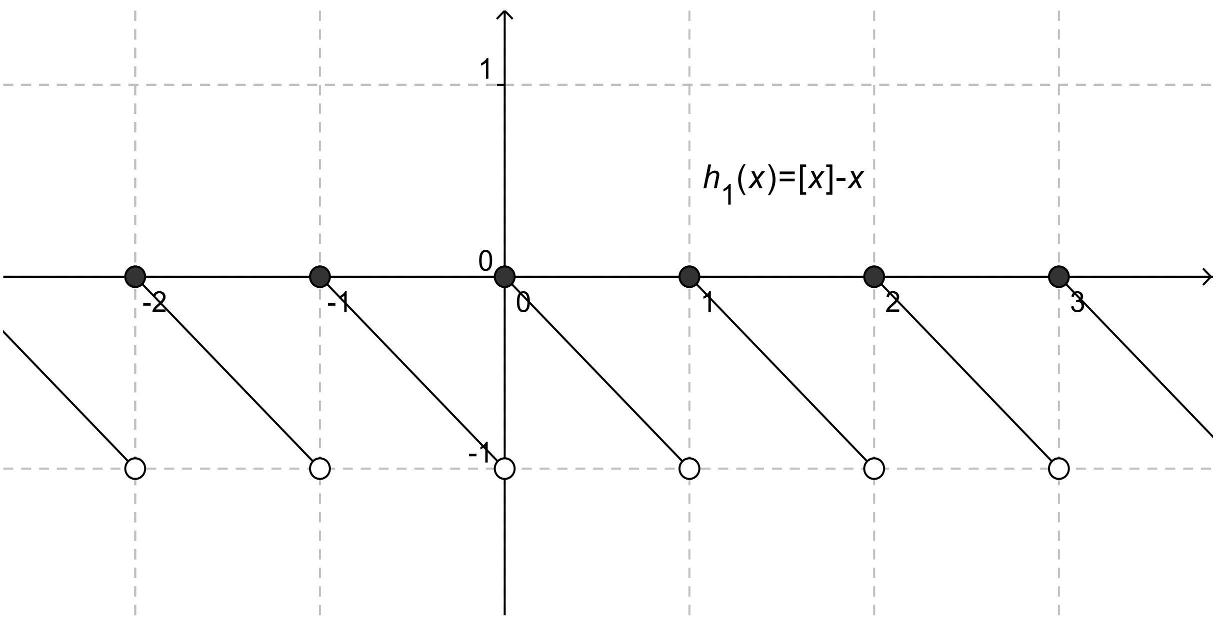
(g) A $g_7(x) = 2\,|x-2| - \operatorname{sgn}(x+1)$ függvény grafikonja:



A függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos. Szigorúan monoton csökkenő, ha $x < 2$, szigorúan monoton növekvő, ha $x > 2$. Nem páros és nem páratlan.

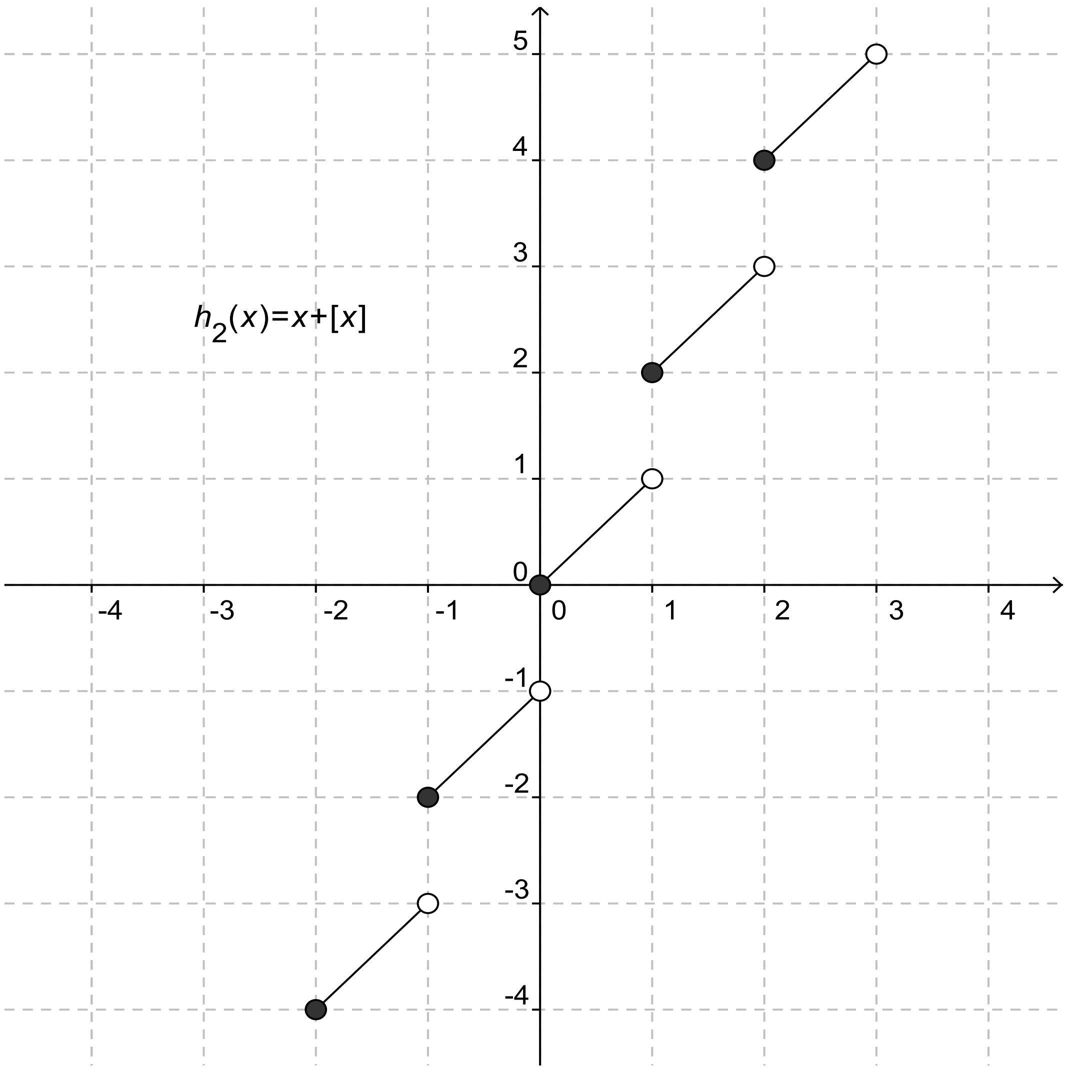
4.4.5.

(a) $D_{h_1} = \mathbb{R}$ és $h_1(x) = [x] - x = -\{x\}$. A függvény grafikonja:



A függvény korlátos, $-1 < h_1(x) \le 0$. Szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in (k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Nem páros és nem páratlan. A függvény periodikus, $T = 1$.

(b) $D_{h_2} = \mathbb{R}$, és
$$h_2(x) = x + [x] = x + k, \quad \text{ha} \quad k \le x < k+1 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$
A függvény grafikonja:

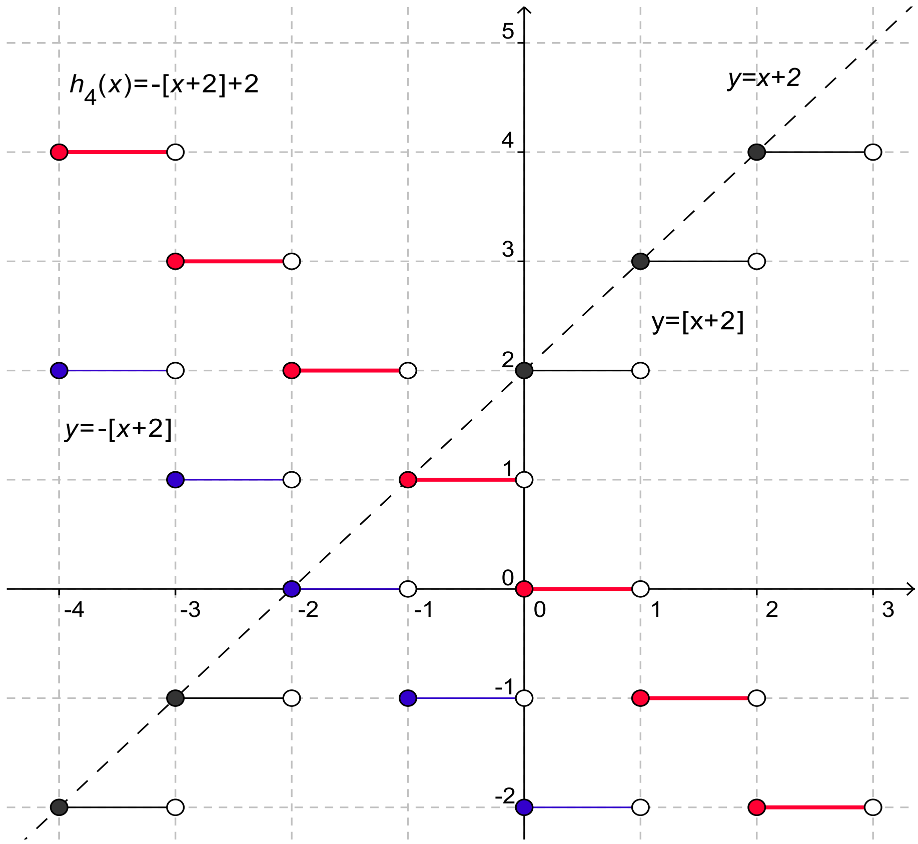


A függvény sem alulról, sem felülről nem korlátos. Szigorúan monoton növekvő $\mathbb{R}$-en. Nem páros és nem páratlan. A függvény nem periodikus.

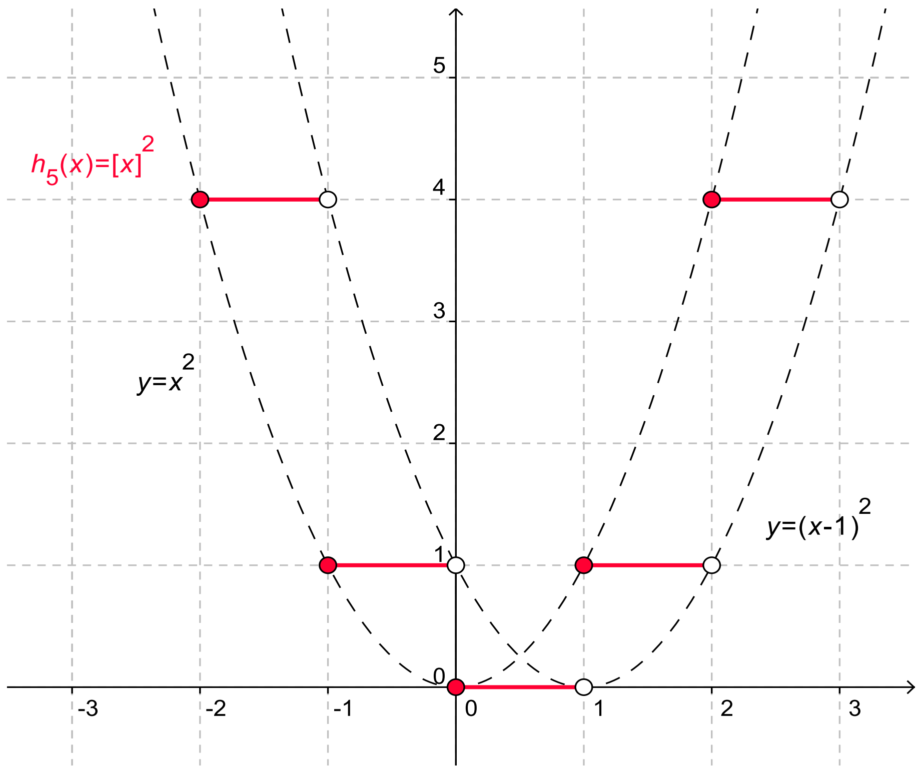
(c) $D_{h_3} = \mathbb{R}$ és $h_3(x) = [x-1] + 1 = [x]$. A h_3 függvény grafikonja tehát megegyezik az egészrész függvény grafikonjával.

(d) $D_{h_4} = \mathbb{R}$ és $h_4(x) = -[x+2] + 2$. A függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekkel állítjuk elő:

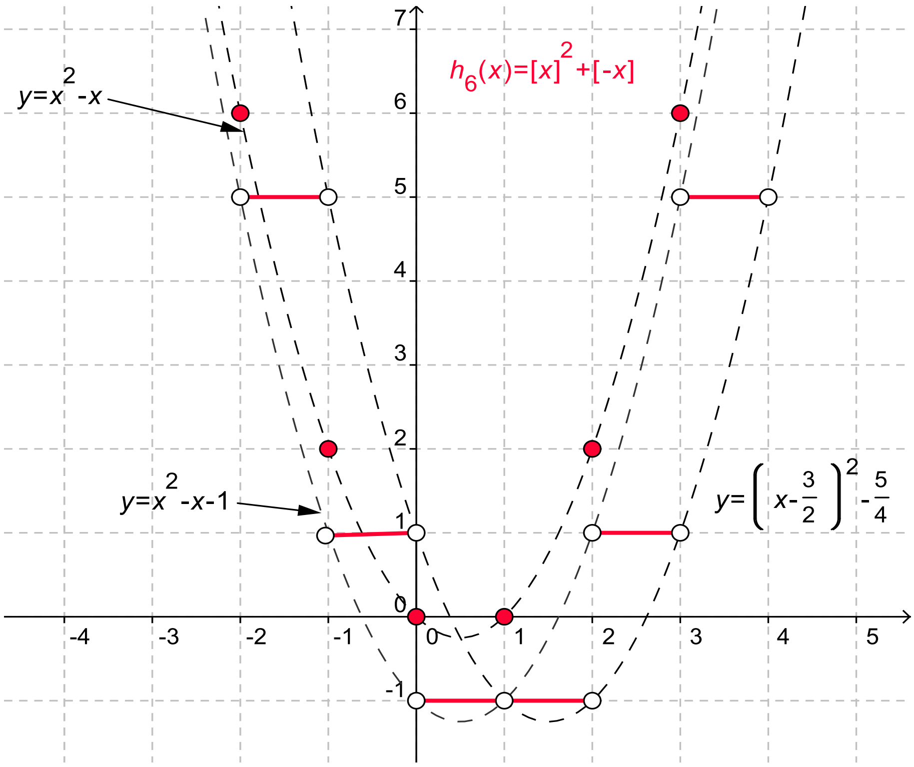
1.) Vázoljuk az $y = [x+2]$ függvény grafikonját.
2.) Tükrözünk az x tengelyre, így megkapjuk az $y = -[x+2]$ függvény grafikonját.
3.) Két egységgel eltoljuk potitív irányba az y-tengely mentén az előző lépésben kapott grafikont, így megkapjuk a h_4 függvény grafikonját.



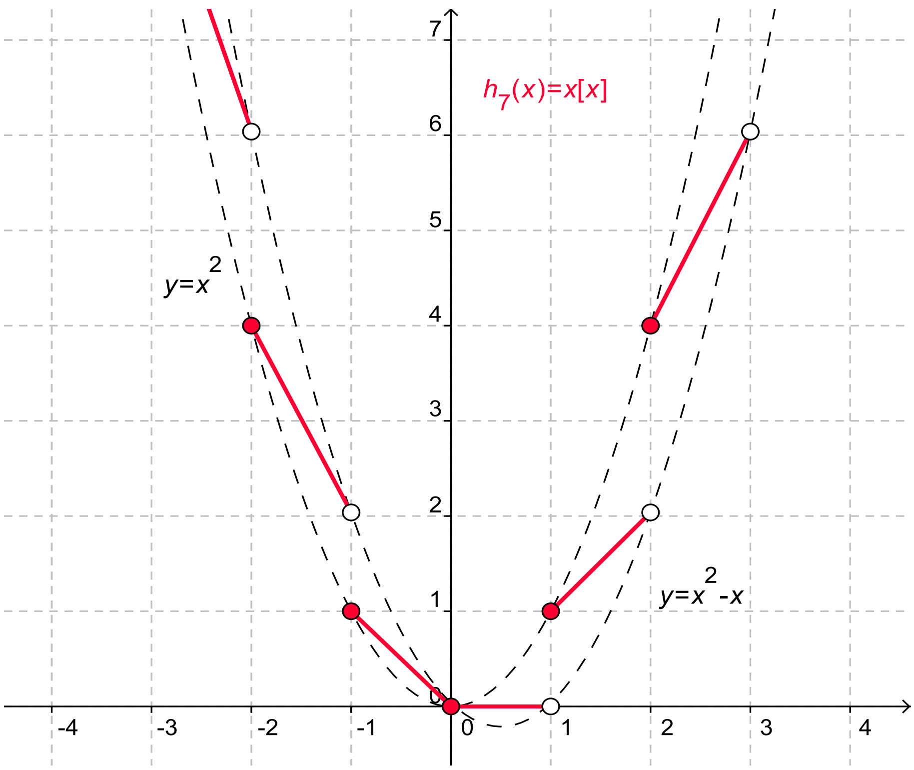
(e) A h_5 függvény grafikonja:



(f) A h_6 függvény grafikonja:

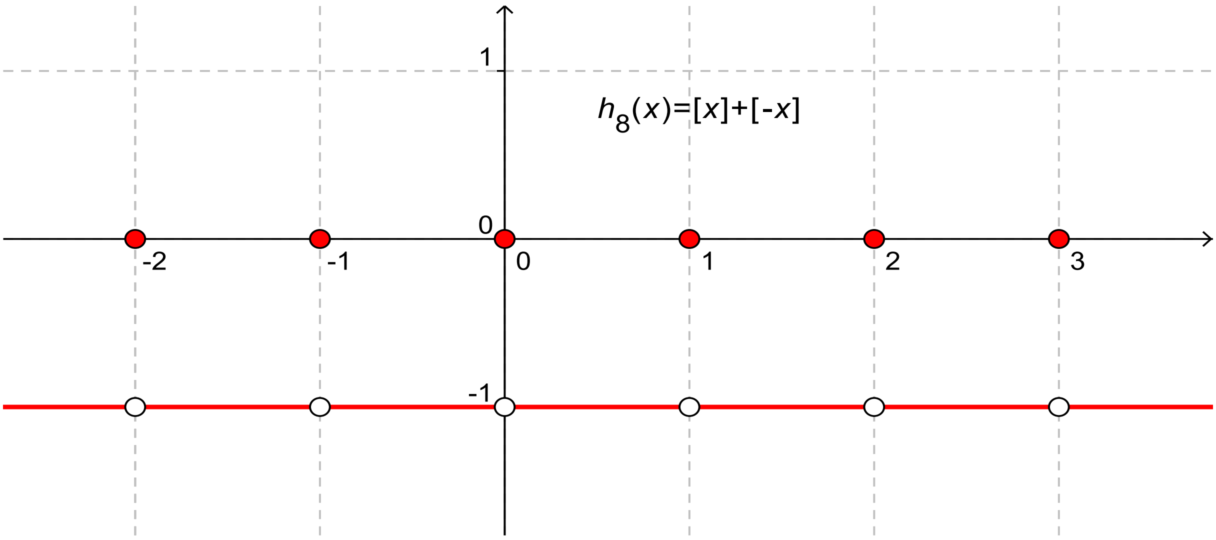


(g) $D_{h_7} = \mathbb{R}$ és $h_7(x) = kx$, ha $k \leq x < k+1$, $(k \in \mathbb{Z})$. A függvény grafikonja:

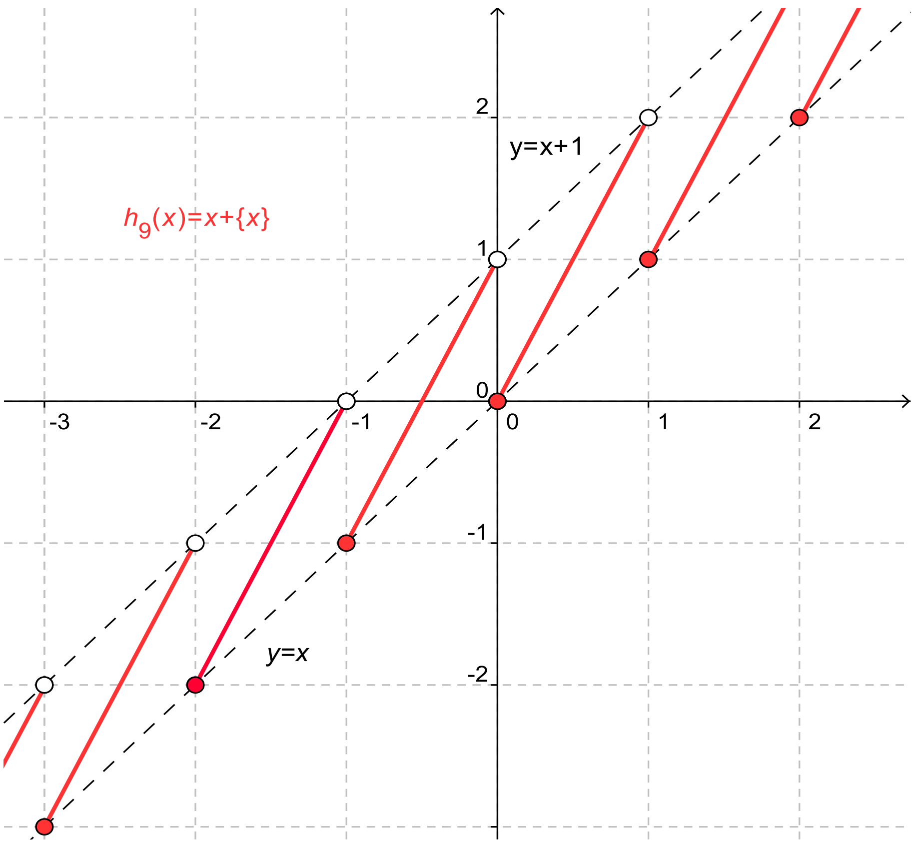


(h) $D_{h_8} = \mathbb{R}$, és
$$h_8(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Z}, \\ -1, & \text{ha } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}). \end{cases}$$

A függvény grafikonja:



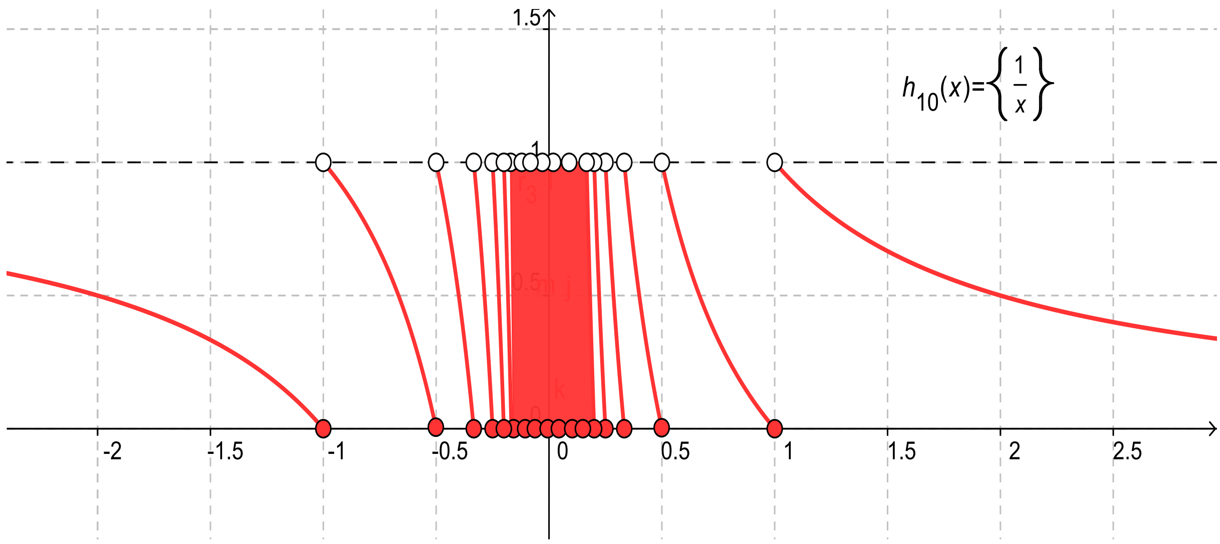
(i) A h_9 függvény grafikonja:



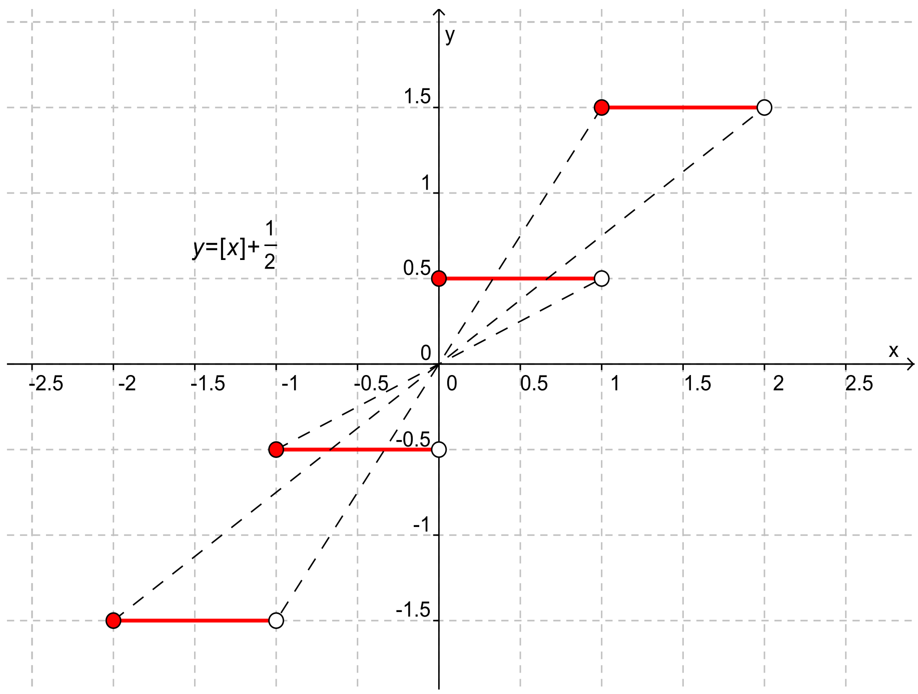
(j) $D_{h_{10}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $R_{h_{10}} = [0, 1)$. A h_{10} függvény grafikonjának elkészítéséhez az

$$y = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

függvény görbéjét az x-tengellyel párhuzamos, egységnyi távolságra haladó egyenesekkel elmetszük, majd az egyes görbedarabokat elcsúsztatjuk az x-tengelyre merőlegesen úgy, hogy a jobb oldali végponok az x-tengelyre kerüljenek. A grafikont alkotó görbedarabok így az $y = 0$ és $y = 1$ egyenesek között lesznek.



4.4.6. Nem. Az egytlen szóba jöhető érték $A = \dfrac{1}{2}$ lenne, de a függvény nem lesz páratlan ekkor sem, mert az origóra középpontosan szimmetrikus szakaszvégpontok közül az egyik rajta van a függvény grafikonján, a másik pedig nincs.



4.5.1.

(a) Legyen $\varepsilon > 0$ és $\delta = \varepsilon$. Ekkor minden $0 < |x - 0| < \delta$ valós számra

$$|f(x) - 2| = |x + 2 - 2| = |x| < \varepsilon,$$

Tehát $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 2$.

(b) f-nek az $x_0 = 0$ helyen nem létezik határértéke.

4.5.2. Legyen $\varepsilon > 0$. Olyan pozitív δ-t keresünk, amelyre ha $|x - 2| < \delta$, akkor

$$|(2x - 5) - (-1)| < \varepsilon.$$

Tudjuk, hogy

$$(2x - 5) - (-1) = 2x - 4 = 2(x - 2),$$

tehát

$$|2(x - 2)| < \varepsilon,$$

azaz

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

kell, hogy teljesüljön. Vagyis a megfelelő $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, vagy bármely $\dfrac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb pozitív szám.

4.5.3. Legyen $\varepsilon > 0$. Olyan pozitív δ-t keresünk, amelyre ha $|x - 3| < \delta$, akkor

$$|(2 + 5x) - 17| < \varepsilon.$$

Tudjuk, hogy

$$(2 + 5x) - 17 = 5x - 15 = 5(x - 3),$$

tehát

$$|5(x - 3)| < \varepsilon,$$

azaz

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{5}$$

kell, hogy teljesüljön. A legnagyobb δ-nak választható érték $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$.

4.5.4. Ha $f(x) = \dfrac{5}{2 - x}$, akkor

$$f\left(x_n^{(1)}\right) = \frac{5}{2 - \left(1 + \dfrac{n}{n+1}\right)} = 5n + 5,$$

így

$$\lim_{n \to \infty} f\left(x_n^{(1)}\right) = \lim_{n \to \infty} (5n + 5) = +\infty.$$

Továbbá

$$f\left(x_n^{(2)}\right) = \frac{5}{2 - \left(2 - \dfrac{1}{n}\right)} = -5n,$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{(2)}\right) = \lim_{n\to\infty}(-5n) = -\infty.$$

Tehát az f függvénynek az $x_0 = 2$ helyen nincs határértéke.

4.5.5.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2-1} = -1;$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x+5) = 10;$

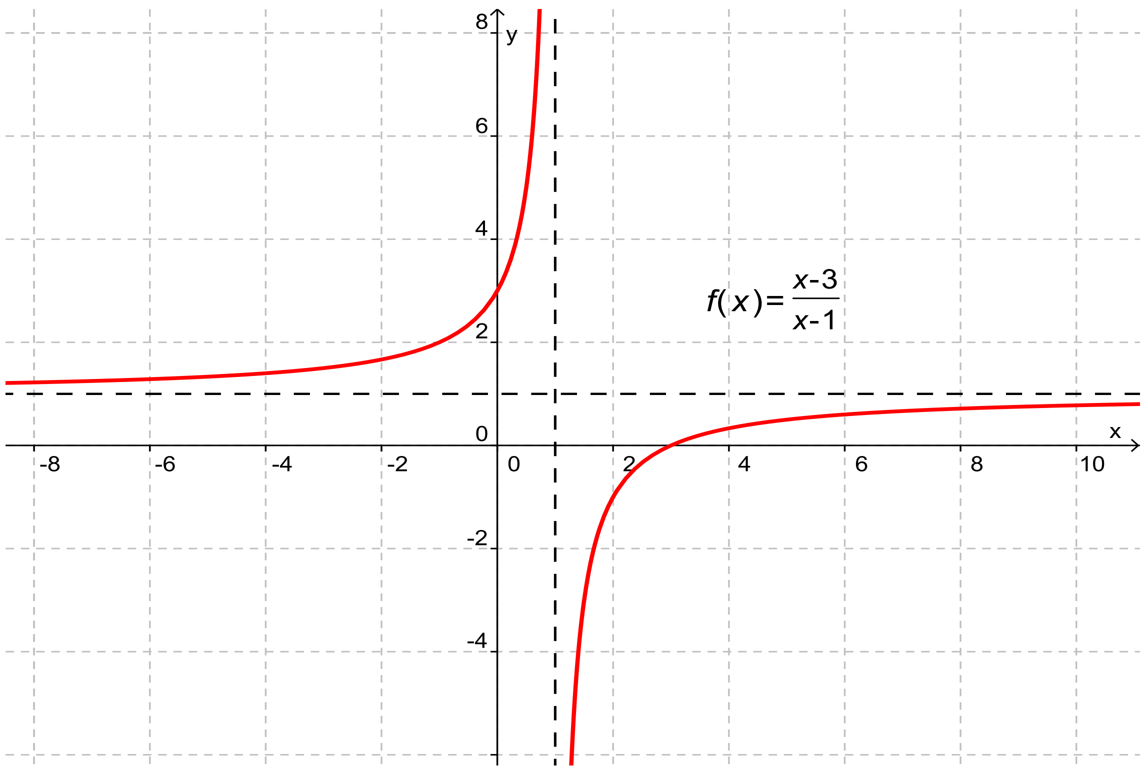
(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3;$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x+3)(x-4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+3) = 7;$

(e) A $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x-1}$ határértékek nem léteznek, mert

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x-3}{x-1} = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{x-3}{x-1} = -\infty.$$

A függvény grafikonja:



(f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+2x-4}{x^2-3x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-5x^2+2x-4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+3)}=\dfrac{8-20+4-4}{4-6+3}=-12;$

(g) $\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{a^2-x^2}{x^3-a^3}=\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{(a-x)(a+x)}{(x+a)(x^2-ax+a^2)}=\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{a-x}{x^2-ax+a^2}=\dfrac{2}{3a};$

(h) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{1}{3};$

(i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x-2}=4;$

(j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+3x-1}{2x^2-x+1}=3.$

4.5.6.

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=4;$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}};$

(c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{5-x}+2}{\sqrt{5-x}+2}\cdot\dfrac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{2-x}+1}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}=\dfrac{1}{2};$

(d) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{(x-5)(x+5)}\cdot\dfrac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}\right)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{-1}{(x+5)(2+\sqrt{x-1})}=-\dfrac{1}{40};$

(e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1;$

(f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+x)(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})}{(-2)}=-2;$

(g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^3+2}{\sqrt{x^4-2}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x+\dfrac{2}{x^2}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x^4}}}=-\infty$, mert $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x^4}=0.$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0;$

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\dfrac{1}{2};$

(j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x(\sqrt{x^2+5}+3)}=\dfrac{1}{3}.$

4.5.7.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^5-x^2+2x+6)=-\infty;$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}(4x^3-2x^2+3x+2)=7;$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}5x^2=0;$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4+3x^3-1)=+\infty;$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1;$

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

4.5.8.

(a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{1+2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{-1}{x}\right)^x}\right)^2\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{-1}{x}\right)^x}\right)^2=1\cdot\left(\frac{e^2}{e^{-1}}\right)^2=e^6;$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{1+2x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2}(2x+1)}=e;$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^3-1}\right)^{\frac{x^3}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{e};$$

(d) $$\lim_{x\to 0+0}(1+3\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to 0+0}\left(1+\frac{3}{\operatorname{ctg}x}\right)^{\operatorname{ctg}x}=e^3.$$

4.5.9.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=5;$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}=\dfrac{2}{3};$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1;$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^2\frac{x}{4}}{x}=\dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}\cdot\sin\dfrac{x}{4}=0;$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1;$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2 = 2;$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x(1+\cos x} = 0;$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2 = \dfrac{1}{2}.$

4.5.10. f-nek az $x_0 = 2$ helyen nincs határértéke, mert

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = 14-2 = 12 \neq \lim_{x\to 2-0} f(x) = 6+5 = 11.$$

4.5.11. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{|x|}{x} = 1,\ \lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{|x|}{x} = -1.$ f-nek nincs határértéke $x_0 = 0$-ban.

4.5.12. $\lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{3}{x-4} = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{3}{x-4} = -\infty$

4.5.13. $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{1}{x^2-7x+12} = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{1}{x^2-7x+12} = +\infty$

4.5.14. $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0-0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$, így

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

4.5.15. Ha $f(x) = e^x \operatorname{sgn}(1-x)$, akkor

(a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0;$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty;$

(c) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -e;$

(d) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = e;$

(e) Az $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ határérték nem létezik;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1.$

4.5.16. $\dfrac{(\sin 2x)\cdot\operatorname{tg} 3x}{5x^2\cdot\cos x} = \dfrac{2\cdot 3}{5}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{1}{\cos 3x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}.$ Így azonnal adódik, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)\cdot\operatorname{tg} 3x}{5x^2\cdot\cos x} = \frac{6}{5}.$$

A $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{(\sin 2x)\cdot\operatorname{tg} 3x}{5x^2\cdot\cos x}$ határérték nem létezik, mert

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}-0}\frac{(\sin 2x)\cdot\operatorname{tg} 3x}{5x^2\cdot\cos x} = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{6}+0}\frac{(\sin 2x)\cdot\operatorname{tg} 3x}{5x^2\cdot\cos x} = -\infty.$$

4.5.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(2x-\dfrac{3x^2}{\sin 4x}\right)\cdot \operatorname{ctg} x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\cos x\cdot\left(2\cdot\dfrac{x}{\sin x}-\dfrac{3x}{4\cdot \sin x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}\right)\right]=\dfrac{5}{4}.$

4.5.18. $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-1}=\dfrac{|x-1|}{(x-1)(x+1)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & \text{ha } \ x>1,\\[2mm] \dfrac{-1}{x+1}, & \text{ha } \ x<1,\, x\neq -1.\end{cases}$

A $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-1}$ határérték nem létezik, mert a féloldali határértékek nem egyenlőek:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\qquad \text{és}\qquad \lim_{x\to 1-0}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

A számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma, emiatt

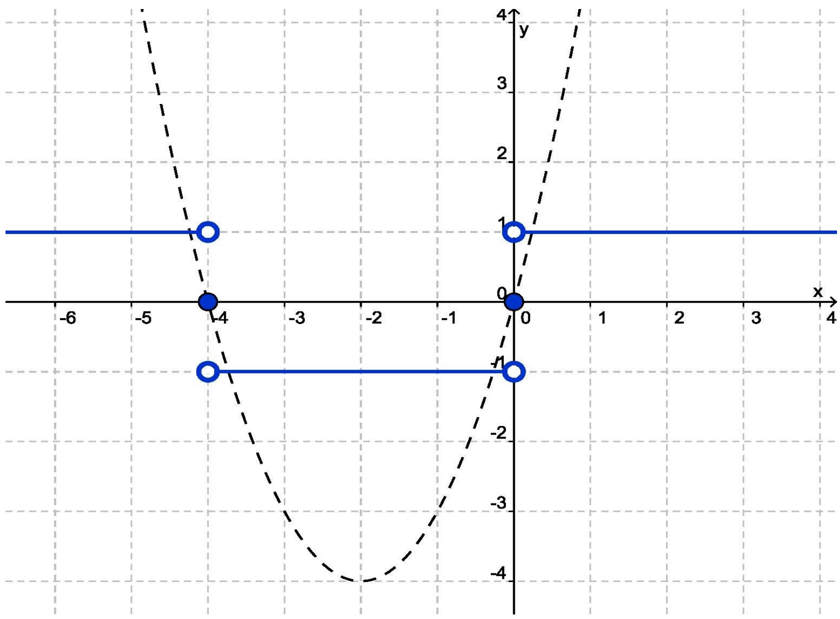
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-1}=0.$$

4.6.1. Bármely $x_0\in\mathbb{R}$ esetén az x_0 szám tetszőlegesen kicsiny sugarú környezetében vannak racionális és irracionális számok is, így $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nem létezik, vagyis az f függvény sehol sem folytonos.

4.6.2. Az f függvény nem folytonos az $x_0=-4$ helyen, mert

$$\lim_{x\to -4-0} f(x)=1\neq \lim_{x\to -4+0} f(x)=-1,$$

azaz f-nek nem létezik határértéke a vizsgált helyen. A féloldali határértékek léteznek és végesek, de nem egyenlőek, azaz f-nek elsőfajú, nem megszüntethető szakadása van x_0-ban. A függvény grafikonja:



4.6.3. f-nek az $x_0 = 0$ helyen elsőfajú, nem megszüntethető szakadása van, mert

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 3 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0} f(x) = 1 \neq 3,$$

tehát a $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ határérték nem létezik. Az f nem folytonos az $x_1 = 1$ és az $x_2 = 4$ helyeken sem, mert

$$f(1) = 3 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = 0 \neq 3,$$

valamint

$$f(4) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 4} f(x) = 1 \neq 0.$$

Az $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$ helyeken elsőfajú, megszüntethető szakadása van a vizsgált függvénynek.

4.6.4. Mivel $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$, így

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{ha } x \neq 4, \\ C, & \text{ha } x = 4 \end{cases}$$

és $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 8$. Az f függvény folytonos, ha $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4)$ teljesül, vagyis $C = f(4) = 8$.

4.6.5. Az f függvény nem folytonos az $x_0 = 1$ helyen, mert a $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ határérték nem létezik. f folytonos az $x_1 = 2$ helyen, mert

$$f(2) = 2 + 1 = 3 = \lim_{x\to 2} f(x).$$

Nyilvánvaló, hogy f az összes többi valós helyen folytonos. A vizsgált függvénynek tehát egyetlen egy szakadási pontja van.

4.6.6. Nem, mert $f(3) = 3$, de $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-0} 2 = 2$.

4.6.7. $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} (3x^2 - 1) = -1$, az $x_0 = 0$ helyen a folytonossághoz $f(0) = -1$, azaz $D = -1$. Továbbá $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} \sqrt{x+8} = 3$, azaz $C \cdot 1 + D = 3$ miatt $C = 4$.

4.6.8. Az f függvénynek az $x = \dfrac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken elsőfajú, nem megszüntethető szakadása van.

4.6.9.

(a) $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$, így a bal oldali határérték:

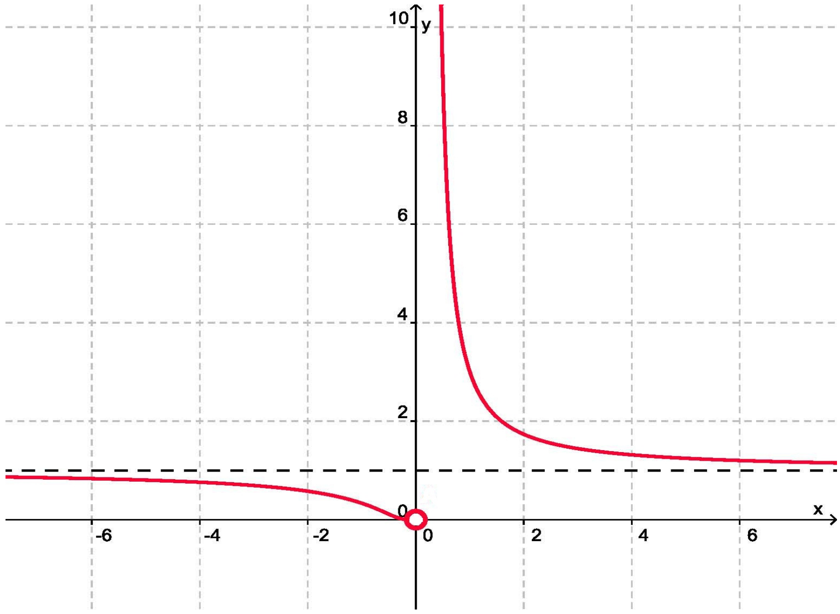
$$\lim_{x\to 0-0} 3^{\frac{1}{x}} = 0.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, így a jobb oldali határérték:

$$\lim_{x\to 0-0} 3^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

(c) A függvénynek az $x_0 = 0$ helyen másodfajú szakadása van.

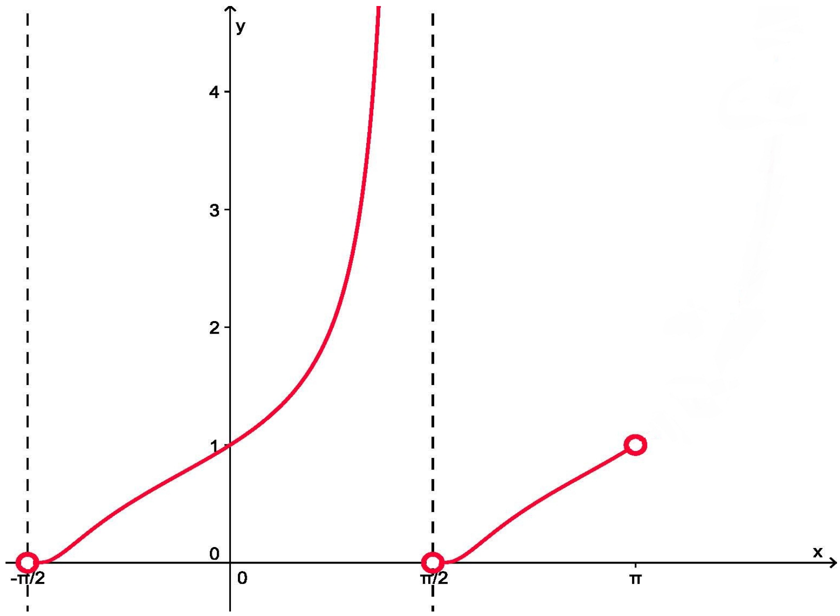
(d) A függvény grafikonja:



4.6.10. Az $f(x) = 2^{\operatorname{tg} x}$ függvénynek másodfajú szakadása van az $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ helyen, mert

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = 0.$$

A függvény grafikonja:



4.6.11. Az $x = k \cdot \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ helyeken a szakadások másodfajúak.

4.6.12. f folytonos az $x_0 = 0$ helyen, ha A értéke megegyezik a $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ határértékkel.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x(x^2+2)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\frac{1}{x^2+2}\right) = \frac{2}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

azaz $A = \dfrac{1}{3}$ esetén folytonos az f függvény az $x_0 = 0$ helyen. Továbbá

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{3\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\pi^2}{16}+2\right)} = \frac{64}{3\pi\left(\pi^2+32\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = B,$$

és

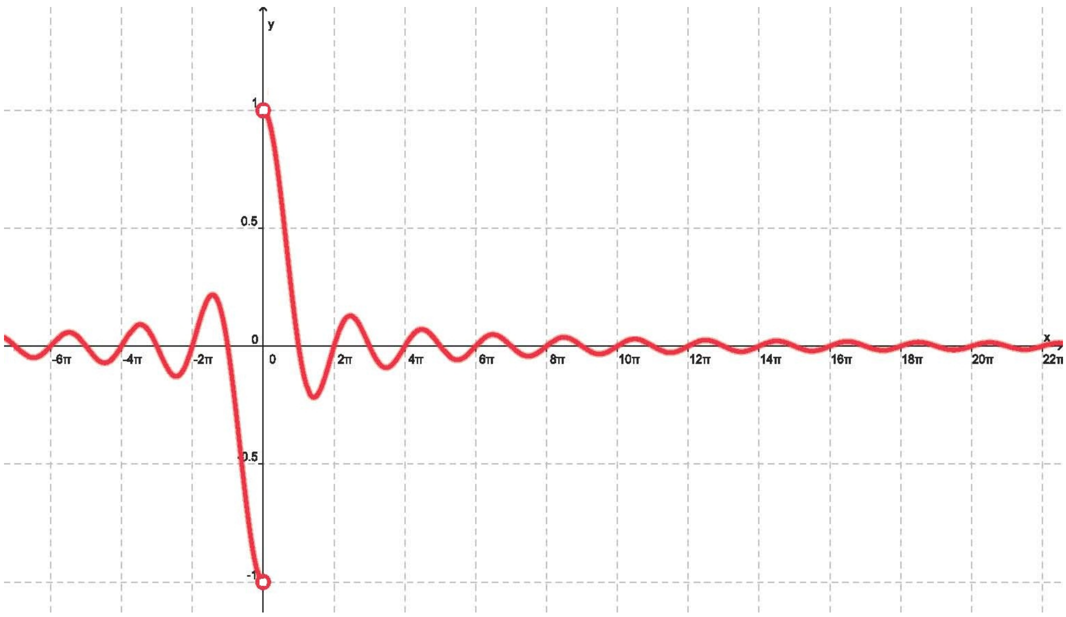
$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{3\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{\pi^2}{16}+2\right)} = \frac{64}{3\pi\left(\pi^2+32\right)} = \lim_{x\to-\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = B.$$

Tehát f mindenhol folytonos, ha $A = \dfrac{1}{3}$ és $B = \dfrac{64}{3\pi\left(\pi^2+32\right)}$.

4.6.13. A függvény nem tehető folytonossá az $x_0 = 0$ helyen, mert

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{-x} = -1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x} = 1 \neq -1.$$

A függvény grafikonja:



4.6.14. f az $x_0 = 0$ helyen folytonos, mert

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2\cdot\operatorname{ctg} 6x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{6\cdot\sin 6x}{6x}\cdot\frac{1}{\cos 6x}\right) = 6 = f(0).$$

f nem folytonos, ha $\cos 6x = 0$, azaz ahol $6x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tehát ahol

$$x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4.6.15. Számítsuk ki f baloldali határértékét az $x_0 = -1$ helyen!

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \left(\frac{1-x}{1+x} \cdot \operatorname{tg} \frac{x+1}{2} \right) = \lim_{x\to -1-0} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x+1}{2}}{\frac{x+1}{2}} \frac{1-x}{\cos \frac{x+1}{2}} \right] = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Továbbá:

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = f(-1) = A \cdot \operatorname{sgn} \sqrt[3]{-1-3} = -A.$$

f folytonos az $x_0 = -1$ helyen, ha $A = -1$.

4.6.16. Gyöktelenítsük a $\dfrac{\sqrt{7x+2} - \sqrt{6x+4}}{x-2}$ tört számlálóját!

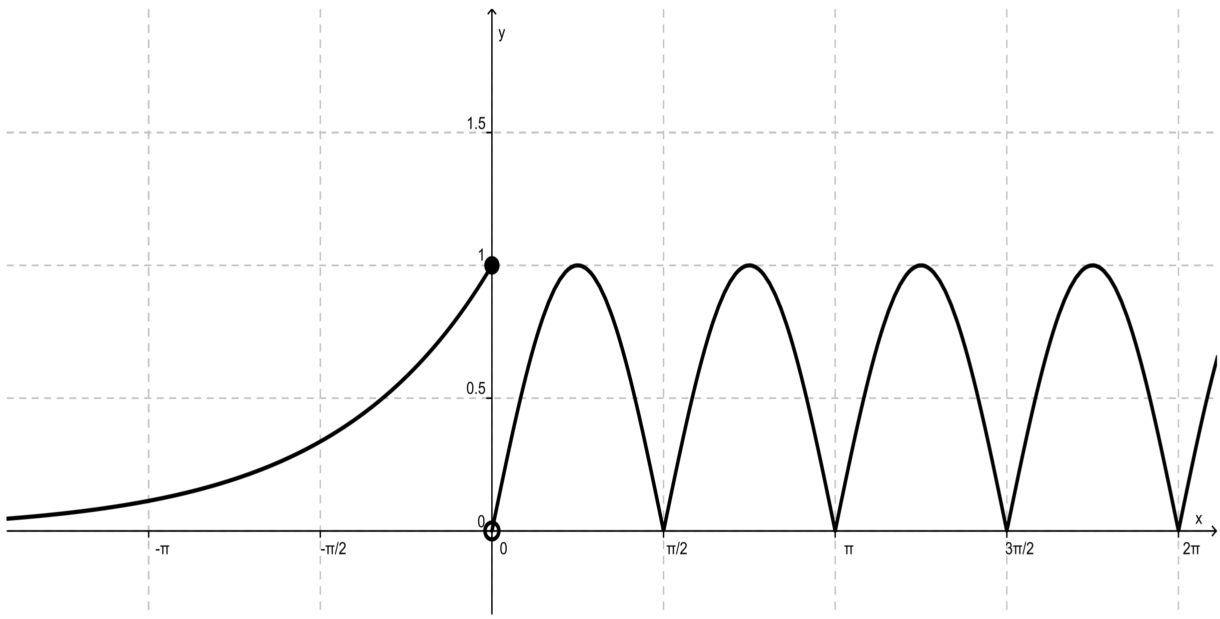
$$\frac{\sqrt{7x+2} - \sqrt{6x+4}}{x-2} = \frac{\sqrt{7x+2} - \sqrt{6x+4}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{7x+2} + \sqrt{6x+4}}{\sqrt{7x+2} + \sqrt{6x+4}} = \frac{1}{\sqrt{7x+2} + \sqrt{6x+4}}.$$

Azaz

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} = \frac{1}{\sqrt{7x+2} + \sqrt{6x+4}} = \frac{1}{8}.$$

Tehát $A = \dfrac{1}{8}$ esetén f folytonos.

4.6.17. A függvény grafikonja:

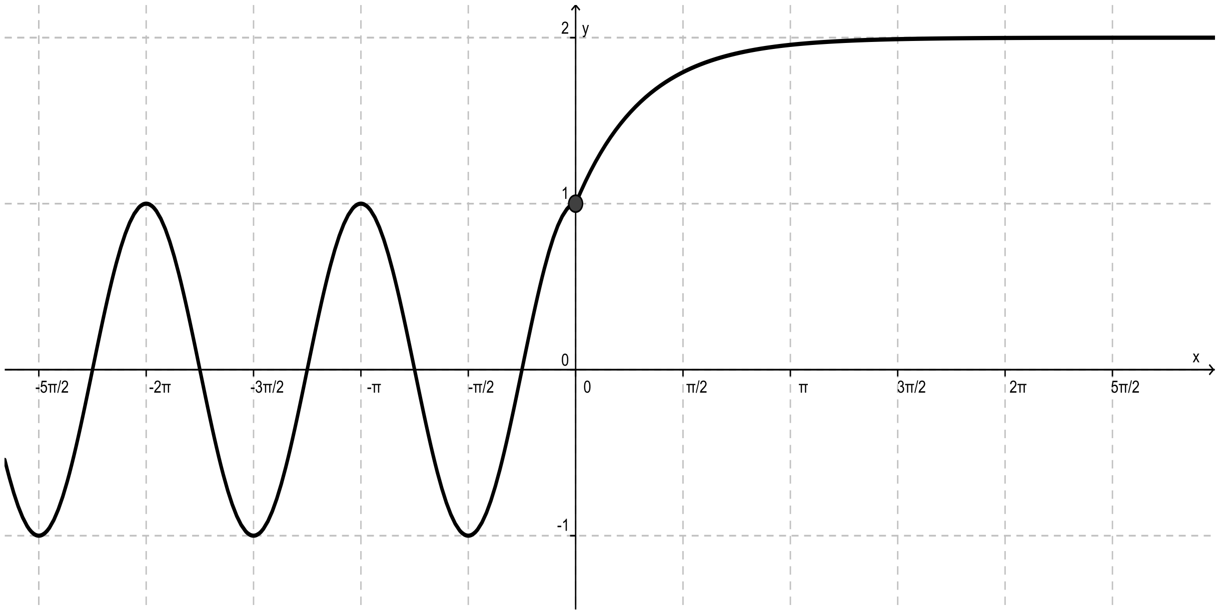


$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [0,1]$. f nem folytonos az $x_0 = 0$ helyen, mert

$$f(0) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0} f(x) = 0 \neq 1.$$

f-nek elsőfajú, nem megszüntethető szakadása van az $x_0 = 0$ helyen.

4.6.18. A függvény grafikonja:



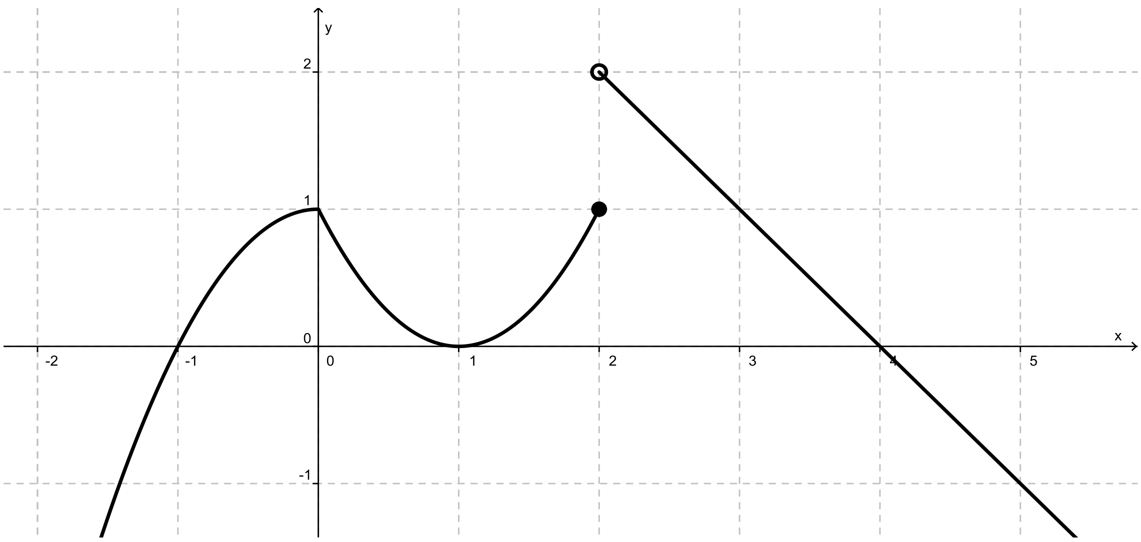
$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1,2)$. f folytonos az $x_0 = 0$ helyen, mert

$$f(0) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} f(x) = 1.$$

4.6.19. f folytonos, mert

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{(-\sin x)}{\cos x + 1}\right) = 0 = f(0).$$

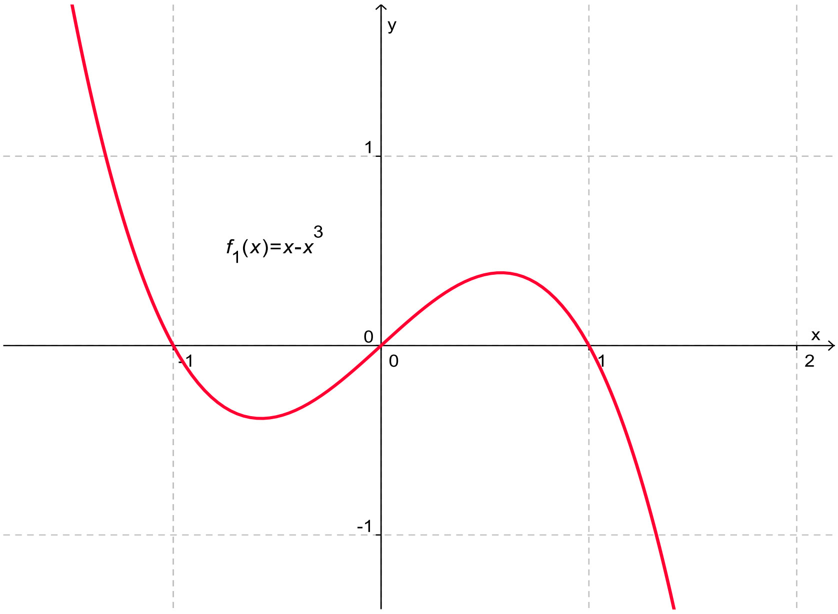
4.6.20. Az $x_0 = 2$ helyen a függvénynek elsőfajú, nem megszüntethető szakadása van.



4.7.1.

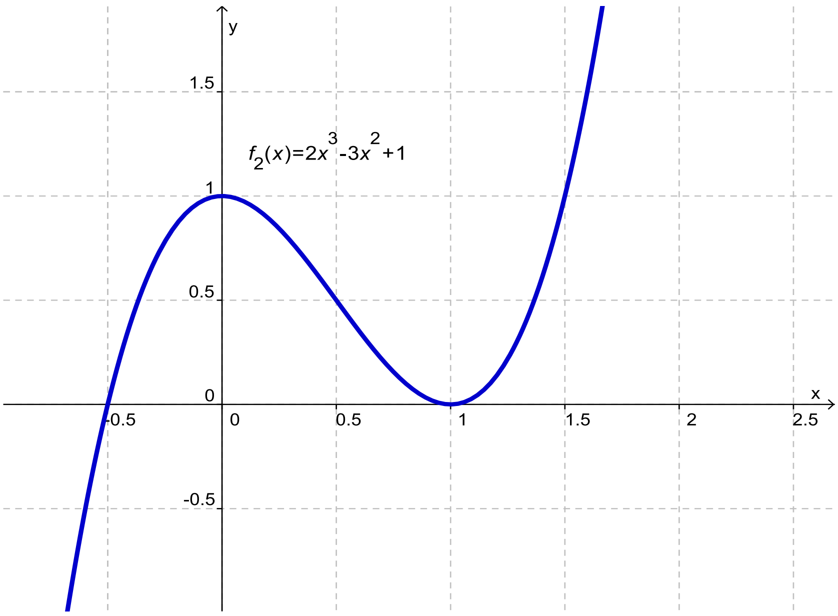
(a) Az $f_1(x) = x - x^3 = x(1-x)(1+x)$ függvénynek $x_1 = 0$-ban, $x_2 = -1$-ben és $x_3 = 1$-ben egyszeres multplicitású zérushelye van, tehát mindhárom helyen előjelet vált a függvény. Továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty.$$



(b) Az $f_2(x) = 2x^3-3x^2+1 = (2x+1)(x-1)^2$ függvénynek $x_1 = -\dfrac{1}{2}$-ben egyszeres multiplicitású, az $x_2 = 1$ helyen pedig kétszeres multiplicitású zérushelye van. Továbbá

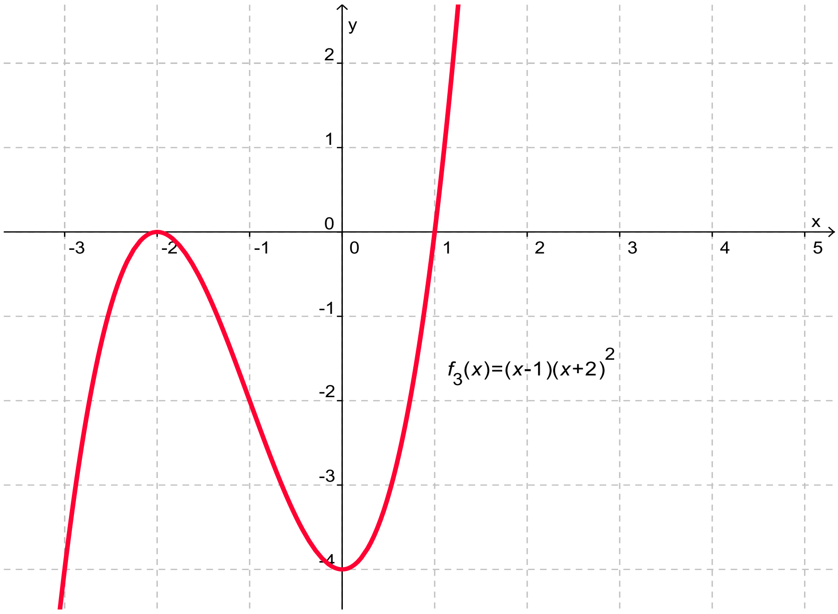
$$\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty.$$



(c) Az $f_3(x) = (x-1)(x+2)^2$ függvénynek $x_1 = -2$-ben kétszeres multiplicitású, az $x_2 = 1$ helyen pedig egyszeres multiplicitású zérushelye van. Továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty.$$

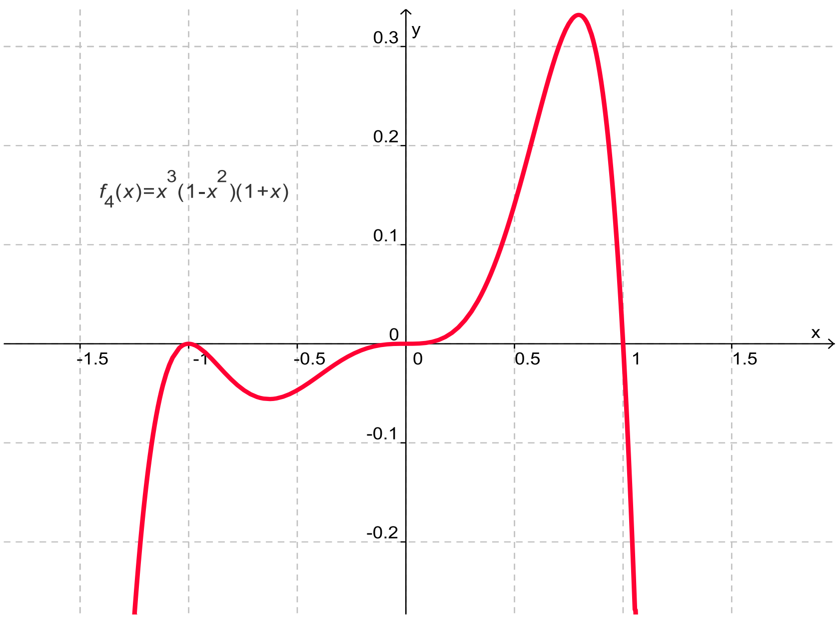
A függvény grafikonja:



(d) Az $f_4(x) = x^3(1-x^2)(1+x) = x^3(1-x)(1+x)^2$ függvénynek $x_1 = 0$-ban háromszoros multiplicitású, az $x_2 = 1$ helyen egyszeres, az $x_3 = -1$ helyen pedig kétszeres multiplicitású zérushelye van. Továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} f_4(x) = \lim_{x\to+\infty} f_4(x) = -\infty.$$

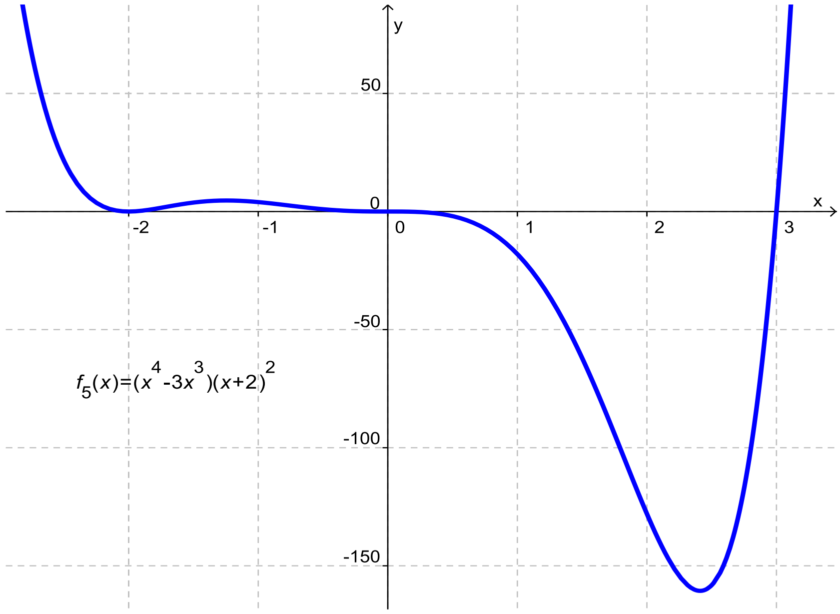
A függvény grafikonja:



(e) Az $f_5(x) = (x^4 - 3x^3)(x+2)^2 = x^3(x-3)(x+2)^2$ függvénynek $x_1 = 0$-ban háromszoros, az $x_2 = 3$ helyen egyszeres, az $x_3 = -2$ helyen kétszeres multiplicitású zérushelye van. Továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} f_5(x) = \lim_{x\to+\infty} f_5(x) = +\infty.$$

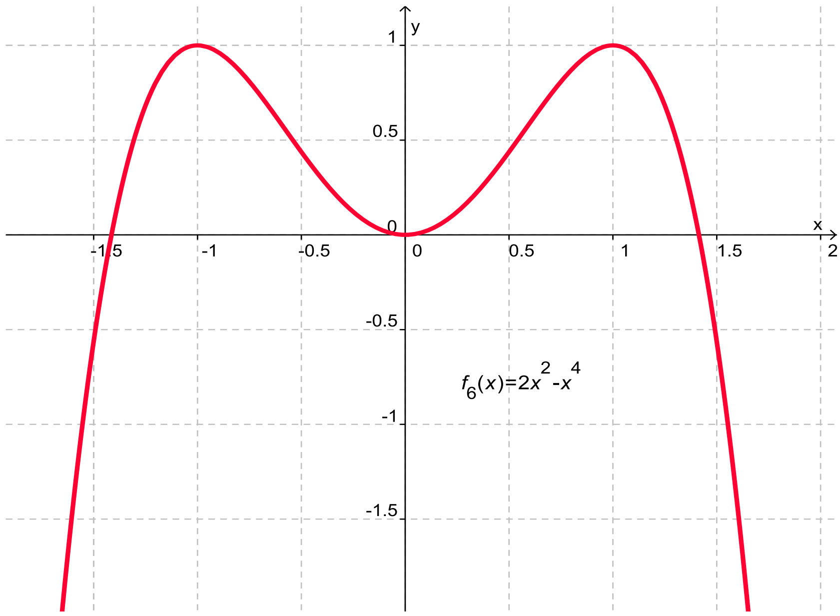
A függvény grafikonja:



(f) Az $f_6(x) = 2x^2 - x^4 = x^2(2 - x^2) = x^2(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2}xx)$ függvénynek $x_1 = 0$-ban kétszeres, az $x_2 = \sqrt{2}$ és $x_3 = -\sqrt{2}$ helyeken egyszeres multiplicitású zérushelye van. Továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} f_6(x) = \lim_{x\to+\infty} f_6(x) = -\infty.$$

A függvény grafikonja:

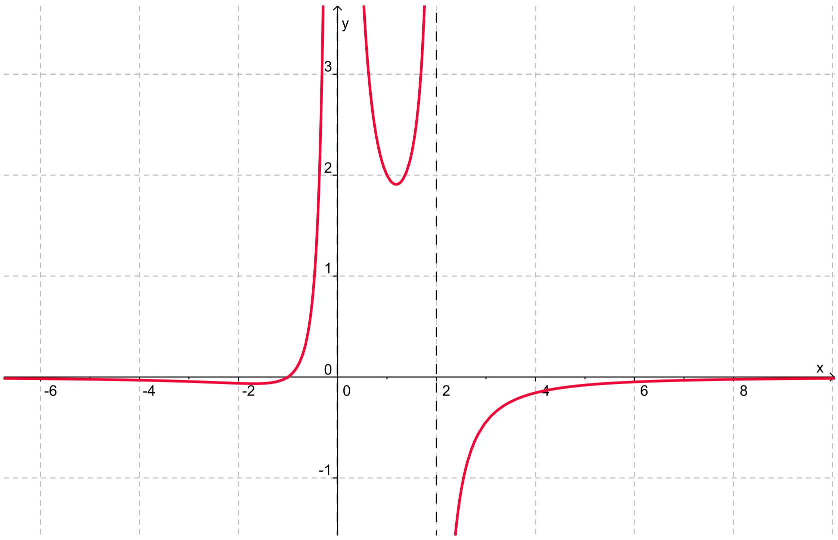


4.7.2. A racionális törtfüggvények ábrázolásához célszerű meghatározni a függvény zérushelyeit, pólushelyeit (multiplicitásaikkal együtt) és a hézagpontjait. A jelleggörbe vázolásához érdemes továbbá a $\pm\infty$-beli határértékeket kiszámolni.

(a) Az f_1 függvénynek $x_0 = -1$-ben egyszeres multiplicitású zérushelye van, továbbá az $x_1 = 0$ helyen kétszeres, míg $x_2 = 2$-ben egyszeres pólusa van, vagyis ezeken a helyeken függőleges aszimptotája van a függvénynek. Nincs hézagpont. Az f_1 valódi törtfüggvény, tehát

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 0.$$

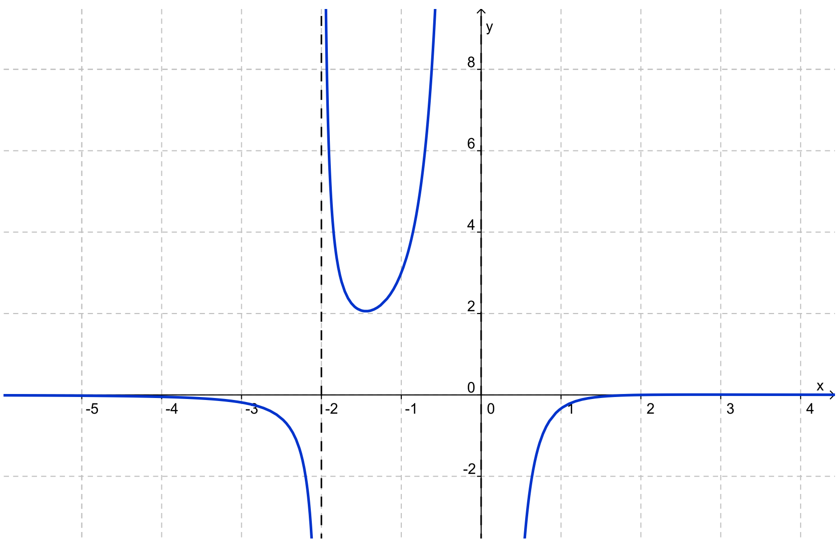
A függvény grafikonja:



(b) Az f_2 függvénynek $x_0 = 2$-ben egyszeres multiplicitású zérushelye van, az $x_1 = 0$ helyen háromszoros, míg $x_2 = -2$-ben egyszeres pólusa van, vagyis ezeken a helyeken függőleges aszimptotája van a függvénynek. Nincs hézagpont. Az f_2 valódi törtfüggvény, tehát

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to-\infty} f_2(x) = 0.$$

A függvény grafikonja:



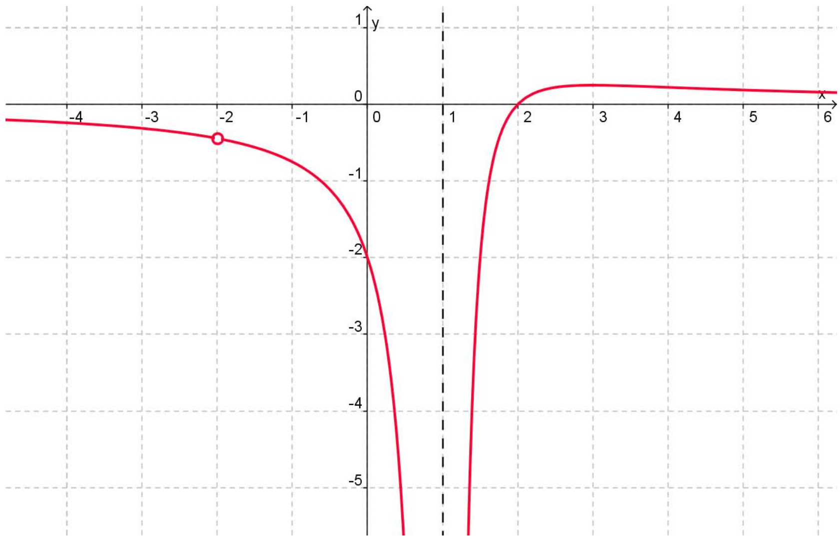
(c) A függvény ábrázolásához írjuk a számlálót is gyöktényezős alakba, majd egyszerűsítsünk!

$$f_3(x) = \frac{x^2-4}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

Vagyis az f_3 függvénynek $x_0 = 2$-ben egyszeres multiplicitású zérushelye van, az $x_1 = 1$ helyen pedig kétszeres pólusa. Hézagpontja: $x_2 = -2$. Az f_3 valódi törtfüggvény, tehát

$$\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim_{x\to-\infty} f_3(x) = 0.$$

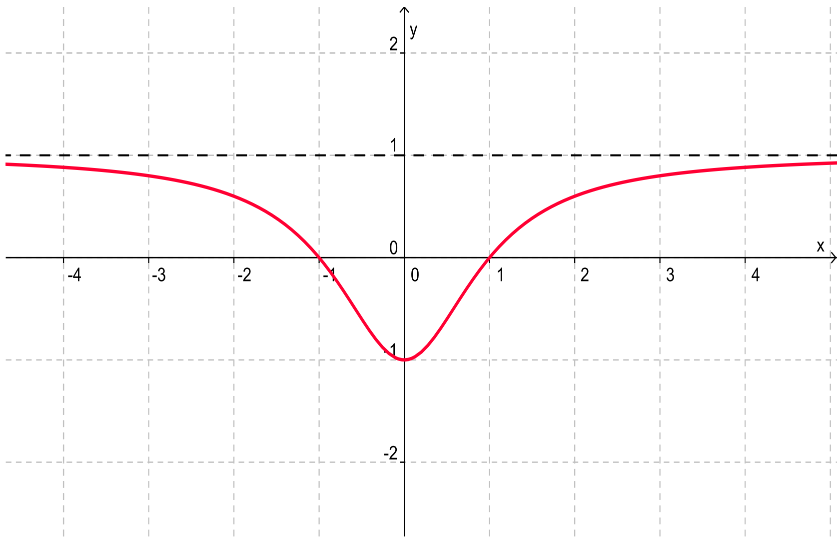
A függvény grafikonja:



(d) Az f_4 függvénynek az $x_0 = -1$ és $x_1 = 1$ helyeken egyszeres multiplicitású zérushelye van. Pólus és hézagpont nincs. f_4 áltört függvény és

$$\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = \lim_{x\to-\infty} f_4(x) = 1.$$

A függvény grafikonja:



(e) Az f_5 olyan áltörtfüggvény, ahol megegyezik a számlálóban lévő és a nevezőben lévő polinom fokszáma. Alakítsuk szorzattá a nevezőt:

$$f_5(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$$

Az $x_0 = 0$ kétszeres zérushely, $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$ pedig egyszeres pólushelyek, továbbá

$$\lim_{x\to -1-0} f_5(x) = \lim_{x\to 1+0} f_5(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to -1+0} f_5(x) = \lim_{x\to 1-0} f_5(x) = -\infty.$$

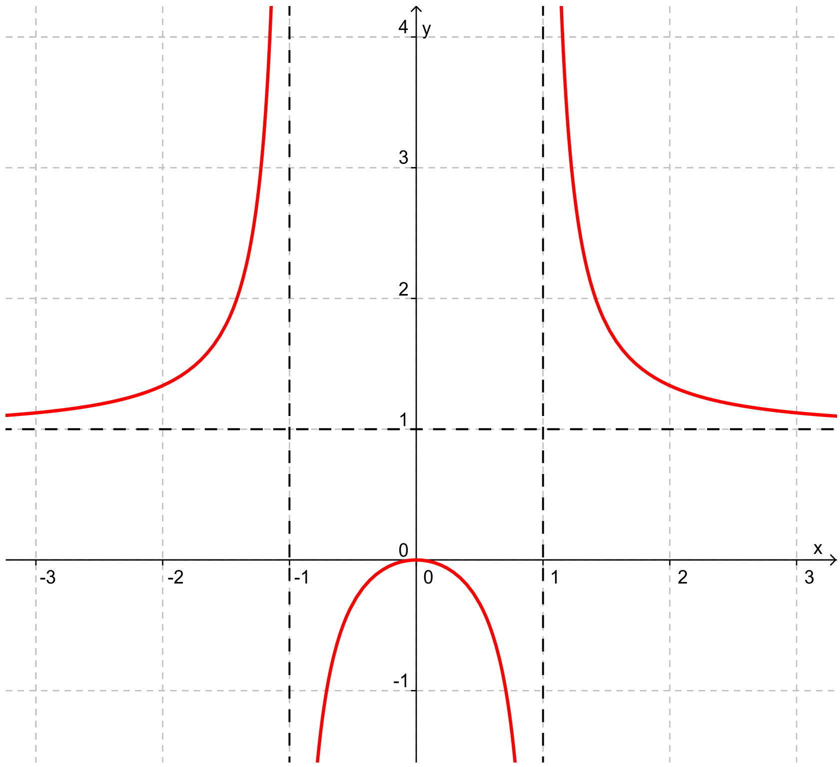
A függvénynek nincs hézagpontja. Nyilvánvaló, hogy

$$f_5(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)+1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1},$$

azaz

$$\lim_{x\to +\infty} f_5(x) = \lim_{x\to -\infty} f_5(x) = 1.$$

Az $y = 1$ egyenes a függvény aszimptotája, amelyet a függvény görbéje nem metsz. A függvény grafikonja:



(f) Az f_6 olyan áltörtfüggvény, ahol a számlálóban lévő polinom fokszáma egyel nagyobb, mint a nevezőben lévő polinom fokszáma. Alakítsuk szorzattá a számlálót:

$$f_6(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x},$$

azaz $x_0 = 1$ és $x_1 = -1$ egyszeres zérushelyek, $x_2 = 0$ pedig egyszeres pólushely, továbbá

$$\lim_{x\to 0-0} f_6(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0} f_6(x) = -\infty.$$

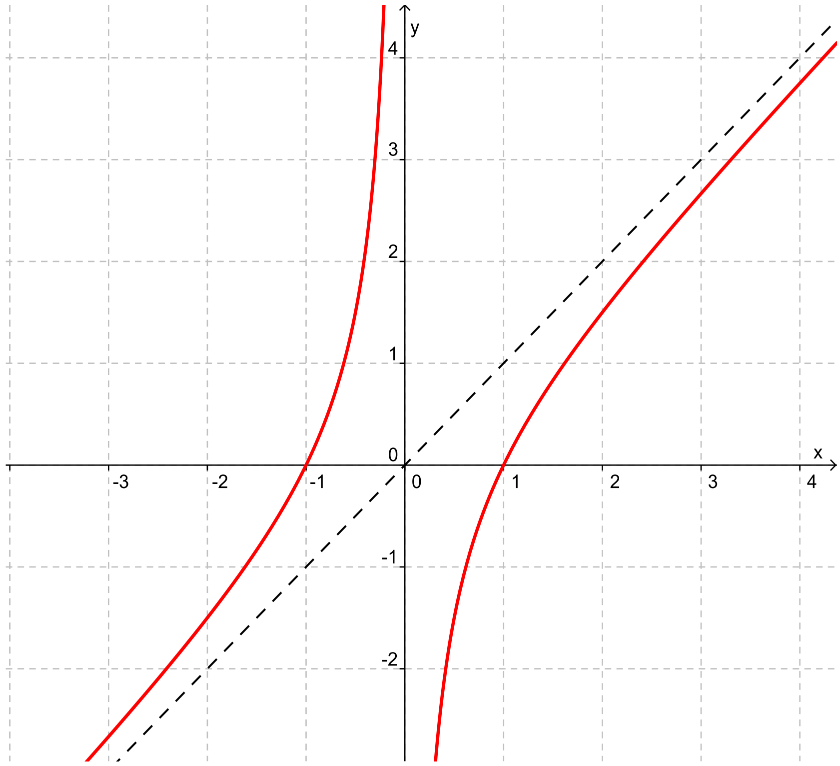
A függvénynek nincs hézagpontja. Nyilvánvaló, hogy

$$f_6(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = x - \frac{1}{x},$$

azaz

$$\lim_{x\to +\infty} f_6(x) = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to -\infty} f_6(x) = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty.$$

Az $y = x$ egyenes a függvény aszimptotája. A függvény grafikonja:



(g) f_7 olyan áltört függvény, ahol a számlálóban lévő polinom fokszáma egyel nagyobb, mint a nevezőben lévő polinom fokszáma. $x_0 = 0$ kétszeres multiplicitású pólushely és

$$\lim_{x\to 0-0} f_7(x) = \lim_{x\to 0+0} f_7(x) = +\infty.$$

Továbbá

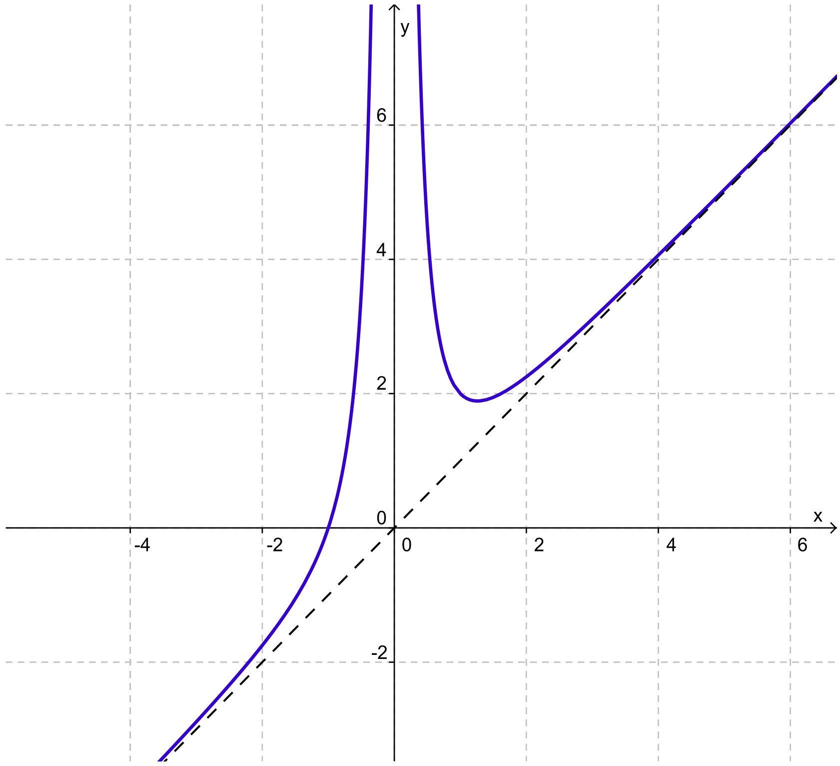
$$\lim_{x\to +\infty} f_7(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+x^3}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + x\right) = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

és

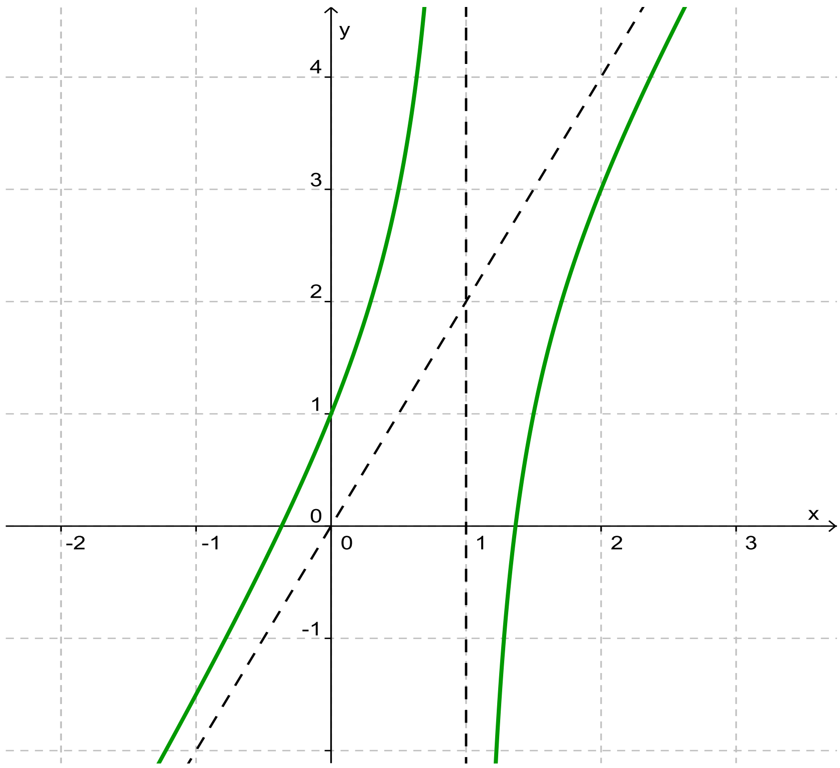
$$\lim_{x\to -\infty} f_7(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1+x^3}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{x^2} + x\right) = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty.$$

Az $y = x$ egyenes a függvény aszimptotája.

Az f_7 függvény grafikonja:



(h) Az $y = 2x$ egyenes a függvény aszimptotája. Az f_8 függvény grafikonja:



(i) f_9 olyan áltört függvény, ahol a számlálóban lévő polinom fokszáma kettővel nagyobb, mint a nevezőben lévő polinom fokszáma. Alakítsuk szorzattá a számlálót:

$$f_9(x) = \frac{x^4-1}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x+1)^2}.$$

Az f_9 függvénynek $x_0 = 1$ egyszeres zérushelye, $x_1 = -1$ pedig egyszeres pólushely, mert az $(x+1)$ gyöktényező a számlálóban és a nevezőben is megtalálható, de a nevezőben egyel nagyobb kitevőn, mint a számlálóban. Továbbá:

$$\lim_{x\to -1-0} f_9(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to -1+0} f_9(x) = -\infty.$$

Bontsuk résztörtek összegére az f_9 áltört függvényt:

$$f_9(x) = \frac{x^4-1}{(x+1)^2} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4}{x+1},$$

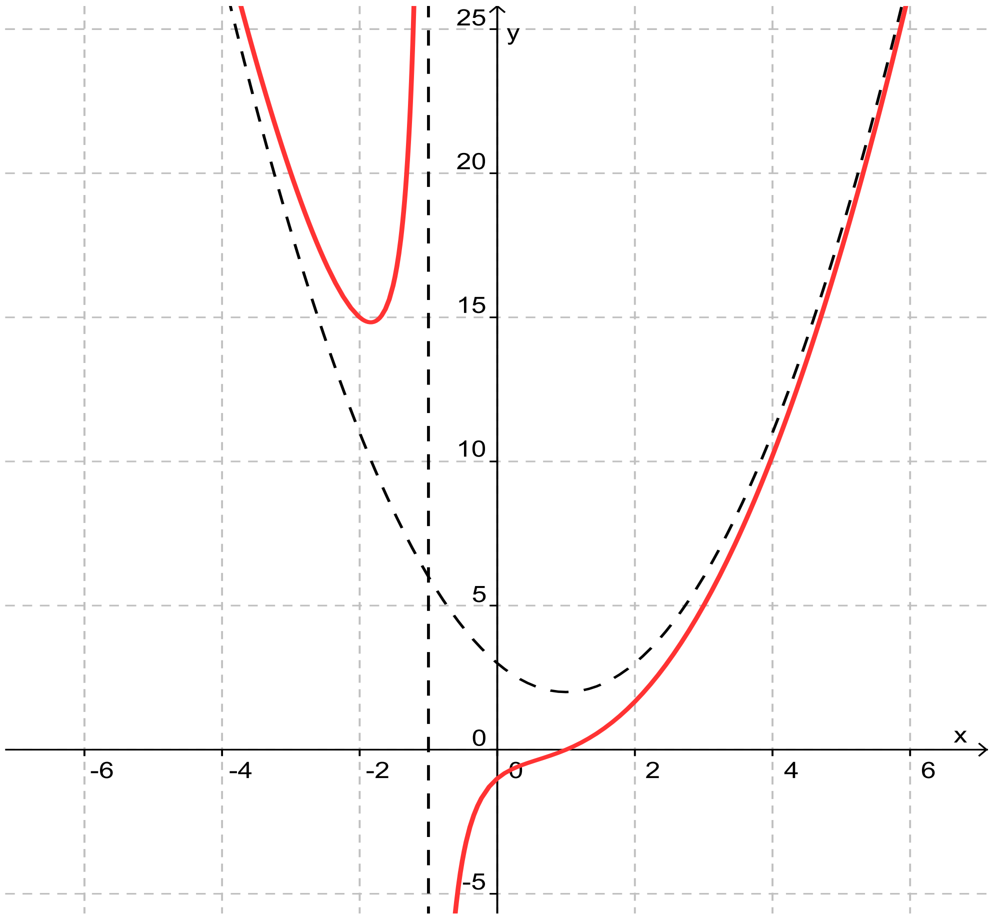
azaz

$$\lim_{x\to +\infty} f_9(x) = \lim_{x\to +\infty} (x^2-2x+3) = +\infty,$$

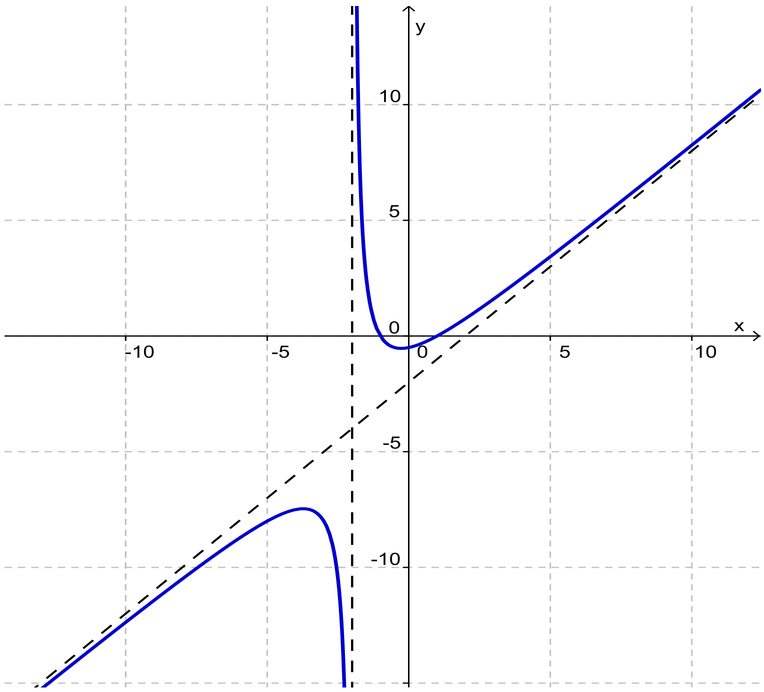
és

$$\lim_{x\to -\infty} f_9(x) = \lim_{x\to -\infty} (x^2-2x+3) = +\infty.$$

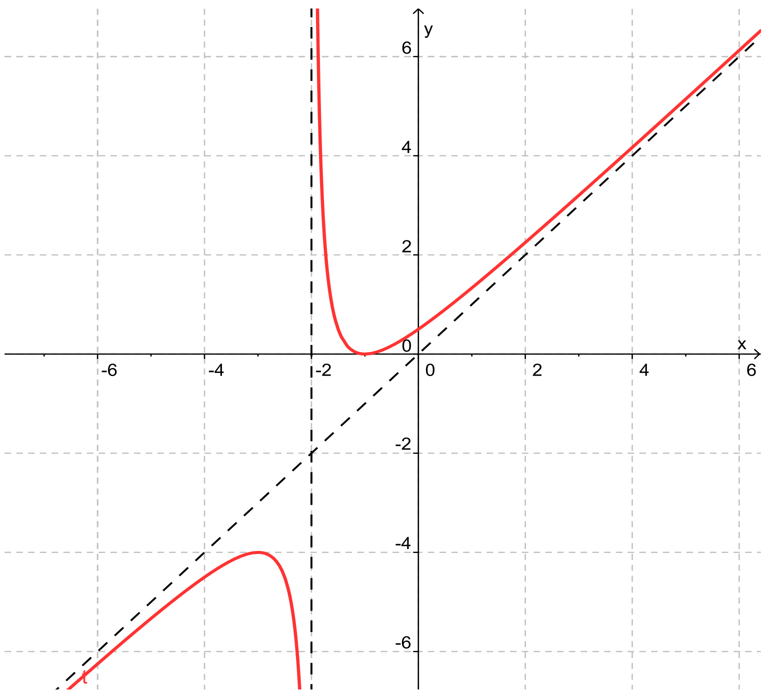
Az $y = x^2-2x+3 = (x-1)^2+2$ parabola a függvény aszimptotája. Az f_9 függvény grafikonja:



(j) f_{10}-nek $x_0 = -1$-ben és $x_1 = 1$-ben egyszeres multiplicitású zérushelye, $x_2 = -2$-ben pedig egyszeres pólusa van. Az $y = x - 2$ egyenes a függvény aszimptotája. Az f_{10} függvény grafikonja:



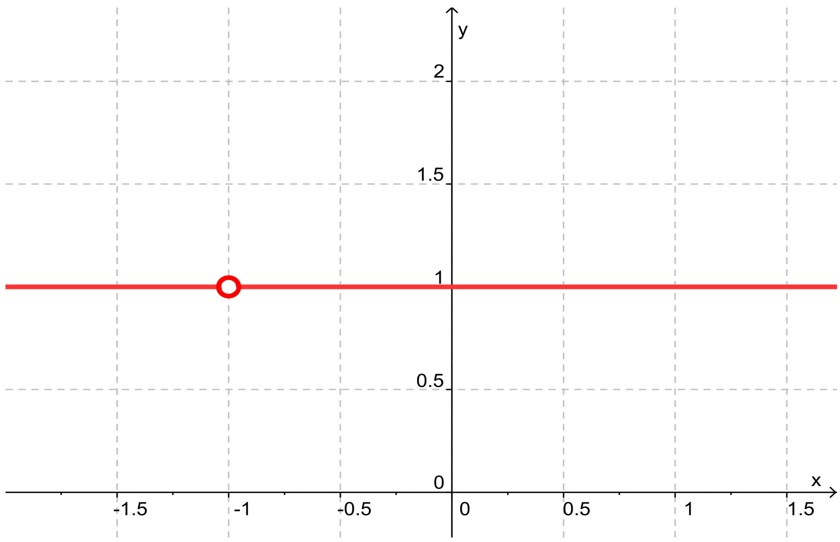
(k) $f_{11}(x) = x + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{(x+1)^2}{x+2}$. Az f_{11}-nek $x_0 = -1$-ben kétszeres multiplicitású zérushelye, $x_1 = -2$-ben pedig egyszeres pólusa van. Az $y = x$ egyenes a függvény aszimptotája. Az f_{11} függvény grafikonja:



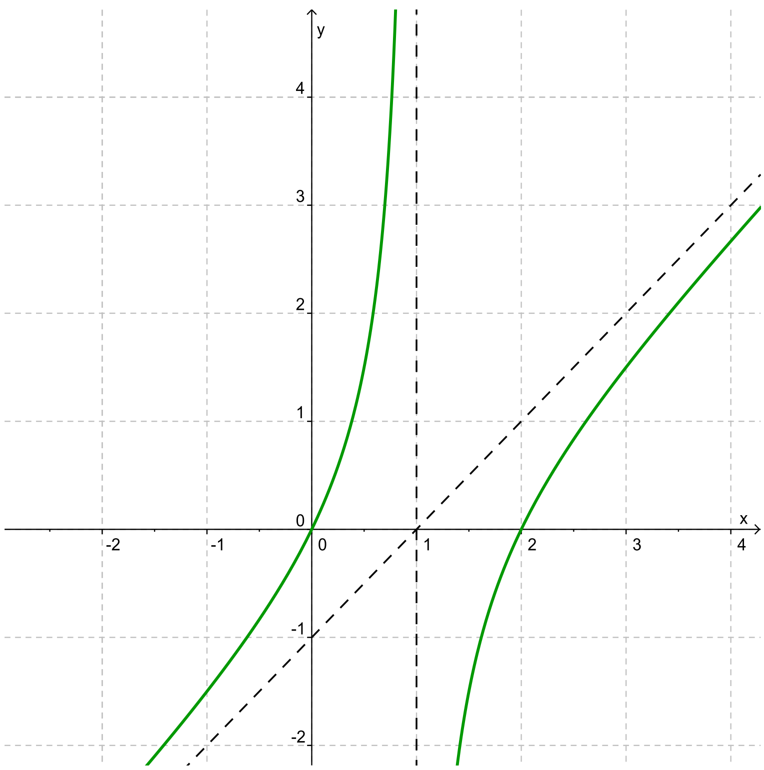
(l) $D_{f_{12}} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ és

$$f_{12}(x) = x - \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - (x - 1) = 1.$$

A függvény grafikonja:



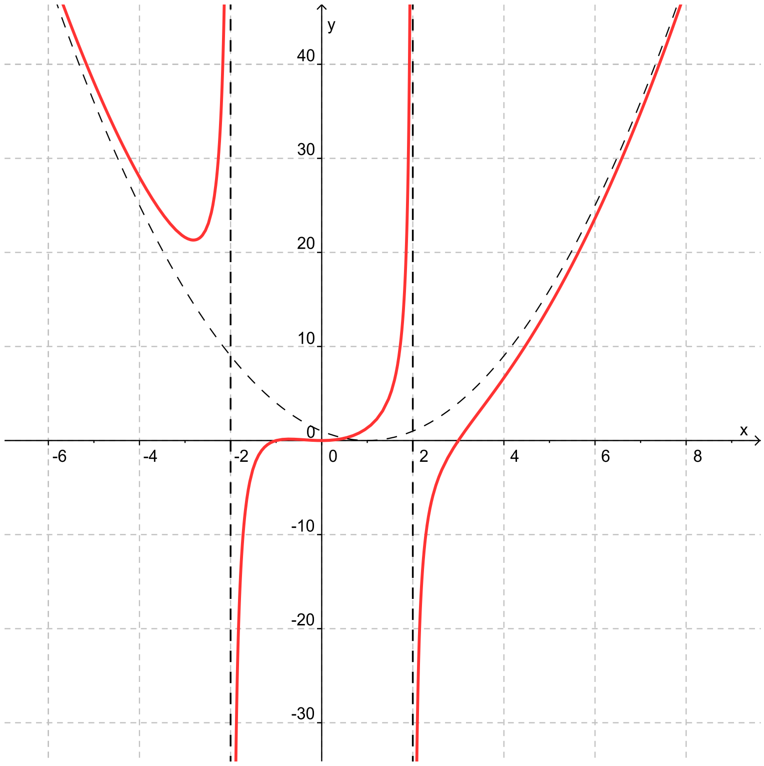
(m) f_{13}-nak az $x_0 = 0$ helyen és $x_1 = 2$-ben egyszeres multiplicitású zérushelye, $x_2 = 1$-ben pedig egyszeres pólusa van. Az $y = x - 1$ egyenes a függvény aszimptotája. Az f_{13} függvény grafikonja:



(n) f_{14}-nek az $x_0 = 0$ helyen kétszeres, az $x_1 = 3$ és $x_2 = -1$ helyeken egyszeres zérushelye van. $x_3 = -2$-ben és $x_4 = 2$-ben egyszeres multiplicitású pólusa van. Az

$$y = (x-1)^2$$

parabola a függvény aszimptotája. Az f_{14} függvény grafikonja:



4.7.3. A $g(x)$ olyan áltört függvény, ahol a számlálóban lévő polinom fokszáma egyel nagyobb, mint a nevezőben lévő polinom fokszáma. Alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt is:

$$g(x) = \frac{x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x}{2x^3 + 6x^2 - 2x - 6} = \frac{x(x+3)(x-2)^2}{2(x+1)(x+3)(x-1)},$$

azaz $x_0 = -3$ hézagpont, $x_1 = 0$ egyszeres zérushely, $x_2 = 2$ kétszeres zérushely, $x_3 = -1$ és $x_4 = 1$ pedig egyszeres pólushelyek, továbbá

$$\lim_{x\to -1-0} g(x) = \lim_{x\to 1-0} g(x) = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to -1+0} g(x) = \lim_{x\to 1+0} g(x) = +\infty.$$

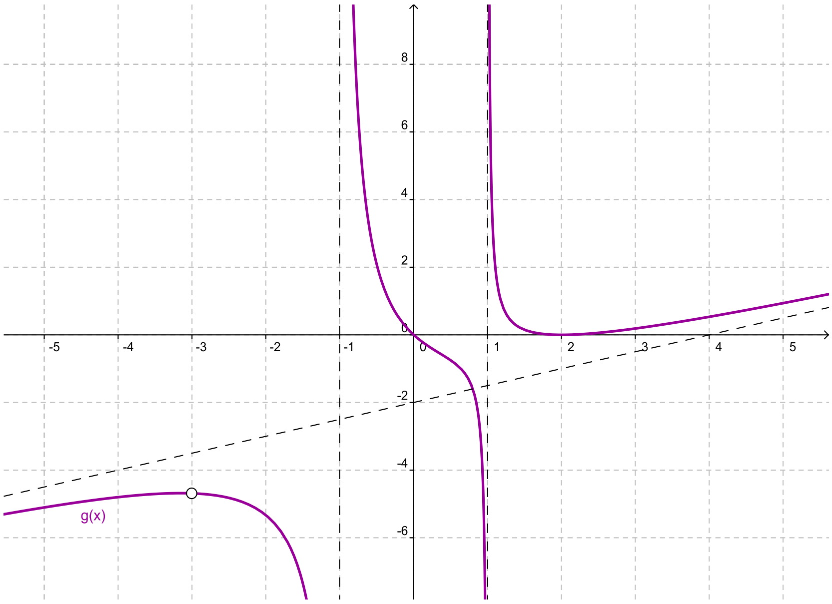
Bontsuk fel a $g(x)$ áltört függvényt egy racionális egészfüggvény és egy valódi tört összegére!

$$g(x) = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{11x + 5x^2 - 12}{2\,(x-1)\,(x+1)\,(x+3)},$$

Azonnal adódik, hogy

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) = -\infty.$$

Az
$$y = \frac{1}{2}x - 2$$
egyenes a függvény aszimptotája. A hézagpontot nullkör jelöli a függvény grafikonján.



4.7.4. Egyszerűsítsük a törtet!
$$\frac{2x^3 - 2x^2 - 12x}{x^3 - 3x^2 - 10x} = \frac{2x \cdot (x^2 - x - 6)}{x \cdot (x^2 - 3x - 10)} = \frac{2(x-3)(x+2)}{(x-5)(x+2)} = \frac{2x-6}{x-5} = 2 + \frac{4}{x-5}.$$
Az $x_0 = -2$ helyen van határérték:
$$\lim_{x \to -2} \left(2 + \frac{4}{x-5} \right) = 2 - \frac{4}{7} = \frac{10}{7}.$$
Ha $A = \frac{10}{7}$, akkor az $x_0 = -2$ helyen folytonos a függvény. Az $x_1 = -5$ helyen pólusa van a függvénynek, így itt nem tehető folytonossá.

4.7.5. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, mert
$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-1)} = \frac{x-3}{x} = 1 - \frac{3}{x}.$$
Az $x_0 = 1$ helyen van határérték:
$$\lim_{x \to 1} \left(1 - \frac{3}{x} \right) = 1 - 3 = -2.$$
Ha $A = -2$, akkor az $x_0 = 1$ helyen folytonos a függvény. Az $x_1 = 0$ helyen pólusa van a függvénynek, így itt nem tehető folytonossá.

4.7.6. Alakítsuk át a törtet!

$$\frac{x^3-9x}{2x^3+6x^2} = \frac{x(x-3)(x+3)}{2x^2(x+3)} = \frac{x(x-3)}{2x^2} = \frac{x-3}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x}$$

Az $x_0 = -3$ helyen van határértéke a függvénynek:

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2x}\right) = 1.$$

Az $x_0 = -3$ helyen folytonos a függvény, ha $A = 1$. Az $x_1 = 0$ helyen nem tehető folytonossá a függvény, mert

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0} f(x) = -\infty.$$

Az $x_2 = 3$ helyen van határértéke a függvénynek:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2x}\right) = 0.$$

Az $x_2 = 3$ helyen folytonos a függvény, ha $C = 0$.

4.7.7. $A = 4$ esetén az $x_0 = -1$ helyen folytonos a függvény, mert

$$\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1,$$

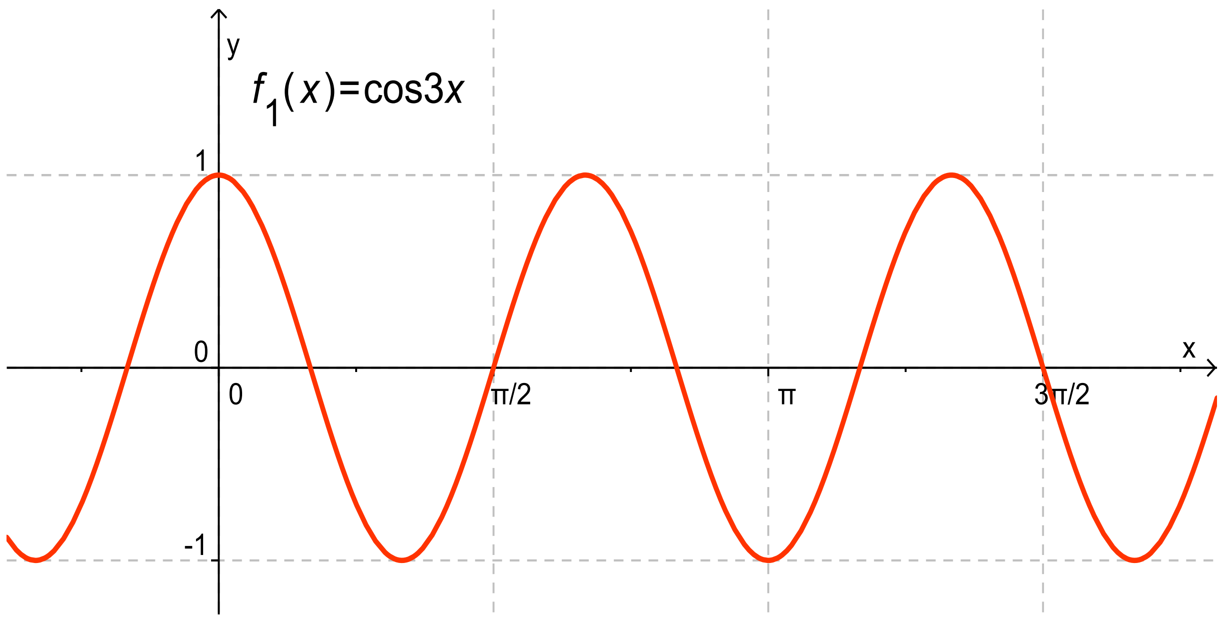
így

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 1 + 2 + 1 = 4.$$

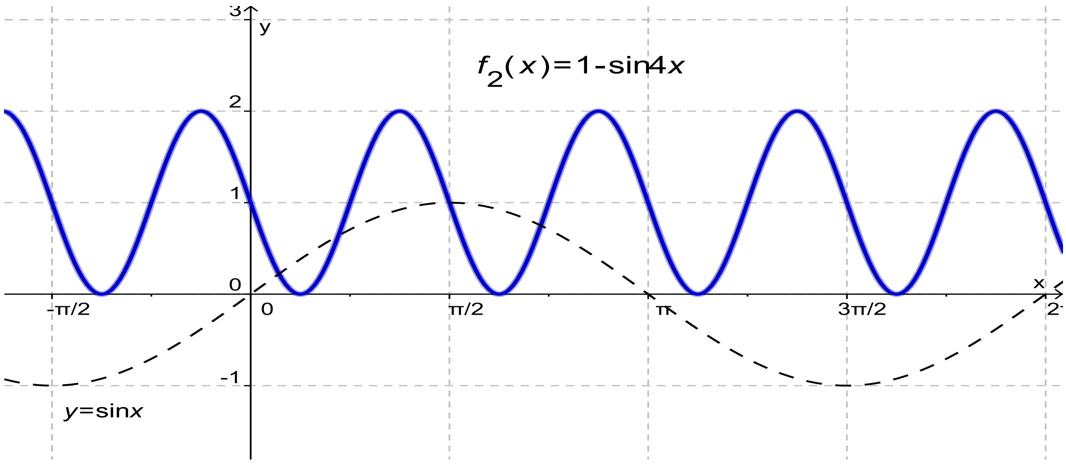
Az $x_1 = 0$ helyen pólusa van a függvénynek, így itt nem tehető folytonossá.

4.8.1.

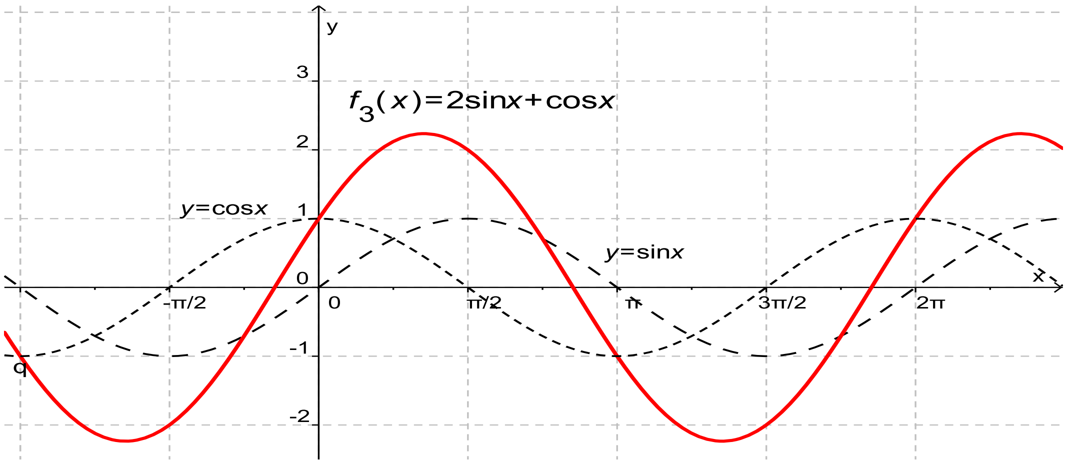
(a) A függvény grafikonja:



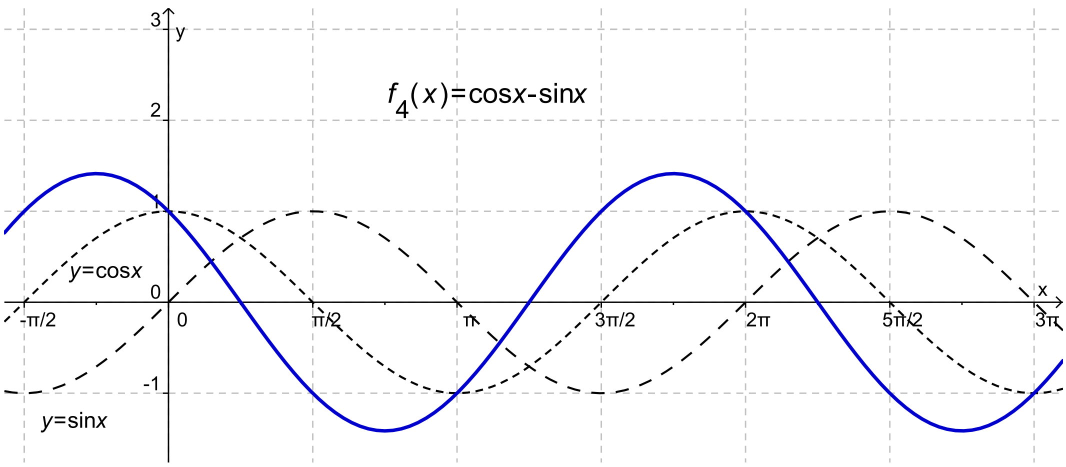
(b) A függvény grafikonja:



(c) A függvény grafikonja:

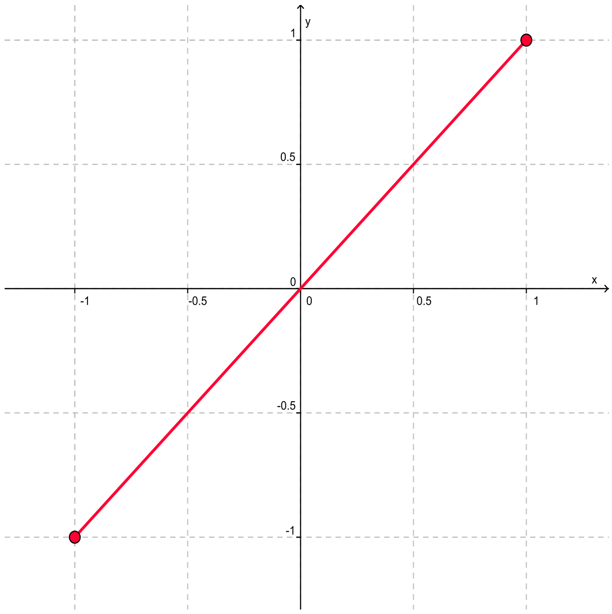


(d) A függvény grafikonja:



4.8.2.

(a) $D_{f_1} = [-1, 1]$ és $-1 \leq f_1(x) \leq 1$. A függvény grafikonja:



(b) $D_{f_2} = \mathbb{R}$ és $-\dfrac{\pi}{2} \leq f_2(x) \leq \dfrac{\pi}{2}$. A függvény grafikonjának egyenlete:

$$y = \arcsin(\sin x),$$

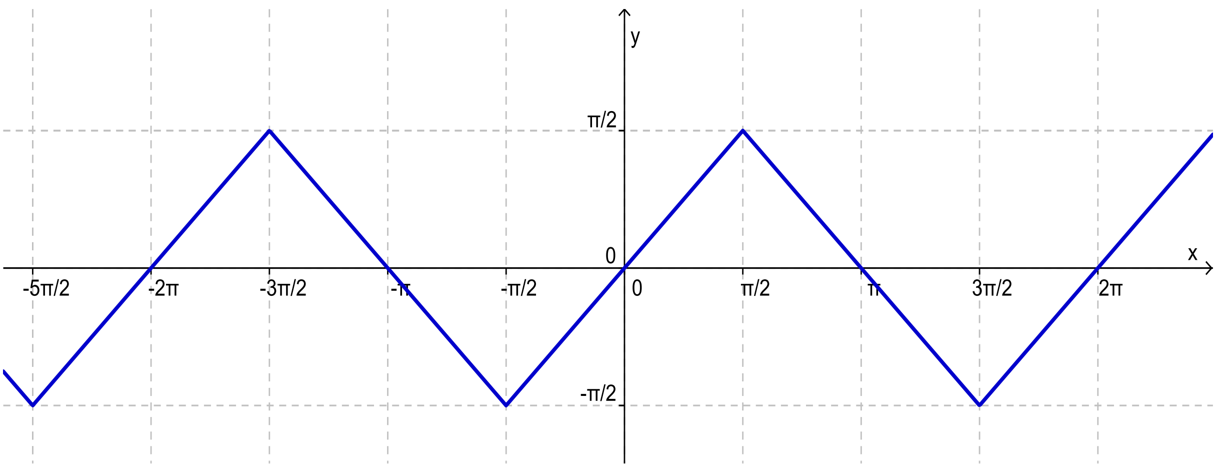
azaz

$$\sin y = \sin x.$$

A kapott trigonometrikus egyenlet megoldásai:

$$y = x + 2k\pi \qquad \text{és} \qquad y = \pi - x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

vagyis a függvény grafikonja két egyenesseregnek a $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ sávba eső darabjaiból álló töröttvonal.



(c) $D_{f_3} = [-1, 1]$ és $-1 \leq f_3(x) \leq 1$. A függvény grafikonja megegyezik az f_1 függvény grafikonjával.

(d) $D_{f_4} = \mathbb{R}$ és $0 \leq f_4(x) \leq \pi$. A függvény grafikonjának egyenlete:

$$y = \arccos(\cos x),$$

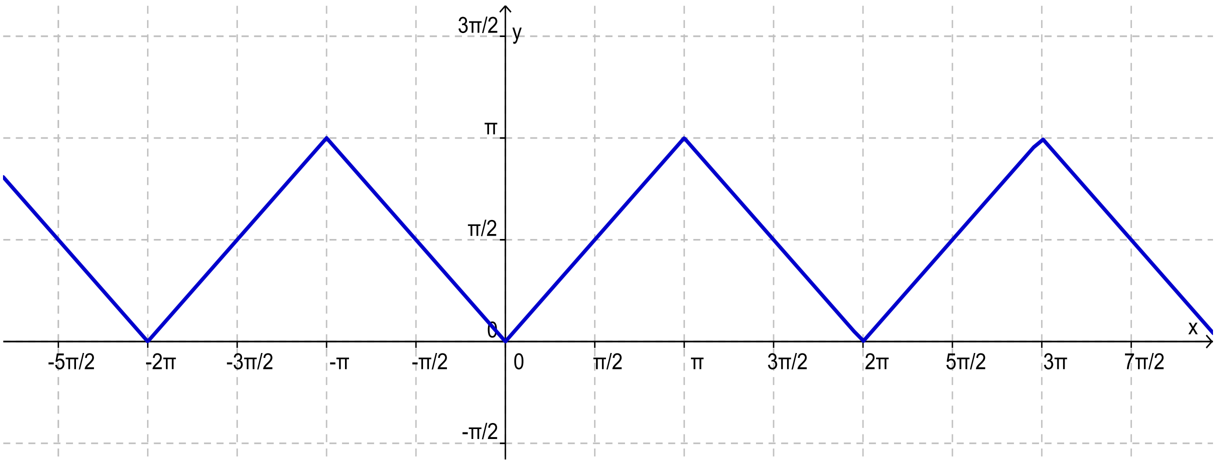
azaz

$$\cos y = \cos x.$$

A kapott trigonometrikus egyenlet megoldásai:

$$y = x + 2k\pi \qquad \text{és} \qquad y = -x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

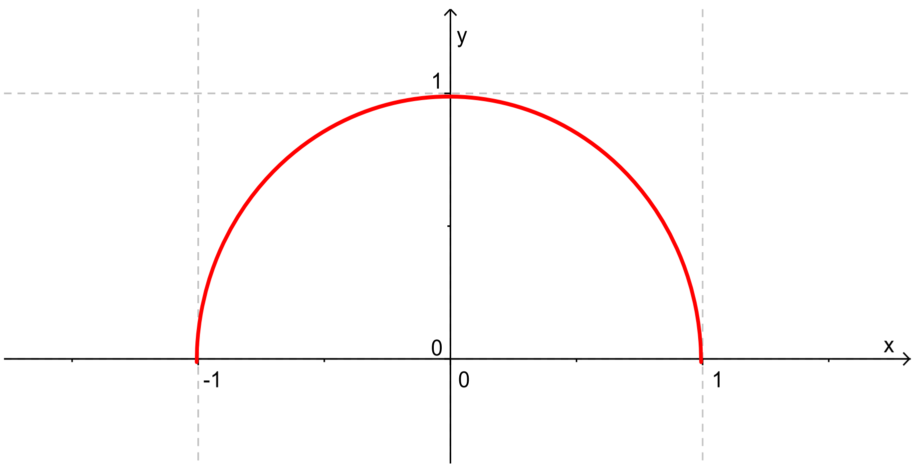
vagyis a függvény grafikonja két egyenesseregnek a $0 \leq y \leq \pi$ sávba eső darabjaiból álló töröttvonal. A függvény grafikonja:



(e) $D_{f_5} = [-1, 1]$ és $0 \leq f_5(x) \leq 1$.

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

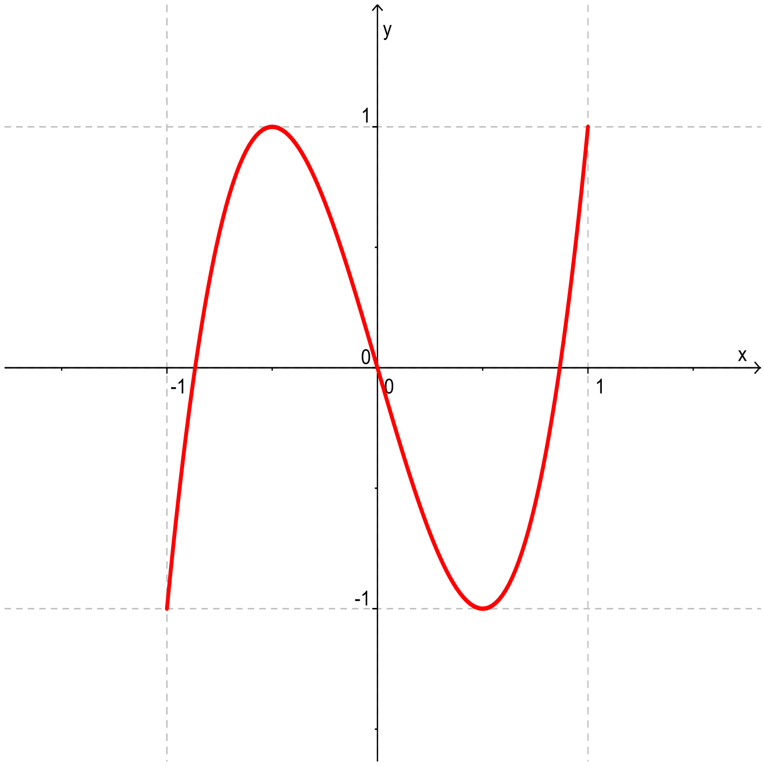
A függvény grafikonja:



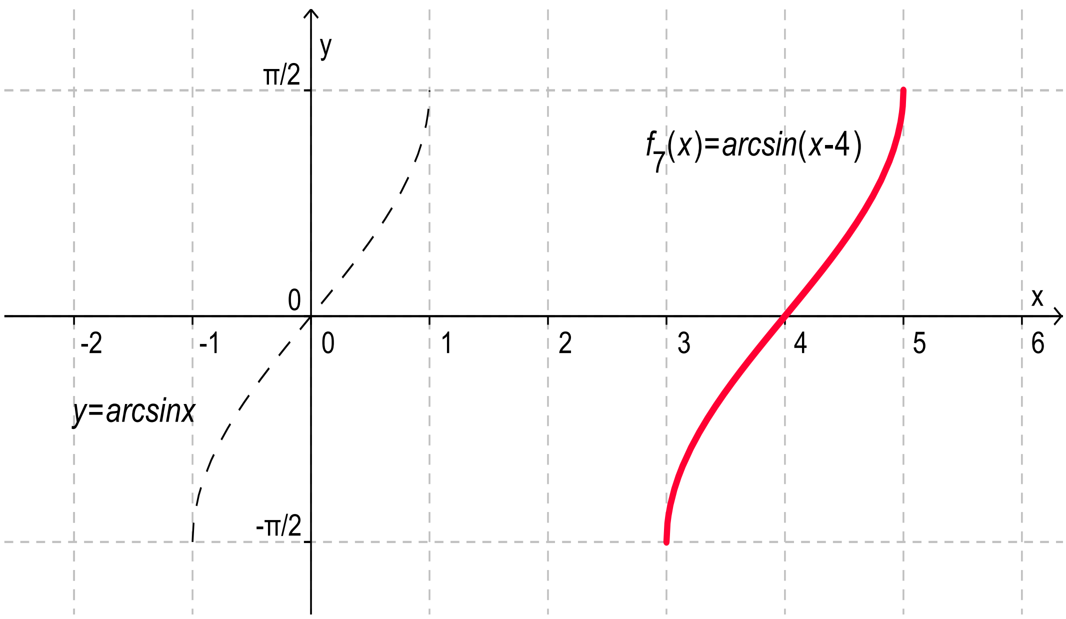
(f) $-1 \le x \le 1$, felhasználva, hogy $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3\sin^2 \alpha \cos \alpha$, így

$$f_6(x) = \cos(3 \arccos x) = x^3 - 3(1-x^2)x = 4x^3 - 3x = x \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

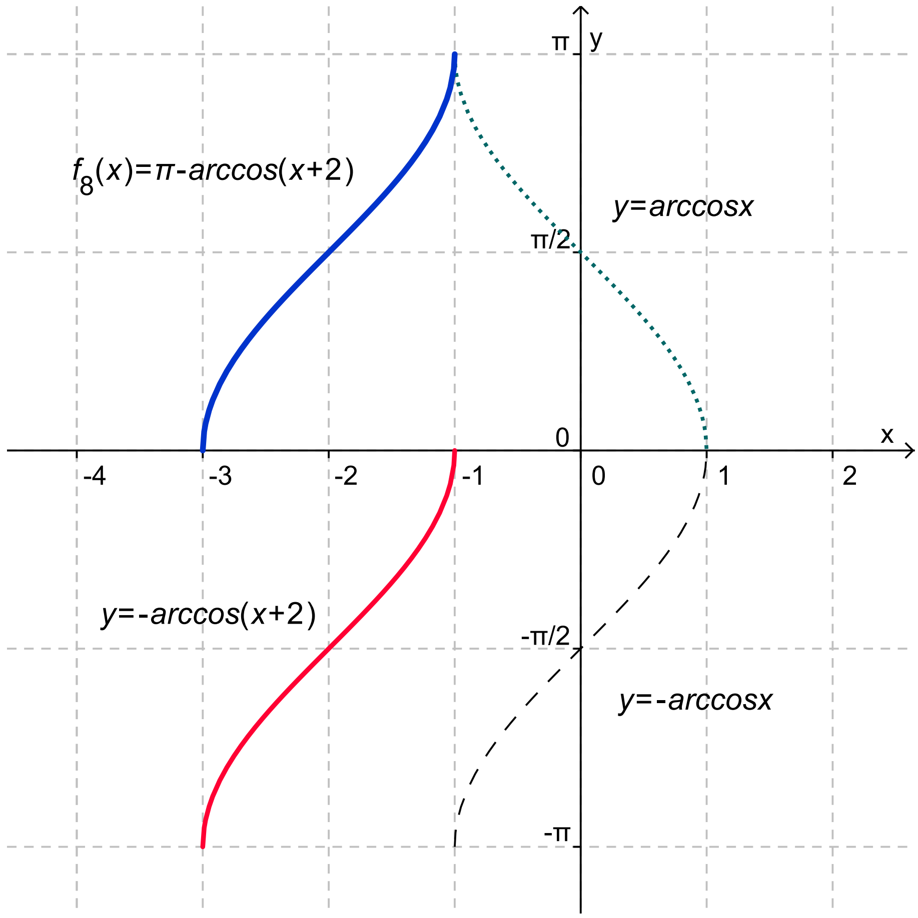
Három egyszeres zérusheye van f_6-nak. A függvény grafikonja:



(g) $-1 \le x - 4 \le 1$, azaz $3 \le x \le 5$. A függvény grafikonja:



(h) $-1 \leq x+2 \leq 1$, azaz $-3 \leq x \leq -1$. A függvény grafikonja:



4.8.3.

(a) Legyen $\alpha = \arccos \frac{4}{5}$. Mivel $0 < \frac{4}{5} < 1$, így $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ és $\sin \alpha > 0$.

$$\sin\left(\arccos \frac{4}{5}\right) = \sin \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{9}{25} = \frac{3}{5}.$$

(b) Legyen $\alpha = \arccos \frac{5}{13}$. Mivel $0 < \frac{5}{13} < 1$, így $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ és $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1-\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1.$$

Mivel $\operatorname{tg} \alpha > 0$, így

$$\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{5}{13}\right) = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \sqrt{\frac{169}{25} - 1} = \frac{12}{5}.$$

(c) Legyen $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$ és $\beta = \arccos \frac{1}{3}$. $0 < \frac{3}{5} < 1$, így $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, illetve $0 < \frac{1}{3} < 1$, így $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Azaz $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ és $\cos\beta = \frac{1}{3}$, valamint $\cos\alpha > 0$ és $\sin\beta > 0$. Így

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \qquad \text{és} \qquad \sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Tehát

$$\cos\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{1}{3}\right) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4-6\sqrt{2}}{15}.$$

(d) Legyen $\alpha = \arccos\frac{1}{5}$ és $\beta = \operatorname{arctg} 2$. $0 < \frac{1}{5} < 1$, így $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, illetve $2 > 0$, tehát $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Azaz $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ és $\operatorname{tg}\beta = 2$, továbbá $\sin\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$ és $\sin\beta > 0$. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Tehát

$$\sin\left(\arccos\frac{1}{5} - \operatorname{arctg} 2\right) = \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2\sqrt{6}-2}{5\sqrt{5}}.$$

4.8.4.

(a) A $2\operatorname{arctg} 10 + \arcsin\frac{20}{101} = \pi$ állítást igazoljuk. Ekvivalens alakja:

$$\arcsin\frac{20}{101} = \pi - 2\operatorname{arctg} 10,$$

ill.

$$\frac{20}{101} = \sin\left(\pi - 2\operatorname{arctg} 10\right).$$

Tekintsük az egyenlőség jobb oldalát!

$$\sin\left(\pi - 2\operatorname{arctg} 10\right) = \sin\pi\cdot\cos(2\operatorname{arctg} 10) - \cos\pi\cdot\sin(2\operatorname{arctg} 10) = \sin(2\operatorname{arctg} 10).$$

Legyen $\alpha = \operatorname{arctg} 10$. Ekkor $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, azaz $\sin\alpha > 0$ és $\cos\alpha > 0$. Ismert, hogy

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \text{és} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Tehát

$$\sin\alpha = \frac{10}{\sqrt{101}} \qquad \text{és} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{101}}.$$

Vagyis

$$\sin(2\operatorname{arctg} 10) = 2\cdot\sin(\operatorname{arctg} 10)\cdot\cos(\operatorname{arctg} 10) = 2\cdot\frac{10}{\sqrt{101}}\cdot\frac{1}{\sqrt{101}} = \frac{20}{101}.$$

Az egyenlőség bal oldalán álló számhoz jutottunk, tehát az állítás igaz.

(b) Az $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ állítást igazoljuk. Ekvivalens alakja:

$$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\pi}{6} + \arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}},$$

ill.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\right).$$

Legyen

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \qquad \text{és} \qquad \beta = \arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}.$$

Ekkor

$$\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

továbbá

$$\cos\beta = \cos\left(\arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}.$$

Nyilvánvaló, hogy $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, ebből adódóan $\sin\beta > 0$ és

$$\sin\beta = \sin\left(\arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}}{2\sqrt{3}}.$$

Alkalmazzuk az addíciós összefüggést!

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

azaz

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + \arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Az egyenlőség bal oldalán álló számhoz jutottunk, tehát az állítás igaz.

4.8.5. Mindkét függvény a $[-1, 1]$ intervallumon értelmezett. A bizonyítandó azonosság ekvivalens az

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

azonossággal. Mivel $-1 \le x \le 1$, így az egyenlőség jobb és bal oldalának értékei a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba esnek. A sin függvény ezen az intervallumon szigorúan monoton növekvő, ezért elég igazolni az alábbi azonosságot:

$$\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right).$$

Mivel $\sin(\arcsin x) = x$ illetve

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos(\arccos x) - \cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin(\arccos x) = \cos(\arccos x) = x,$$

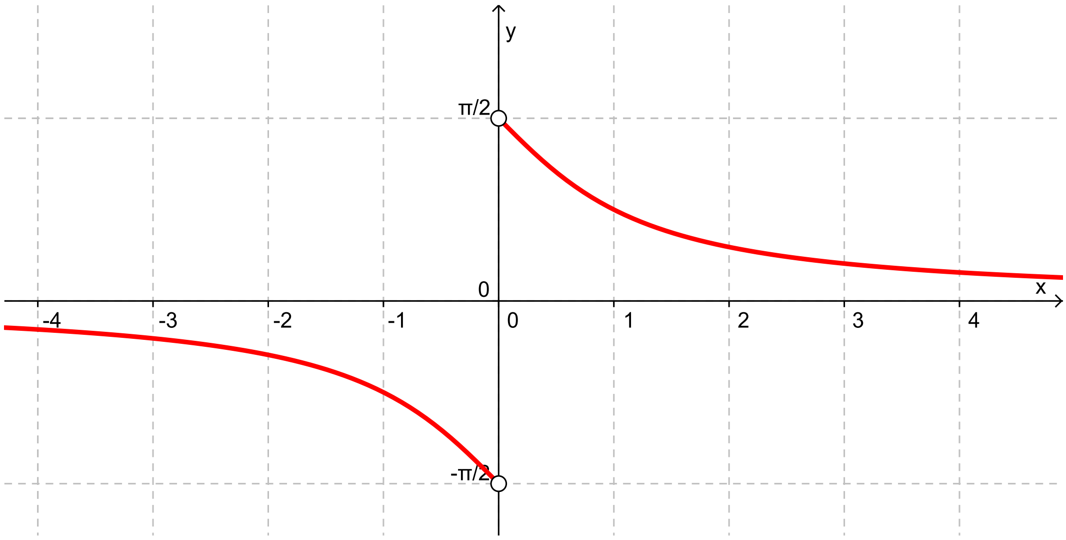
azaz minden $x \in [-1,1]$ esetén fennáll az azonosság.

4.8.6.

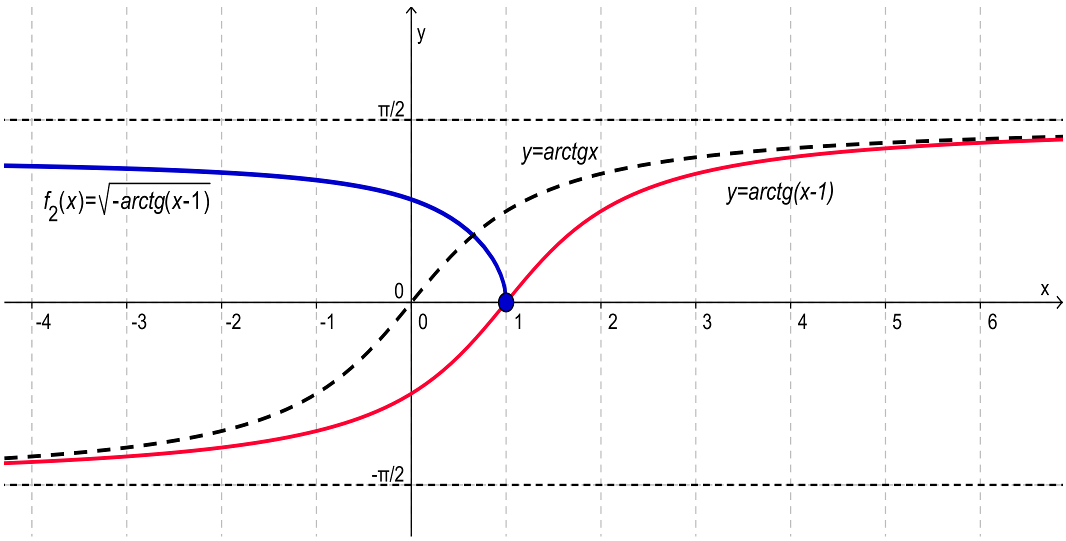
(a) $D_{f_1} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Mivel $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$, így

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 0.$$

Továbbá $\lim\limits_{x\to0+0}\frac{1}{x} = +\infty$, így $\lim\limits_{x\to0+0} f_1(x) = \frac{\pi}{2}$ és $\lim\limits_{x\to0-0}\frac{1}{x} = -\infty$, így $\lim\limits_{x\to0-0} f_1(x) = -\frac{\pi}{2}$. A függvény grafikonja:



(b) $D_{f_2} = (\infty, 1]$. A függvény grafikonja:



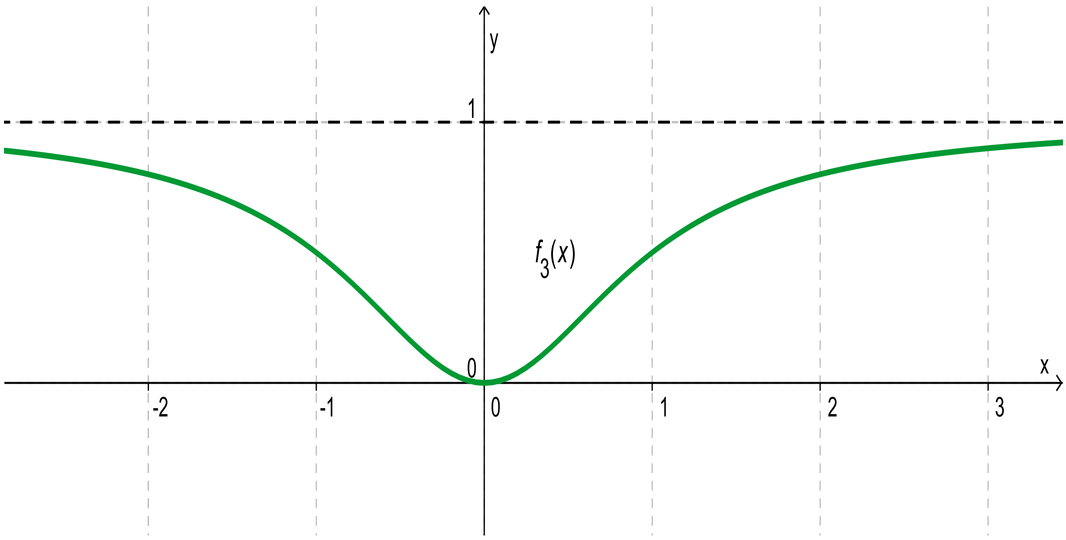
(c) $D_{f_3} = \mathbb{R}$. Legyen $\alpha = \operatorname{arctg} x$.

$$\sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \frac{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) + 1} = \frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Az f_3 függvénynek az $x_0 = 0$ helyen kétszeres multiplicitású zérusheye van, továbbá

$$\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim_{x\to-\infty} f_3(x) = 1.$$

A függvény grafikonja:



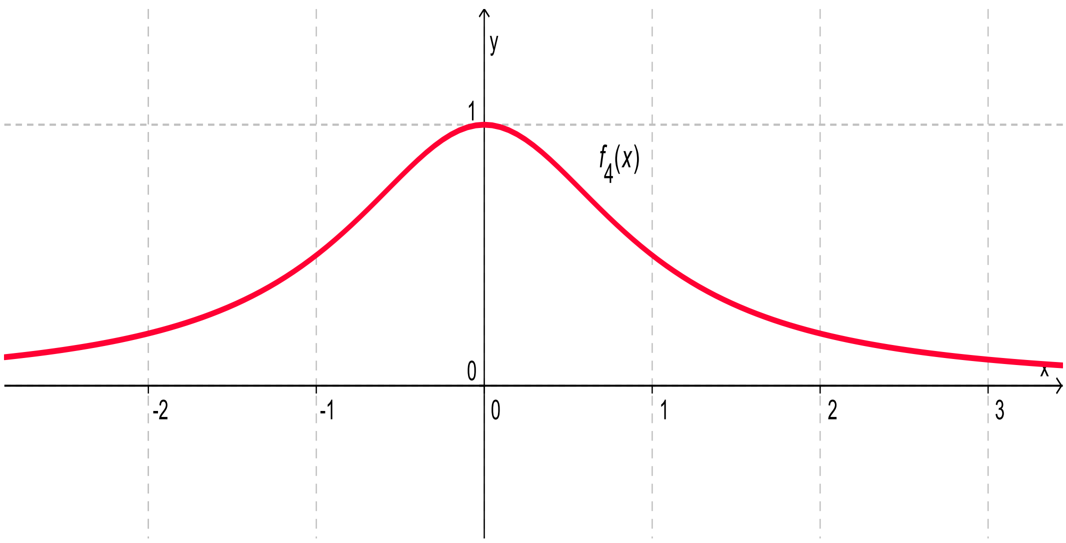
(d) $D_{f_4} = \mathbb{R}$. Legyen $\alpha = \operatorname{arctg} x$.

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) + 1} = \frac{1}{x^2+1}.$$

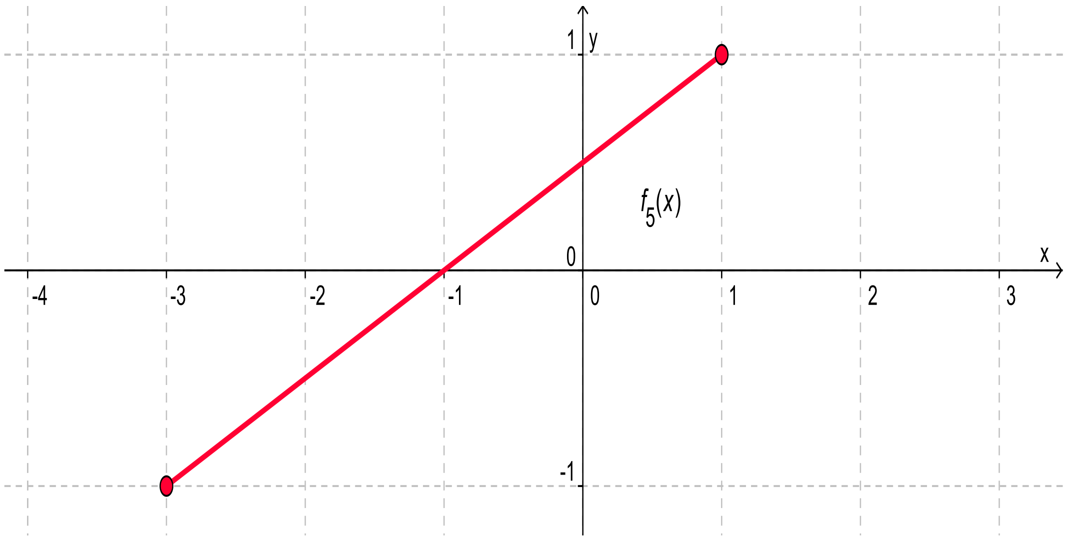
Az f_4 függvény valódi tört, így

$$\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = \lim_{x\to-\infty} f_4(x) = 0.$$

A függvény grafikonja:



(e) $f_5(x) = \sin\left(\arcsin\dfrac{x+1}{2}\right) = \dfrac{x+1}{2}$, valamint $-1 \le \dfrac{x+1}{2} \le 1$, azaz $-3 \le x \le 1$. A függvény grafikonja:



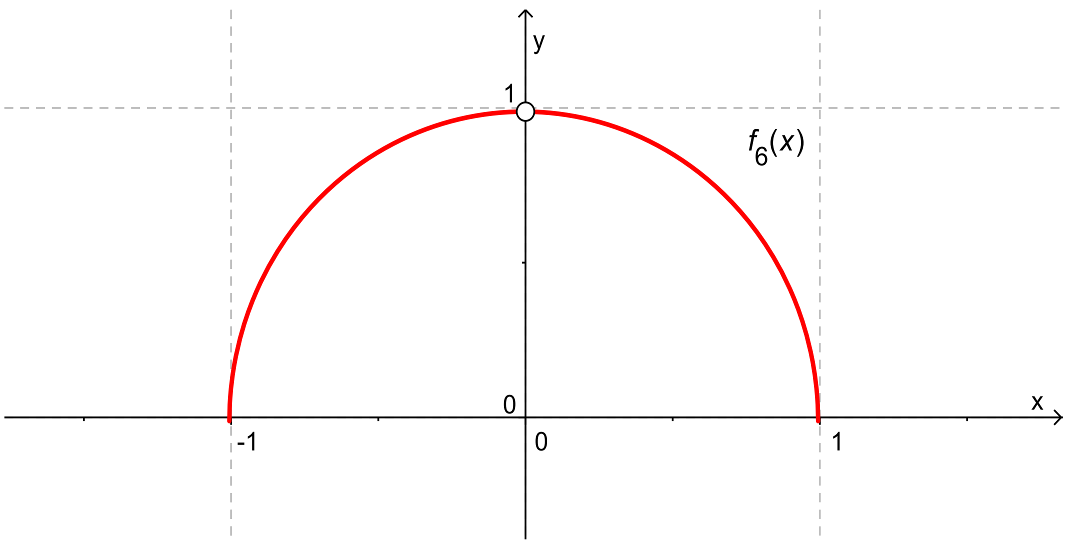
(f) $-1 \le x \le 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \dfrac{\pi}{2}$, $\arcsin x \ne 0$, azaz $x \ne 0$, tehát $D_{f_6} = [-1,1] \setminus \{0\}$. Legyen $\alpha = \arcsin x$, ekkor

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Ebből adódik, hogy

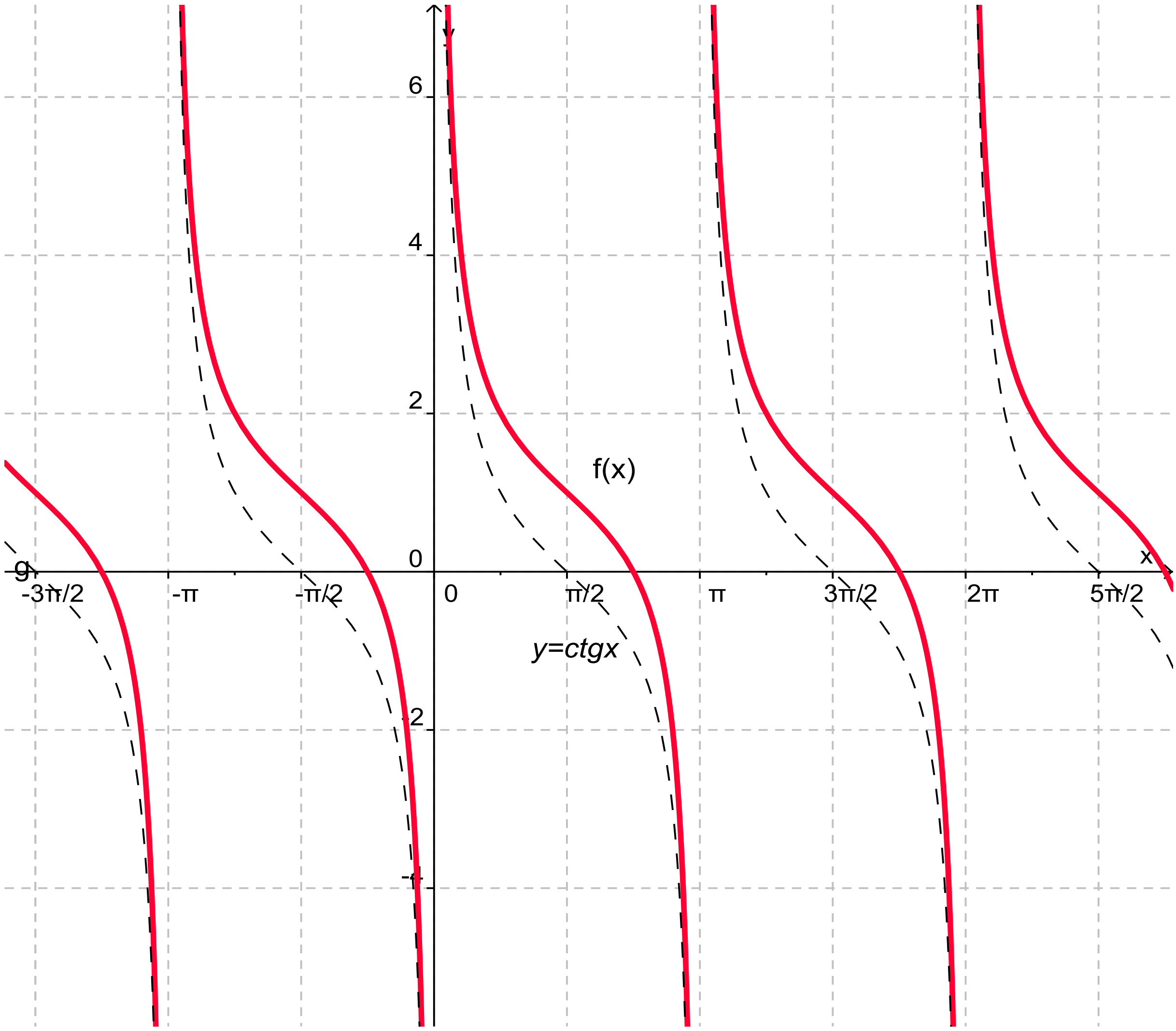
$$f_6(x) = x \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sqrt{1-x^2}.$$

A függvény grafikonja:



(g) $f_7(x) = \sqrt{1-x^2}$, $D_{f_7} = [-1,1] \setminus \{0\}$. A függvény grafikonja megegyezik f_6 grafikonjával.

4.8.7. Az $f(x) = \operatorname{ctg} x + 1$ függvény grafikonja:



f egy bijektív leszűkítése:

$$f|_{(0,\pi)} : (0,\pi) \to \mathbb{R}, \quad f|_{(0,\pi)}(x) = 1 + \operatorname{ctg} x.$$

A leszűkített függvény inverze:

$$x = \operatorname{ctg} y + 1,$$

azaz

$$x - 1 = \operatorname{ctg} y,$$

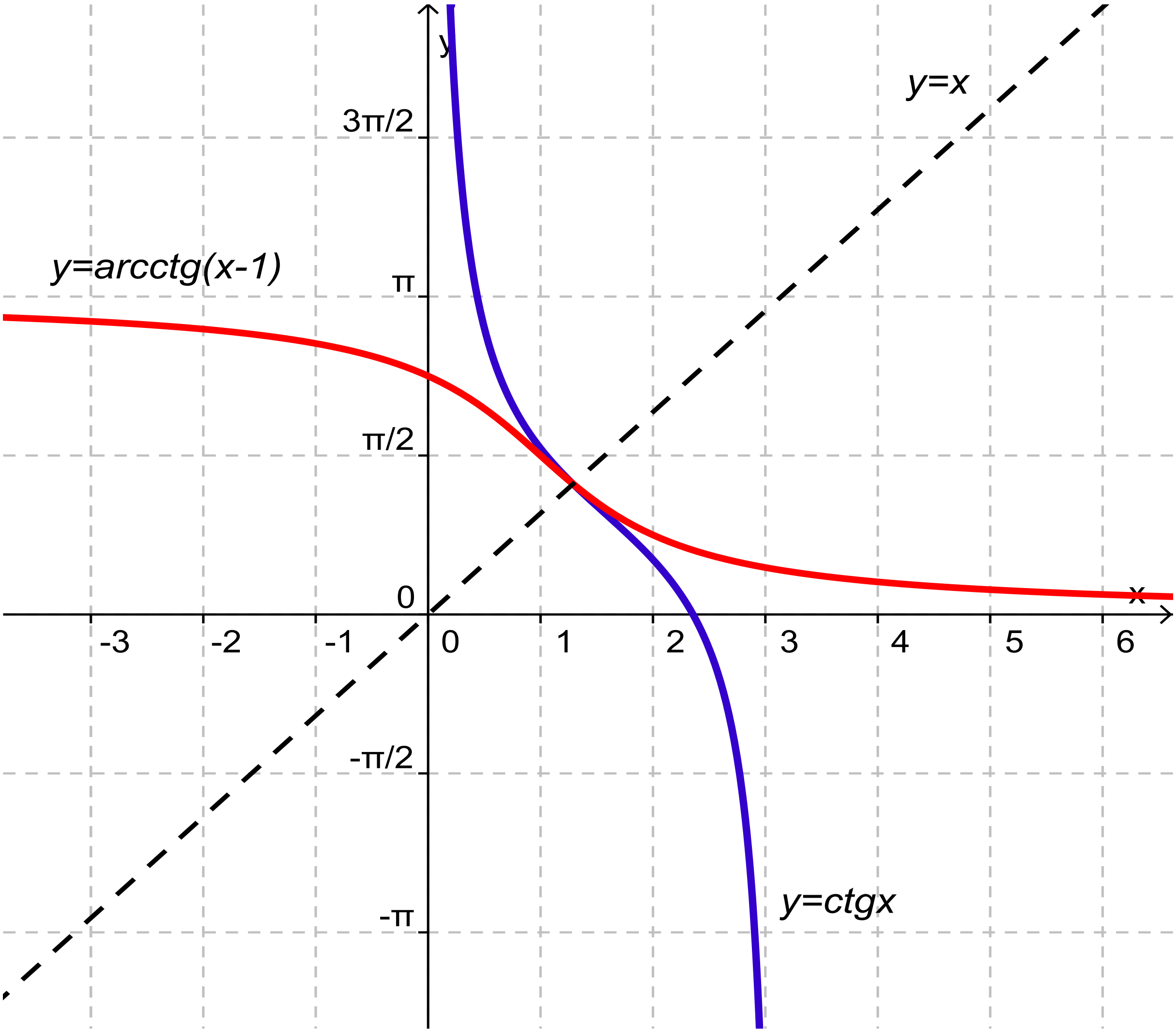
így

$$y = \operatorname{arcctg}(x-1).$$

Azaz:

$$\left(f|_{(0,\pi)}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to (0,\pi), \quad \left(f|_{(0,\pi)}\right)^{-1}(x) = \operatorname{arcctg}(x-1).$$

Az inverz függvény grafikonja:



4.8.8. Az $x_0 = 0$ helyen elsőfajú, nem megszüntethető szakadása van a függvénynek, mert

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0} f(x) = \pi \neq -\frac{\pi}{4}.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2x-1} = 0$, így

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

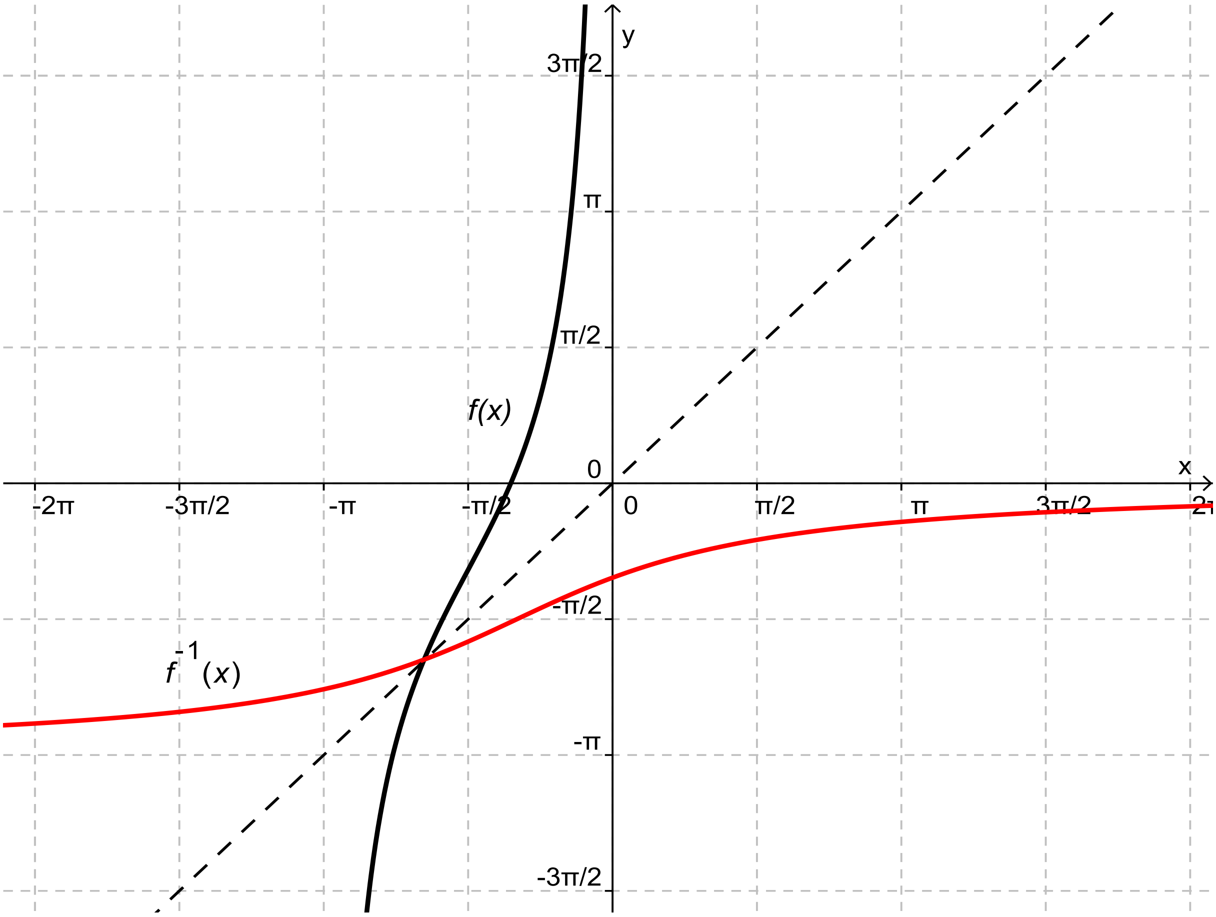
A $(-\infty, 0]$ intervallumon létezik f^{-1}, mert ezen az intervallumon bijektív az f függvény. Vezessük be az alábbi jelölést a $(-\infty, 0]$ intervallumra leszűkített függvényre!

$$\widetilde{f} : (-\infty, 0] \to \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right), \qquad \widetilde{f}(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{2x-1}.$$

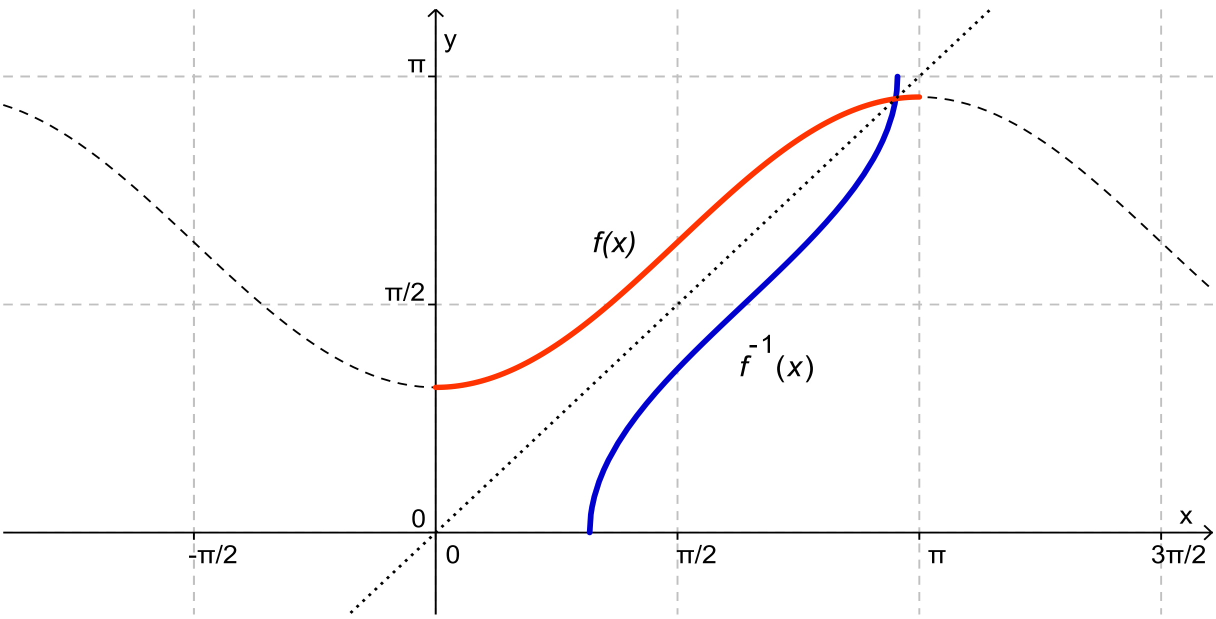
A leszűkített függvény inverze:

$$\left(\widetilde{f}\right)^{-1} : \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right) \to (-\infty, 0], \qquad \left(\widetilde{f}\right)^{-1}(x) = \frac{1+\operatorname{ctg} x}{2}.$$

4.8.9. $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi, 0),\ f^{-1}(x) = -\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{2}.$



4.8.10. $f^{-1} : [1, 3] \to [0, \pi],\ f^{-1}(x) = \dfrac{\pi}{2} + \arcsin(x - 2).$



4.8.11.

(a) $-1 \le x \le 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \dfrac{\pi}{2}$. A tg függvény szigorúan monoton növekvő a $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, így az egyenlet átírható az

$$x = \operatorname{tg}(\arcsin x)$$

ekvivalens alakba ($x \ne \pm 1$). Legyen $\alpha = \arcsin x$. Ekkor

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sin(\arcsin x)}{\pm\sqrt{1-\sin^2\arcsin x}},$$

azaz $\sin(\arcsin x) = x$ miatt a megoldandó egyenlet:

$$x = \pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

vagyis

$$x \cdot \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0,$$

tehát

$$x = 0.$$

(b) Nyilvánvaló, hogy $-1 \le x \le 1$. Rendezzük át a megoldandó egyenletet!

$$\arcsin x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{x}{2}.$$

A sin függvény szigorúan monoton növekvő a $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, így az egyenlet átírható az

$$x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{x}{2}\right)$$

ekvivalens alakba, azaz

$$x = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right),$$

vagyis

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{x}{2},$$

átrendezve:

$$4x = \sqrt{2}\left(\sqrt{4-x^2} + x\right),$$

ill.

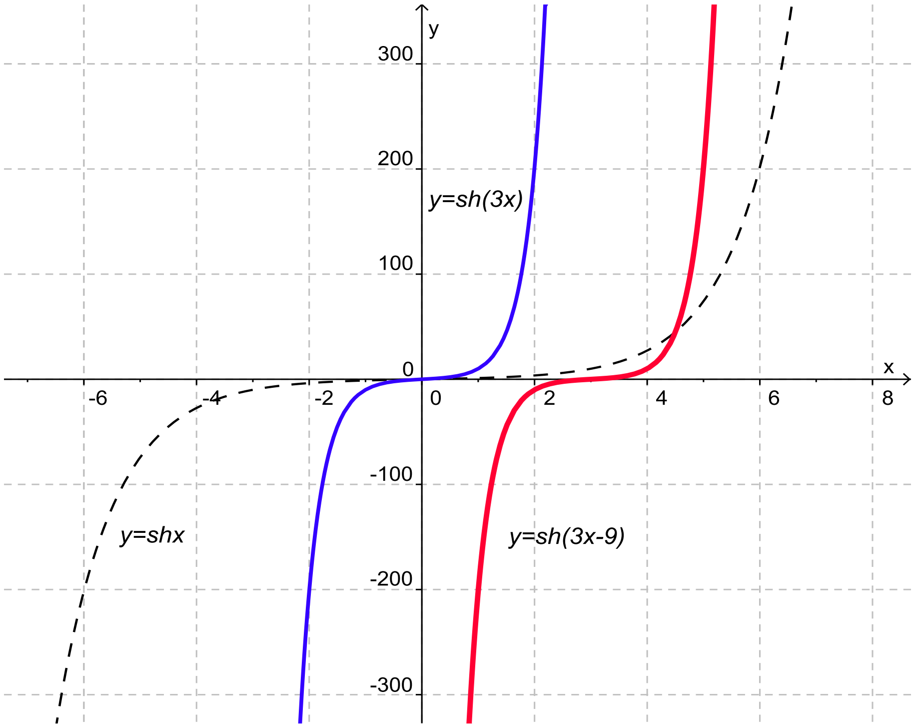
$$\left(2\sqrt{2} - 1\right) \cdot x = \sqrt{4-x^2},$$

amiből adódik, hogy $x \ge 0$. Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd átrendezve és gyököt vonva kapjuk, hogy

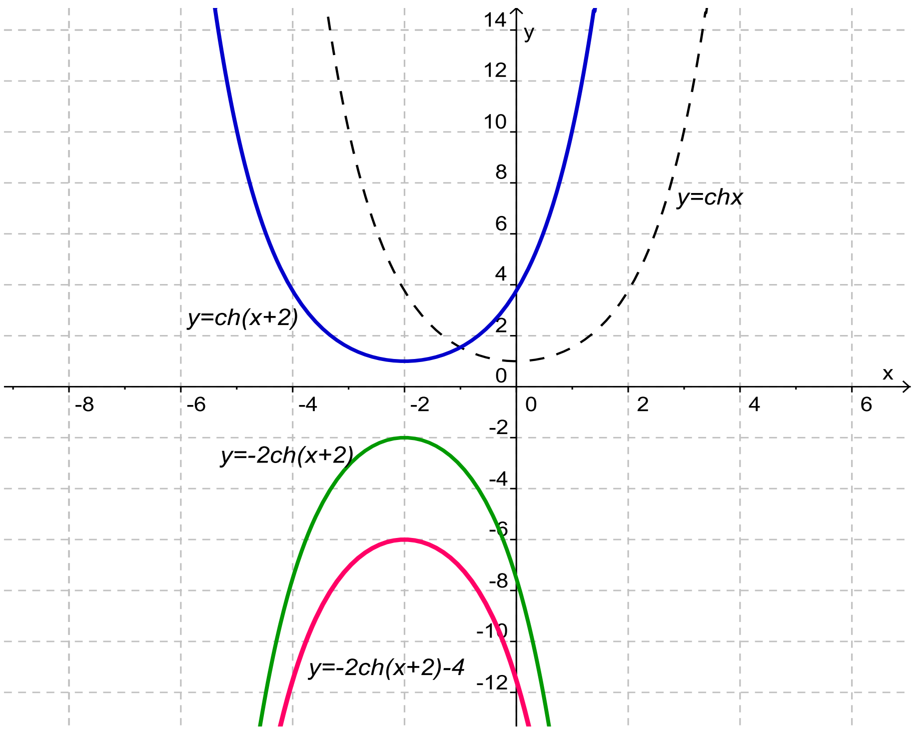
$$x = \sqrt{\frac{2}{5-2\sqrt{2}}}.$$

4.9.1.

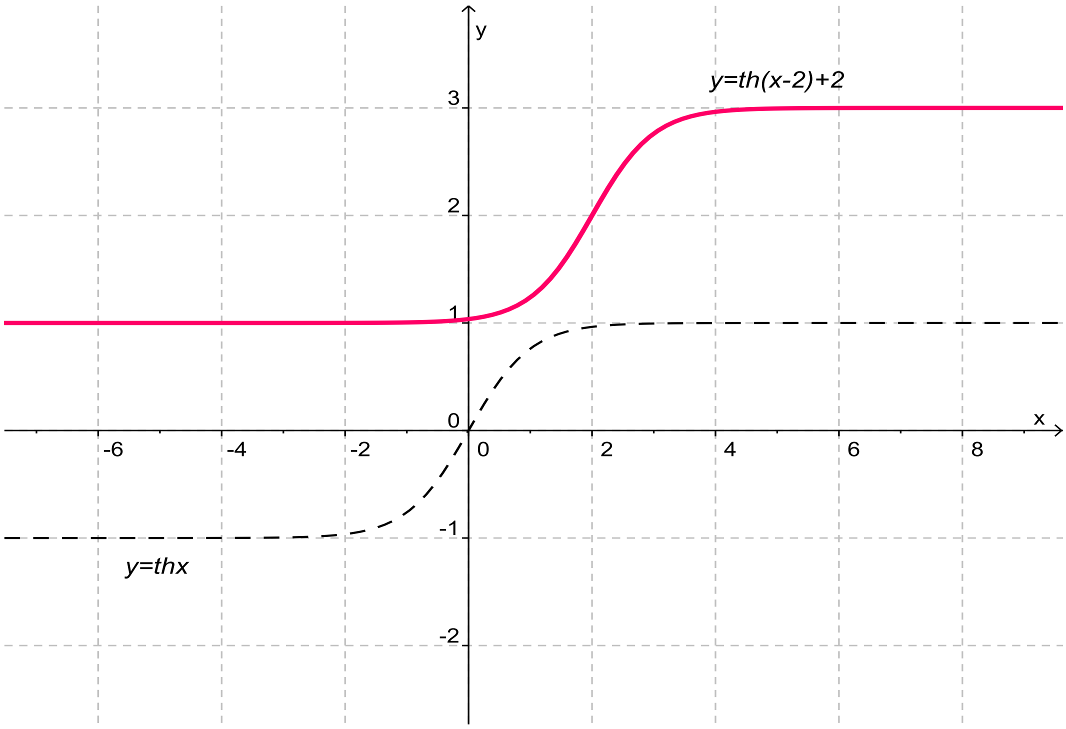
(a) A függvény grafikonja:



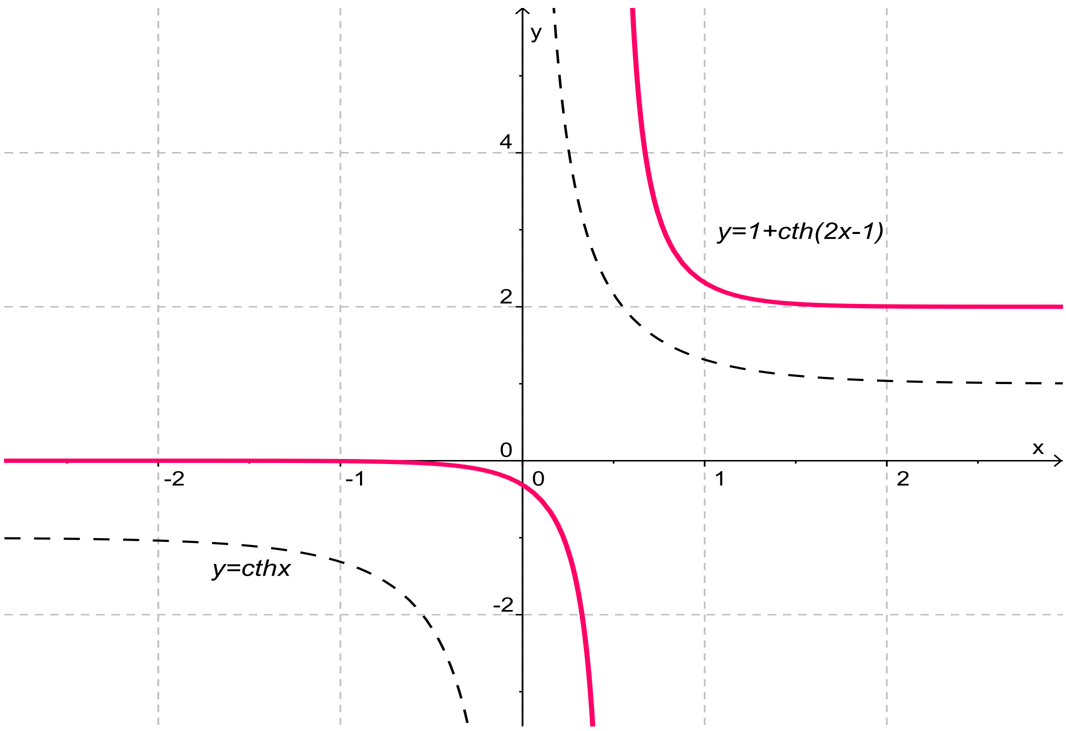
(b) A függvény grafikonja:



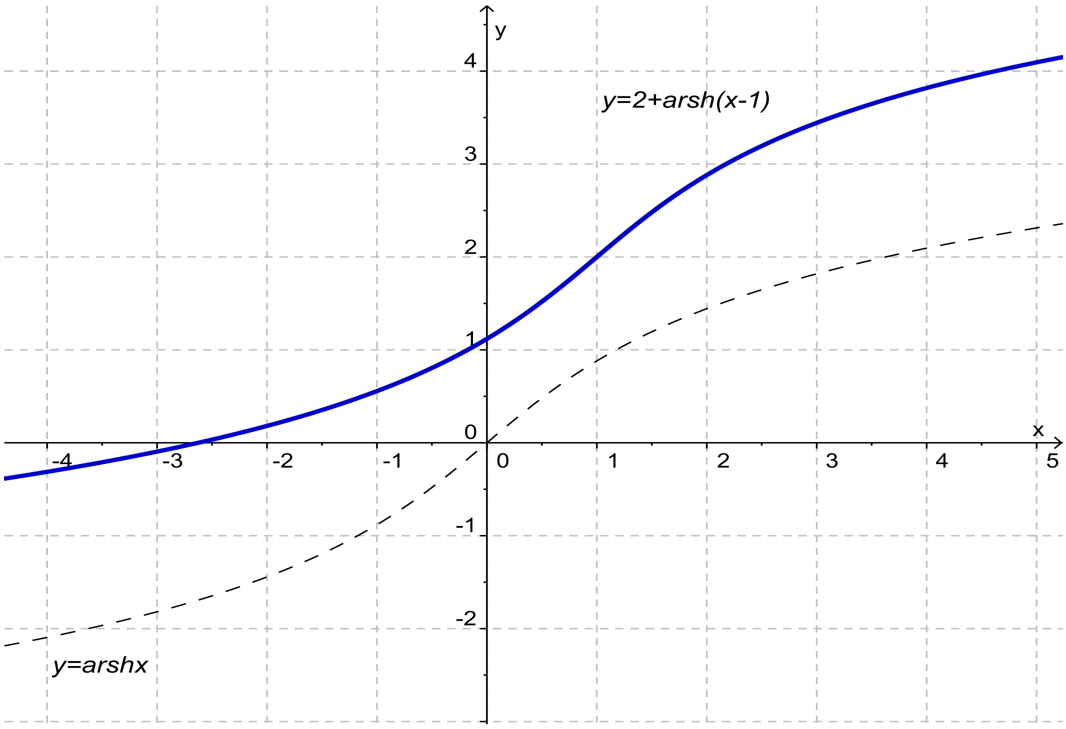
(c) A függvény grafikonja:



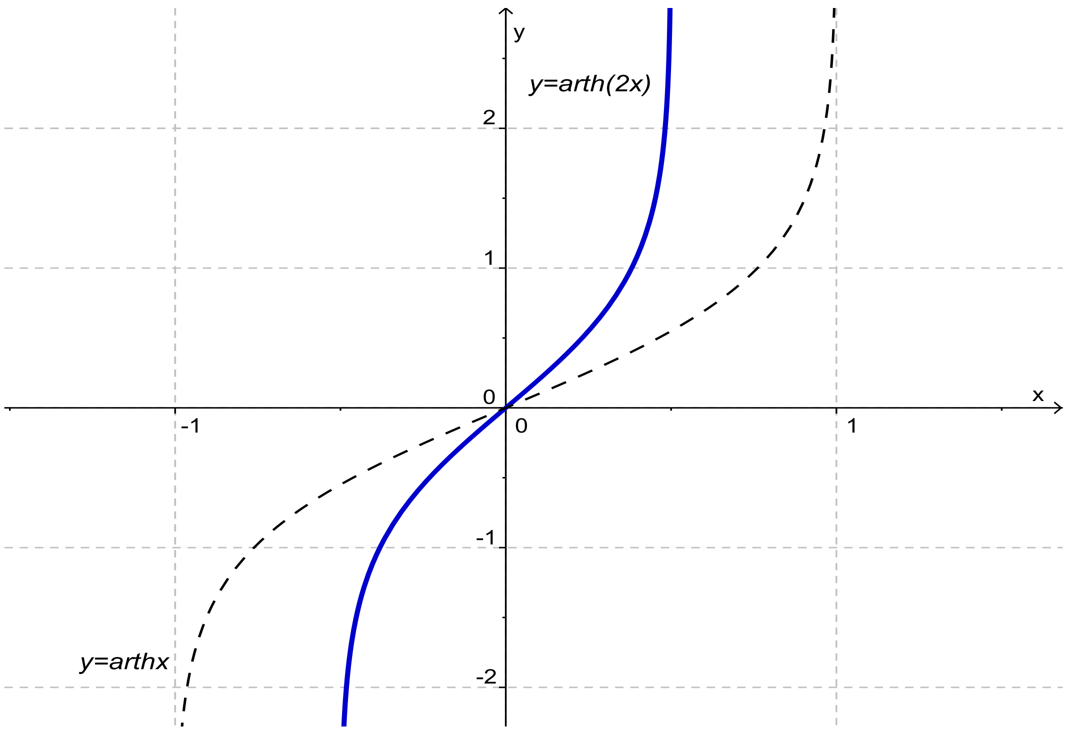
(d) A függvény grafikonja:



(e) A függvény grafikonja:



(f) A függvény grafikonja:



4.9.2. Felhasználjuk, hogy

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(a) Mivel $\operatorname{sh} 2x = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$ és

$$2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2},$$

így minden $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az egyenlőség.

(b) Mivel $\operatorname{ch} 2x = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$ és

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2},$$

így minden $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az egyenlőség.

(c) $\operatorname{sh}(x+y) = \dfrac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$ és

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2},$$

így minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az egyenlőség.

(d) $\operatorname{sh}(x-y) = \dfrac{e^{x-y} - e^{-(x-y)}}{2}$ és

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{x-y} - e^{-(x-y)}}{2},$$

így minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az egyenlőség.

(e) $\operatorname{ch}(x+y) = \dfrac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2}$ és

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2},$$

így minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az egyenlőség.

(f) $\operatorname{ch}(x-y) = \dfrac{e^{x-y} + e^{-(x-y)}}{2}$ és

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{x-y} + e^{-(x-y)}}{2},$$

így minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az egyenlőség.

(g) Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{2e^{x-x} + 2e^{x-x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

(h) Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x.$$

4.9.3.

(a) $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, így $f_1(x) = \operatorname{arsh} 2x = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$.

(b) $f_2(x) = 2\operatorname{arsh} x = 2\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^2 = \ln\left(2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2+1}\right)$.

(c) $f_3(x) = \operatorname{arsh}(x+2) = \ln\left(x + 2 + \sqrt{(x+2)^2+1}\right) = \ln\left(x + 2 + \sqrt{x^2+4x+5}\right)$.

(d) $f_4(x) = 2 + \operatorname{arsh} x = 2 + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln e^2 + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln\left(e^2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)$.

(e) $f_5(x) = 2\operatorname{arch} x = 2\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \ln\left(2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2-1}\right)$, ha $x \ge 1$.

(f) $f_6(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \ln\dfrac{1-2x}{1+2x}$, ha $|2x| < 1$.

4.9.4.

(a) $f_1(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f_2(x) = x$, $x \ge 1$.

(c) $f_3(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

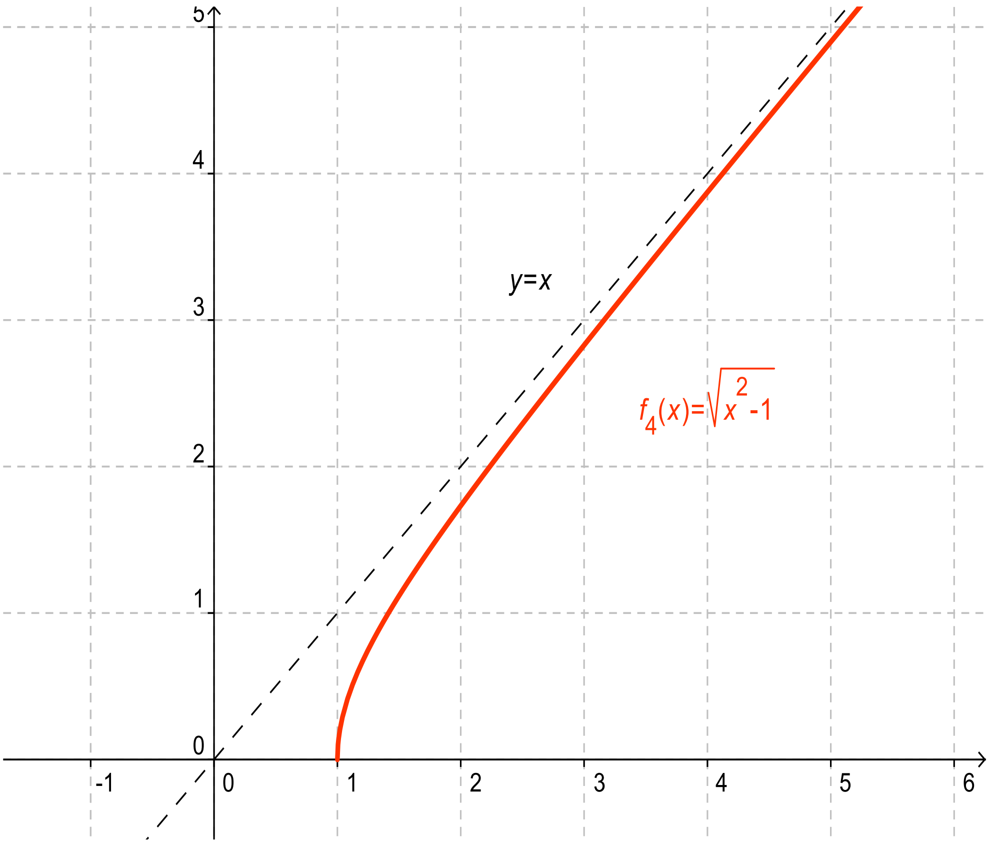
(d) $f_4(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{arch} x) = \operatorname{sh}\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right) = \dfrac{e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} - e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}}{2}$, azaz

$$f_4(x) = \frac{x + \sqrt{x^2-1} - \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}}{2} = \frac{x^2 - 1 + x\sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}},$$

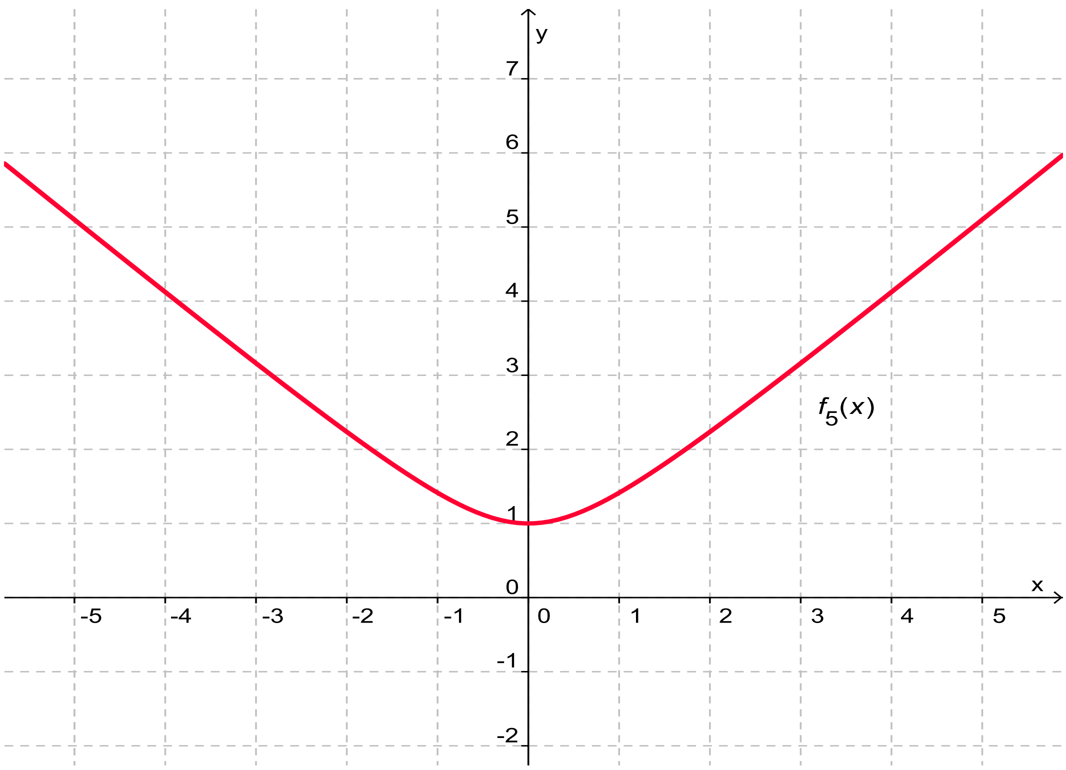
vagyis

$$f_4(x) = \sqrt{x^2-1},$$

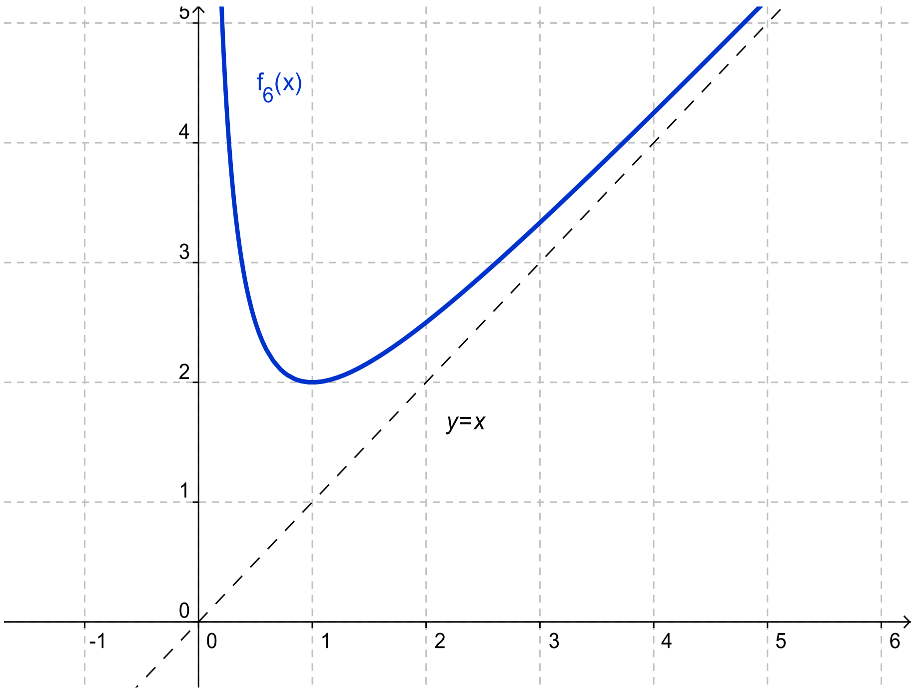
ha $x \ge 1$. A függvény grafikonja:



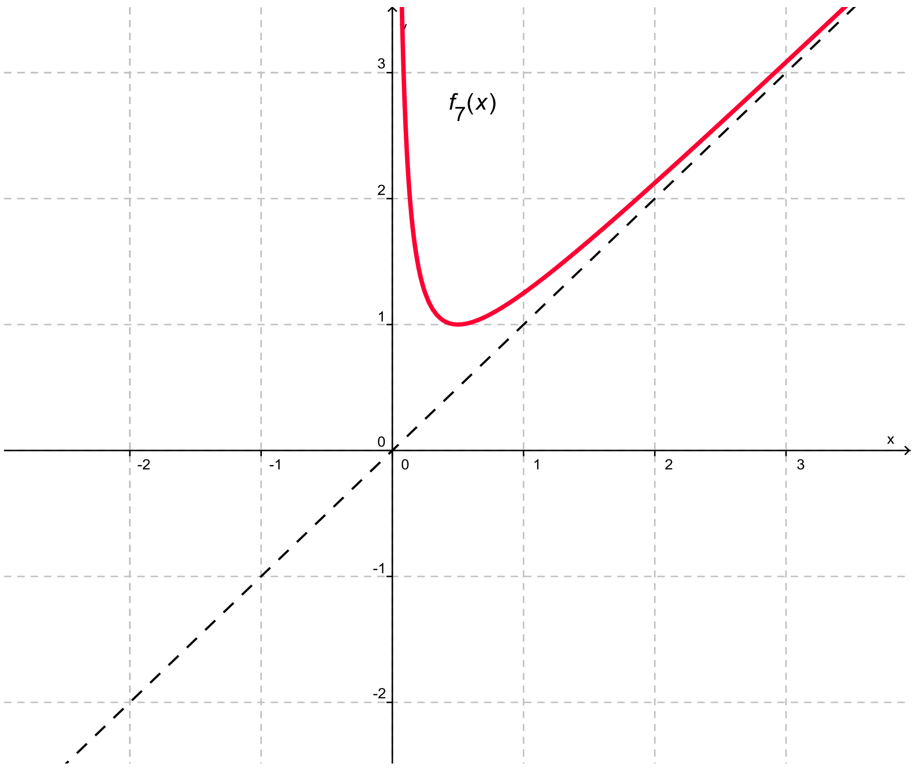
(e) $f_5(x) = \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. A függvény grafikonja:



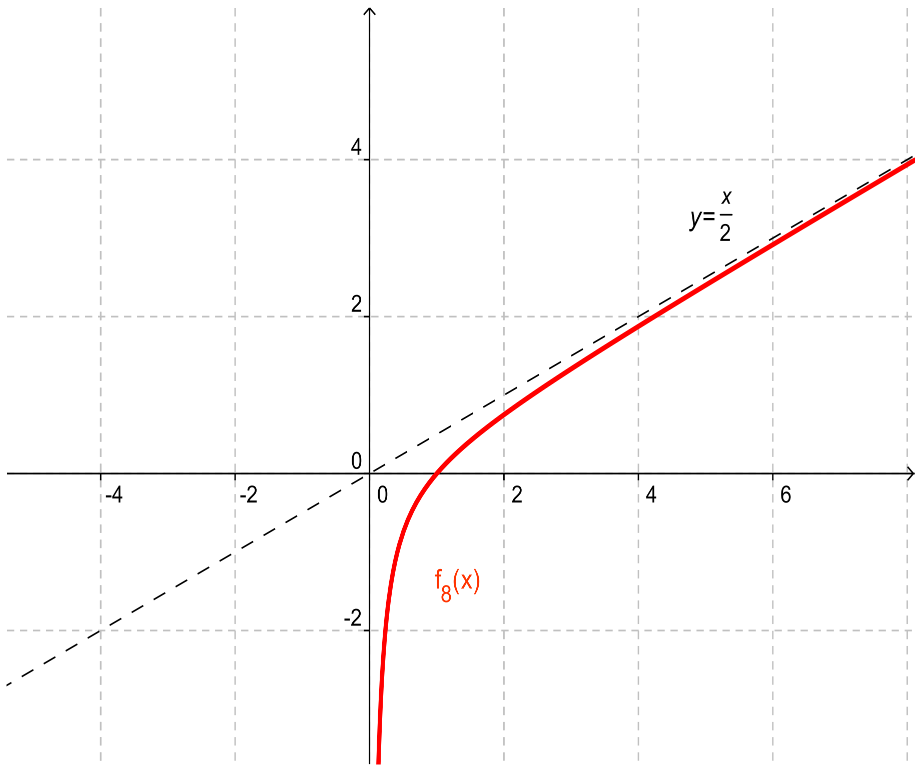
(f) $f_6(x) = 2 \cdot \dfrac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{2} = x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2+1}{x}$, $x > 0$. A függvény grafikonja:



(g) $f_7(x) = \dfrac{e^{\ln 2x} + e^{-\ln 2x}}{2} = x + \dfrac{1}{4x}$, $x > 0$. A függvény grafikonja:



(h) $f_8(x) = \dfrac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2} = \dfrac{x - \dfrac{1}{x}}{2} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{2x}$, $x > 0$. A függvény grafikonja:



4.9.5.

(a) $\ln \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4} = \ln 1 = 0$, $\operatorname{arch} 1 = 0$, $\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$ és $\arccos(-1) = \pi$, így

$$\left(\ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{arch} 1\right) \cdot \left(\arccos\left(\cos \frac{5\pi}{2}\right)\right) - \operatorname{arcctg} \sqrt{3} \cdot \arccos(-1) = -\frac{\pi^2}{6}.$$

(b) $\operatorname{sh}(\ln 2) = \dfrac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \dfrac{2 - \dfrac{1}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$, továbbá $\ln 10 \cdot \lg e = \ln 10 \cdot \dfrac{\ln e}{\ln 10} = \ln e = 1$ és

$$\operatorname{arctg}\left(2 + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{arctg}\left(2 + (-1)\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Tehát

$$\operatorname{sh}(\ln 2) + \ln 10 \cdot \lg e + \operatorname{arctg}\left(2 + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3}{4} + 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{7+\pi}{4}.$$

(c) Legyen $x = \operatorname{arsh} \dfrac{4}{3}$. Ekkor

$$\operatorname{sh} x = \frac{4}{3}$$

és
$$\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}.$$
Ismert, hogy
$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$
így
$$\operatorname{ch}\left(2 \operatorname{arsh} \frac{4}{3}\right) = \frac{25}{9} + \frac{16}{9} = \frac{41}{9}.$$

(d) $\operatorname{ch}(\ln 2) = \dfrac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \dfrac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$, $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$, $\operatorname{arch} 1 = 0$ és $\operatorname{arcctg} 0 = \dfrac{\pi}{2}$, így
$$\operatorname{ch}(\ln 2) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arch} 1 + \operatorname{arcctg} 0 = \frac{5}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{15 + 8\pi}{12}.$$

(e) Legyen $x = \operatorname{arch} \dfrac{5}{3}$. Ekkor $\operatorname{ch} x = \dfrac{5}{3}$ és $\operatorname{sh} x = \dfrac{4}{3}$, mert
$$\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}.$$
Ismert, hogy $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$, így
$$\operatorname{sh}\left(2 \operatorname{arch} \frac{5}{3}\right) = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{9}.$$

(f) Legyen $x = \operatorname{arth} \dfrac{1}{7}$ és $y = \operatorname{arcth} 13$. Ekkor $x > 0$, $\operatorname{th} x = \dfrac{1}{7}$ és
$$\operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{49},$$
vagyis
$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{48} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{\sqrt{3}}{12} \quad (x > 0, \quad \operatorname{sh} x > 0),$$
továbbá
$$\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x = 1 + \frac{1}{48} = \frac{49}{48} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{7}{\sqrt{48}} = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$
Ha $y = \operatorname{arcth} 13$, akkor $\operatorname{cth} y = 13$, továbbá
$$\operatorname{cth}^2 y = \frac{\operatorname{ch}^2 y}{\operatorname{sh}^2 y} = 169,$$
ahonnan adódik, hogy
$$\operatorname{sh} y = \frac{1}{\sqrt{168}} = \frac{\sqrt{42}}{84} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{ch} y = \frac{13}{\sqrt{168}} = \frac{13\sqrt{42}}{84}.$$
Felhasználjuk, hogy $\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$, ennek megfelelően
$$\operatorname{sh}\left(\operatorname{arth} \frac{1}{7} + \operatorname{arcth} 13\right) = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{13\sqrt{42}}{84} + \frac{\sqrt{42}}{84} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{12} = \frac{15\sqrt{14}}{252}.$$

(g) Legyen $x = \operatorname{arth}\frac{1}{8}$. Ekkor $x > 0$ és $\operatorname{th} x = \frac{1}{8}$, továbbá

$$\operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{64},$$

vagyis

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{63} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{\sqrt{7}}{21} \quad (x > 0, \quad \operatorname{sh} x > 0),$$

továbbá

$$\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x = 1 + \frac{1}{63} = \frac{64}{63} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{8}{\sqrt{63}} = \frac{8\sqrt{7}}{21}.$$

Legyen $y = \operatorname{arsh}\frac{1}{3}$. Ekkor $y > 0$ és $\operatorname{sh} y = \frac{1}{3}$, továbbá

$$\operatorname{ch}^2 y = 1 + \operatorname{sh}^2 y = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9},$$

ahonnan adódik, hogy

$$\operatorname{ch} y = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Felhasználjuk, hogy $\operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, ennek megfelelően

$$\operatorname{ch}\left(\operatorname{arth}\frac{1}{8} - \operatorname{arsh}\frac{1}{3}\right) = \frac{8\sqrt{7}}{21} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{\sqrt{7}}{21} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8\sqrt{70} - \sqrt{7}}{63}.$$

4.9.6.

(a) $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, így $\operatorname{sh} 2 = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2} = \dfrac{e^4 - 1}{2e^2}$.

(b) $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, tehát $\operatorname{ch} 3 = \dfrac{e^3 + e^{-3}}{2} = \dfrac{e^6 + 1}{2e^3}$.

(c) $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, vagyis $\operatorname{th} 1 = \dfrac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}} = \dfrac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$.

(d) $\operatorname{cth} 1 = \dfrac{1}{\operatorname{th} 1} = \dfrac{e^2 + 1}{e^2 - 1}$.

(e) $\operatorname{sh}(\ln 5) = \dfrac{e^{\ln 5} - e^{-\ln 5}}{2} = \dfrac{5 - \frac{1}{5}}{2} = \dfrac{12}{5}$.

(f) $\operatorname{ch}(\ln 5) = \dfrac{e^{\ln 5} + e^{-\ln 5}}{2} = \dfrac{5 + \frac{1}{5}}{2} = \dfrac{13}{5}$.

(g) $\operatorname{th}(\ln 3) = \dfrac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}} = \dfrac{3 - \frac{1}{3}}{3 + \frac{1}{3}} = \dfrac{4}{5}$.

(h) $\operatorname{cth} e = \dfrac{e^e + e^{-e}}{e^e - e^{-e}} = \dfrac{e^{2e} + 1}{e^{2e} - 1}$.

(i) $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, így $\operatorname{arsh} 2 = \ln(2 + \sqrt{5})$.

(j) $\operatorname{arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$, emiatt $\operatorname{arch} 1 = \ln 1 = 0$.

(k) $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, így $\operatorname{arsh} e^2 = \ln(e^2 + \sqrt{e^4 + 1})$.

(l) $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, így

$$\operatorname{arsh} \frac{1}{e} = \ln\left(\frac{1}{e} + \sqrt{1 + \frac{1}{e^2}}\right) = \ln\left[\frac{1}{e}\left(1 + \sqrt{e^2 + 1}\right)\right] = \ln(1 + \sqrt{e^2 + 1}) - 1.$$

(m) $\operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$, ha $|x| < 1$, azaz

$$\operatorname{arth} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\ln 3}{2}.$$

(n) $\operatorname{arcth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x + 1}{x - 1}$, ha $|x| > 1$, azaz $\operatorname{arcth} 2 = \dfrac{\ln 3}{2}$.

(o) $\operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$, ha $|x| < 1$, azaz

$$\operatorname{arth} \frac{1}{e} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{2} \ln \frac{e + 1}{e - 1}.$$

(p) $\operatorname{arcth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x + 1}{x - 1}$, ha $|x| > 1$, azaz

$$\operatorname{arcth} \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{e^2 + 1}{e^2 - 1} + 1}{\frac{e^2 + 1}{e^2 - 1} - 1} = \frac{1}{2} \ln e^2 = 1.$$

4.9.7. $\operatorname{arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$ és $\operatorname{arcth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$, ha $|x| > 1$. Így

$$3\operatorname{arch}\frac{5}{4} - 2\operatorname{arcth}\frac{9}{7} = 3\cdot\ln\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{25}{16}-1}\right) - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{\frac{9}{7}+1}{\frac{9}{7}-1} = 3\ln\frac{8}{4} - \ln\frac{16}{2} = \ln 8 - \ln 8 = 0.$$

4.9.8. $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ és $\operatorname{arcth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$, ha $|x| > 1$. Így

$$\operatorname{arsh}\frac{3}{4} - 2\operatorname{arcth} 3 = \ln\left(\frac{3}{4}+\sqrt{1+\frac{9}{16}}\right) - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{3+1}{3-1} = \ln\frac{8}{4} - \ln\frac{4}{2} = \ln 2 - \ln 2 = 0,$$

azaz

$$\operatorname{arsh}\frac{3}{4} = 2\operatorname{arcth} 3.$$

4.9.9.

(a) $x = 0$ az egyetlen megoldás, mert az $f(x) = \operatorname{arsh} x$ és $g(x) = \operatorname{arth} x$ függvények grafikonjainak az origó az egyetlen közös pontja. Ez számítással is igazolható. Az eredeti egyenlettel ekvivalens az

$$x = \operatorname{sh}\operatorname{arth} x$$

egyenlet, vagyis

$$x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

ahonnan vagy $x = 0$, vagy $1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Az utóbbi egyenletnek is az $x = 0$ az egyetlen gyöke.

(b) Nincs olyan valós szám, amely megoldása lenne az egyenletnek, mert az $f(x) = \operatorname{arsh} x$ és $g(x) = \operatorname{arch} x$ függvények grafikonjainak nincs közös pontja.

(c) Vegyük mindkét oldal th-át, így az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenlethez jutunk:

$$\frac{(x+2)-(x+1)}{1-(x+2)(x+1)} = -\frac{1}{5},$$

ahonnan az

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai:

$$x_1 = 1 \qquad \text{és} \qquad x_2 = -4.$$

(d) Az eredeti egyenlettel ekvivalens az

$$x = \operatorname{sh}\left(2\operatorname{arch} x\right), \qquad (x \geq 1)$$

egyenlet, vagyis

$$x = 2 \cdot \operatorname{sh} \operatorname{arch} x \cdot \operatorname{ch} \operatorname{arch} x,$$

azaz

$$x = 2\sqrt{x^2-1} \cdot x.$$

Az $x \geq 1$ feltétel miatt a megoldandó egyenlet:

$$1 = 2 \cdot \sqrt{x^2-1}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve adódik, hogy

$$1 = 4 \cdot (x^2-1),$$

azaz

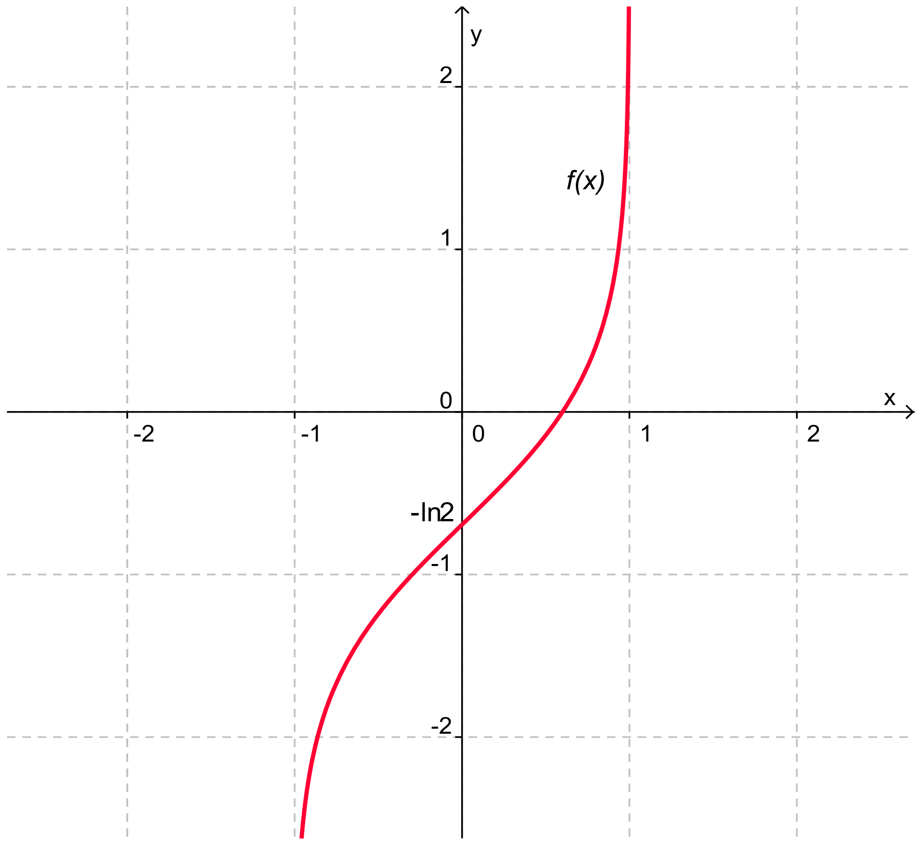
$$4x^2 = 5,$$

tehát az $x \geq 1$ feltétel miatt $x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ az egyetlen olyan valós szám, amely megoldása az eredeti egyenletnek.

4.9.10. $\operatorname{arth} \alpha = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$, ha $|\alpha| < 1$. Tehát

$$f(x) = \operatorname{arth} \frac{5x-3}{5-3x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\dfrac{5x-3}{5-3x}}{1-\dfrac{5x-3}{5-3x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{2+2x}{8-8x} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1+x}{1-x} \right) = \operatorname{arth} x - \ln 2.$$

A függvény grafikonja:



5 Differenciálszámítás

5.1 Egyváltozós valós függvények deriválása

5.1.1. Határozza meg az $f(x) = 2x - 7$ függvény deriváltját a definíció segítségével!

5.1.2. Határozza meg az $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ függvény deriváltját a definíció segítségével!

5.1.3. Határozza meg az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény derivált függvényét a definíció segítségével!

5.1.4. Differenciálható-e az $f(x) = x \cdot |x|$ függvény az $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ és az $x_2 = 1$ helyeken? Ha igen, akkor adja meg a differenciálhányadosokat!

5.1.5. Differenciálható-e az $f(x) = |x + 1| - |x - 3|$ függvény az $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ és az $x_2 = 3$ helyeken?

5.1.6. Hol nem differenciálható az $f(x) = |x^2 - 1|$, $x \in \mathbb{R}$ függvény? Adja meg a deriváltfüggvényt!

5.1.7. Differenciálhatók-e az $f(x) = |x| \cdot \sin |x|$ és a $g(x) = |x| \cdot \cos |x|$ függvények az $x_0 = 0$ helyen? Ha igen, akkor mennyi itt a differenciálhányados?

5.1.8. Legyen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy a függvény az $x_0 = 0$ pontban differenciálható!

5.1.9. Differeniálható-e az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

függvény az $x_0 = 0$ helyen? Válaszát indokolja!

5.1.10. Mutassa meg, hogy az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \le 1 \\ (x-2)^2, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény nem differenciálható az $x_0 = 1$ helyen!

5.1.11. Adja meg az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{ha } x \le 2 \\ 4x - 5, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

deriváltfüggvényét!

5.1.12. Adja meg az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\begin{cases} -x-1, & \text{ha } x\le -1\\ x^3, & \text{ha } -1<x\le 1\\ 3x-2, & \text{ha } x>1\end{cases}$$

deriváltfüggvényét!

5.1.13. Adja meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x^3|$ deriváltfüggvényét!

5.1.14. Igazolja, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|(x^2+1)$ függvény nem differenciálható az $x_0=0$ helyen!

5.1.15. Igazolja, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x|x+1|+|x+1|$ függvény minden valós helyen differenciálható!

5.1.16. Határozza meg az m és b paraméterek értékét úgy, hogy az

$$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{ha } x\ge 1\\ mx+b, & \text{ha } x<1.\end{cases}$$

függvény mindenütt differenciálható legyen!

5.1.17. Határozza meg az m és b paraméterek értékét úgy, hogy az

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{ha } x\ge -1\\ mx+b, & \text{ha } x<-1.\end{cases}$$

függvény mindenütt differenciálható legyen!

5.1.18. Adjon példát olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre, amely mindenhol értelmezve van és mindenhol folytonos, de az $x_0=1$ pontban nem differenciálható!

5.1.19. Adjon példát olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre, amely mindenhol értelmezve van és mindenütt differenciálható, de az $x_0=1$ pontban nem folytonos!

5.1.20. Adjon példát olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre, amely mindenhol értelmezve van és mindenhol differenciálható, és a deriváltja mindenhol folytonos!

5.1.21. Adjon példát olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre, amely mindenhol értelmezve van és mindenhol differenciálható, de a deriváltja az $x_0=0$ helyen nem differenciálható!

5.1.22. Az alábbi f függvényeknél adja meg f'-t!

(a) $f(x)=x^2-2x+5$;

(b) $f(x)=7-x-x^4$;

(c) $f(x)=\sqrt{2x}+\sqrt[5]{x}+\dfrac{1}{x}$;

(d) $f(x)=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x^2}$;

(e) $f(x)=\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$;

(f) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}+\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$.

5.1.23. Az alábbi f függvényeknél adja meg f'-t! Alkalmazza a differenciálható függvények szorzatára vonatkozó deriválási szabályt!

(a) $f(x) = (x+2)\sqrt{x}$; (b) $f(x) = x \sin x$;

(c) $f(x) = (x^3+1)\cos x$; (d) $f(x) = 2^x(x-1)$;

(e) $f(x) = 3x^5 \log_4 x$; (f) $f(x) = \sin x \cos x$.

5.1.24. Az alábbi f függvényeknél adja meg f'-t! Alkalmazza a differenciálható függvények hányadosára vonatkozó deriválási szabályt!

(a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$; (b) $f(x) = \dfrac{x^3+4}{1+2x}$;

(c) $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x - 1}$; (d) $f(x) = \mathrm{tg} x$;

(e) $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$; (f) $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x \sin x}$.

5.1.25. Az alábbi f függvényeknél adja meg f'-t! Alkalmazza a differenciálható függvények kompozíciójára vonatkozó deriválási szabályt (láncszabályt)!

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(3x^2+5)^4}$; (b) $f(x) = \sqrt{2x+7}$;

(c) $f(x) = \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^3$; (d) $f(x) = \sqrt{4-\sqrt{4+x}}$;

(e) $f(x) = \sqrt[3]{(1+x^2)^4}$; (f) $f(x) = \cos^2(x^3+1)$.

5.1.26. Az alábbi f függvényeknél adja meg f'-t!

(a) $f(x) = \dfrac{2^x \cdot \sin\sqrt{x}}{\mathrm{ctg}^2 x}$; (b) $f(x) = (x^2+2)^5 - 3^{\sin x}$;

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot \mathrm{tg} x}{2^x}$; (d) $f(x) = 3^{x^2} + \cos(x^2-3x)$;

(e) $f(x) = 5^x \cdot \sin 3x + \mathrm{tg}(5x-2)$; (f) $f(x) = \ln \dfrac{3x}{\sqrt{6x^2-4}}$.

5.1.27. Az alábbi f függvényeknél adja meg f'-t!

(a) $f(x) = \dfrac{\sin 6x + \sqrt[7]{x}}{3^{-x}+5}$; (b) $f(x) = \cos^2(4x+1) \cdot \ln \dfrac{1}{x^6+2}$;

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt[6]{x} + \lg x}{\dfrac{1}{x^2} + \cos x}$; (d) $f(x) = \mathrm{tg} x^3 + \mathrm{ctg}^2(x^4+5)$;

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot \ln 2}{3^x+5} + \sqrt[3]{x} \cdot \sin 8x$; (f) $f(x) = \dfrac{\log_2(\cos 3x + 2^x)}{(x^3+e^2)^2}$;

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2^x(\pi + \mathrm{tg} x)}$; (h) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{\ln(1+x^2)}}{x^2 + \mathrm{tg} 2x}$.

5.1.28. Az alábbi f függvényeknél adja meg f'-t!

(a) $f(x) = \sin\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)$;

(b) $f(x) = \ln\ln\ln x$;

(c) $f(x) = \ln^3\frac{3x^5+6}{(x^2+5x)^2}$;

(d) $f(x) = \ln\left(x^4 + 3^{\sqrt{\sin x}}\right)$;

(e) $f(x) = \sin\sin\sin x$;

(f) $f(x) = \ln\frac{\sqrt{x+1}}{\sin x}$.

5.1.29. Az alábbi f függvényeknél adja meg f'-t!

(a) $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$;

(b) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$;

(c) $f(x) = \operatorname{th}(\ln(2x - \operatorname{ch}x))$;

(d) $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{th}x^2}$;

(e) $f(x) = \operatorname{arsh}(e^{x+3} - 4x\sqrt{x})$;

(f) $f(x) = \frac{2^{\cos x}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{sh}^3 x}}$;

(g) $f(x) = \log_2^2 \operatorname{cth}\sqrt{3-x^2}$;

(h) $f(x) = 4\arccos\frac{\sqrt{x}}{2} + \operatorname{arsh}\sqrt{4x - x^2}$.

5.2 Érintő és normális megadása

5.2.1. Határozza meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$ függvény grafikonjának az $x_0 = 2$ abszcisszájú pontjához húzott érintő és normális egyenletét!

5.2.2. Határozza meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 - 7x^2$ függvény $x_0 = 3$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőjének egyenletét!

5.2.3. Adja meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ függvény azon pontjait, amelyekhez tartozó érintők párhuzamosak az $y = 3x$ egyenessel!

5.2.4. Határozza meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$ függvény grafikonjának az $x_0 = 1$ helyhez tartozó normálisát!

5.2.5. Határozza meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5$ függvény azon pontjait, amelyekben az érintő párhuzamos az $y = 6x - 1$ egyenessel!

5.2.6. Adja meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ függvény azon pontjait, amelyekben az érintő merőleges a $3x + 9y = 4$ egyenesre!

5.2.7. Határozza meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 - 11x^2 - 15x + 63$ függvény grafikonjának azon pontjait, ahol az érintő párhuzamos az x-tengellyel!

5.2.8. Írja fel az $xy = 4$ hiperbola $x_1 = 1$ és $x_2 = -4$ abszcisszájú pontjaihoz tartozó érintők egyenletét!

5.2.9. Határozza meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény grafikonjának azon pontjait, amelyekhez húzott érintő átmegy a $Q(2, -12)$ ponton!

5.2.10. Van-e olyan pontja az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x^3$ függvény grafikonjának, amelyhez tartozó érintő párhuzamos az $y = x$ egyenletű egyenessel?

5.2.11. Határozza meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ függvény grafikonjának azon pontját, amelyben az érintő iránytangense $-\dfrac{3}{2}$!

5.2.12. Határozza meg az $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+1}$ függvény grafikonjának $P_0\left(2; \dfrac{1}{5}\right)$ pontjához tartozó érintőjét!

5.2.13. Adja meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ függvény normálisának egyenletét az $x_0 = 3$ helyen!

5.2.14. Határozza meg az $f : \left[-\dfrac{1}{3}; +\infty\right[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + 3x}$ függvény grafikonjának azon pontjait, ahol a normális párhuzamos a $4x + 3y = 1$ egyenessel!

5.2.15. Határozza meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$ függvény grafikonjának az $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ pontjához tartozó érintőjét!

5.2.16. Határozza meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \cos x$ függvény grafikonjának az $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ pontjához tartozó normálisát!

5.2.17. Mutassa meg, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{3 + x^2}$$

egyenletű görbe egységnyi ordinátájú pontjaiba húzott érintők az origóban metszik egymást!

5.2.18. Melyik pontban érinti az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ függvény grafikonját a $9x - y = 26$ egyenletű egyenes?

5.2.19. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$ függvény $P_0(1, 0)$ pontján átmenő normálisa milyen más pontban metszi a függvény grafikonját?

5.2.20. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ függvény görbéjének az x-tengellyel alkotott metszéspontjaiba húzott érintőinek egyenleteit!

5.2.21. Mekkora területű az az egyenlőszárú háromszög, amelyet az

$$f(x) = 1 + \sqrt{1 - x}$$

függvény görbéjéhez húzott érintő a koordinátatengelyekkel bezár?

5.2.22. Bizonyítsa be, hogy az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ hiperbola tetszőleges pontjához húzott érintő állandó területű háromszögeket metsz ki a koordinátatengelyekből!

5.2.23. Határozzza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely az

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1, \qquad D_f = \mathbb{R}$$

függvény azon pontjait köti össze, amelyekhez húzott érintők párhuzamosak az x-tengellyel!

5.3 Logaritmikus differenciálás

5.3.1. Az alábbi f függvényeknél adja meg f'-t!

(a) $f(x) = x^x$ $(x > 0)$;

(b) $f(x) = \sin\left(x^{\cos x}\right)$ $(x > 0)$;

(c) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ $(\sin x > 0)$;

(d) $f(x) = x^{\operatorname{arch} x}$ $(x > 0)$;

(e) $f(x) = (\sqrt{x})^x$ $(x > 0)$;

(f) $f(x) = \sqrt[x]{x}$ $(x > 0)$;

(g) $f(x) = (\cos x)^{x^3}$ $(\cos x > 0)$.

5.3.2. Deriválja az $f(x) = \sqrt{x^2+4} \cdot \sin x \cdot 2^x$ függvényt!

5.3.3. Deriválja az $f(x) = (x+1) \cdot (x+2)^2 \cdot (x+3)^3$ függvényt!

5.3.4. Deriválja az $f(x) = (1-x) \cdot (1-x^2)^2 \cdot (1-x^3)^3$ függvényt!

5.3.5. Deriválja az $f(x) = (1+x) \cdot \sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{3+x^3}$ függvényt!

5.3.6. Adja meg az $f(x) = 2^x \cdot \operatorname{ch} x \cdot x^{\cos x}$ függvény deriváltját, ha $x > 0$!

5.3.7. Írja fel az $f(x) = x^{\ln x}$ függvény $P_0(x_0, y_0)$ pontjában az érintőegyenes egyenletét, ha $x_0 = e^2$!

5.4 Implicit függvények differenciálása

5.4.1. Határozza meg y'-t, ha $x^2 + y^2 = 1$ és $y = y(x)$!

5.4.2. Határozza meg y'-t, ha $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$ és $y = y(x)$!

5.4.3. Határozza meg y'-t, ha $xy + y^2 = 1$ és $y = y(x)$!

5.4.4. Határozza meg y'-t, ha $\cos y = x$ és $y = y(x)$!

5.4.5. Számítsa ki az implicit alakban adott $x^2y + 3xy^3 - x = 5$ függvény y' deriváltját, ha $y = y(x)$!

5.4.6. Határozza meg y'-t, ha $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 100$ és $y = y(x)$!

5.4.7. Adja meg y'-t, ha

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

és $y = y(x)$!

5.4.8. Határozza meg az $x^2 - xy + y^2 = 3$ görbe $P(1,2)$ pontjához tartozó érintő egyenletét!

5.4.9. Határozza meg az $9x^2 + 16y^2 = 52$ egyenletű ellipszis azon érintőit, amelyek párhuzamosak a $9x - 8y = 1$ egyenessel!

5.4.10. Határozza meg az $x^2 + 2xy - 3y^2 = 9$ görbe $P(3,2)$ pontjához tartozó érintő meredekségét!

5.5 Középértéktételek

5.5.1. Vizsgálja meg, hogy a következő függvények kielégítik-e a Cauchy-tétel feltételeit az adott intervallumban, és ha igen, számítsa ki a megfelelő ξ értéket!

(a) $f_1(x) = x^2 - 2x + 3;$ $\quad g_1(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5;$ $\quad [1;4],$

(b) $f_2(x) = e^x;$ $\quad g_2(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2};$ $\quad [-3;3],$

(c) $f_3(x) = \sin x;$ $\quad g_3(x) = \cos x;$ $\quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$

(d) $f_4(x) = x^2;$ $\quad g_4(x) = \sqrt{x};$ $\quad [1;4].$

5.5.2. Alkalmazható-e Rolle-tétele az $f(x) = x^2 - 2x - 3$ függvényre a $[-1;3]$ intervallumon? Ha igen, adja meg ξ-t!

5.5.3. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } -16 \le x \le 2, \\ -x^2 + 6x - 6, & \text{ha } \quad 2 < x \le 8. \end{cases}$$

(a) Mutassa meg, hogy létezik olyan ξ a $[-6, 6]$ intervallum belsejében, amelyben $f'(\xi) = 0$.

(b) Vizsgálja meg, hogy teljesülnek-e a Rolle-tétel feltételei!

5.5.4. Alkalmazható-e Rolle-tétele az $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1}$ függvényre a $[-2;3]$ intervallumon?

5.5.5. Vizsgálja meg, hogy a következő függvények kielégítik-e a Rolle-tétel feltételeit az adott intervallumban, és ha igen, számítsa ki a megfelelő ξ értéket!

(a) $f_1(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2},$ $\quad I_1 = [-1;1];$

(b) $f_2(x) = \ln \sin x,$ $\quad I_2 = \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right];$

(c) $f_3(x) = 1 - |x|,$ $\quad I_3 = [-1;1].$

5.5.6. Alkalmazható-e Rolle-tétele az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 1}, & \text{ha } x \ne 1 \text{ és } x \in [-2;3], \\ -6, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

függvényre a $[-2;3]$ intervallumon? Ha igen, adja meg ξ-t!

5.5.7. Alkalmazható-e Rolle-tétele az $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2 \cdot \sqrt[3]{x}$ függvényre a $[0;8]$ intervallumon?

5.5.8. Alkalmazható-e Rolle-tétele az

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & \text{ha } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

függvényre a $[0;2]$ intervallumon? Ha igen, adja meg ξ-t!

5.5.9. Adjon meg egy olyan $f(x)$ folytonos függvényt a $[0;1]$ intervallumon, amelyre $f(0) = f(1)$, de a Rolle-féle középértéktétel mégsem teljesül!

5.5.10. Írja fel a Lagrange-féle középértéktételt az

$$f(x) = 3x^2 - 5$$

függvényre a $[-2;0]$ intervallumon, és számítsa ki a tételben szereplő megfelelő belső pont koordinátáit!

5.5.11. Írja fel a Lagrange-féle középértéktételt az

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

függvényre a $[2;5]$ intervallumon, és számítsa ki a tételben szereplő megfelelő belső pont koordinátáit!

5.5.12. Írja fel a Lagrange-féle középértéktételt az

$$f(x) = \frac{x+3}{x-4}$$

függvényre a $[1;3]$ intervallumon, és számítsa ki a tételben szereplő belső pont koordinátáit!

5.5.13. Írja fel a Lagrange-féle középértéktételt az

$$f(x) = 4 - (x-1)^2$$

függvényre a $[0;4]$ intervallumon, és számítsa ki a tételben szereplő belső pont koordinátáit!

5.5.14. Írja fel a Lagrange-féle középértéktételt az

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

függvényre a $[0;5]$ intervallumon, és számítsa ki a tételben szereplő belső pont koordinátáit!

5.5.15. Vizsgálja meg, hogy a következő függvények kielégítik-e a Lagrange-tétel feltételeit az adott intervallumban, és ha igen, számítsa ki a megfelelő ξ értéket!

(a) $f_1(x) = \ln x$, $I_1 = [1;e]$;

(b) $f_2(x) = \mathrm{arctg} x$, $I_2 = [0;1]$;

(c) $f_3(x) = \arcsin x$, $I_3 = [0;1]$.

5.5.16. Adjon meg egy olyan függvényt, amely folytonos a $[-1;1]$ intervallumon, de amelyre a Lagrange-féle középértéktétel nem alkalmazható!

5.5.17. Igazolja a Lagrange-féle középértéktétel segítségével, hogy

$$\mathrm{tg} x > x,$$

ha $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$!

5.6 Magasabbrendű deriváltak

5.6.1. Adja meg az $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ függvény második deriváltját!

5.6.2. Adja meg az $f(x) = x \ln x$ $(x > 0)$ függvény ötödik deriváltját!

5.6.3. Határozza meg az $f(x) = \sin x$ függvény századik deriváltját!

5.6.4. Határozza meg az $f(x) = 3x^3 - 5x$ függvény összes $f^{(n)}(x)$ deriváltját!

5.6.5. Határozza meg az $f(x) = \sqrt{x+5}$ függvény összes $f^{(n)}(x)$ deriváltját!

5.6.6. Adja meg az $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ függvény összes $f^{(n)}(x)$ deriváltját!

5.6.7. Határozza meg az $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ függvény összes $f^{(n)}(x)$ deriváltját!

5.6.8. Mutassa meg, hogy ha

$$f(x) = x^3 \ln x,$$

akkor

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 6 \cdot (n-4)! \cdot x^{3-n}, \qquad \text{ha } n \geq 4.$$

5.6.9. Mutassa meg, hogy ha

$$f(x) = e^{-x} \sin x,$$

akkor teljesül az

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0.$$

egyenlőség!

5.6.10. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) = 2x - \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}},$$

függvény eleget tesz a

$$\cos x + f''(x)(1 + \sin x)^2 = 0$$

egyenletnek!

5.6.11. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) = \ln x \qquad (x > 0)$$

függvény kielégíti az

$$f^{(n)}(x) = -\frac{1}{x} \cdot (n-1) \cdot f^{(n-1)}(x), \qquad \text{ha} \quad n \geq 2$$

rekurzív összefüggést.

5.6.12. Határozza meg y''-t az $x^3 - y^3 = 1$ implicit függvény esetén!

5.6.13. Határozza meg y''-t az $xy - y^2 = 1$ implicit függvény esetén!

5.6.14. Határozza meg y''-t az $x^2 - xy + y^2 = 3$ implicit függvény esetén!

5.7 Taylor-polinom

5.7.1. Írja fel az $f(x) = \ln x$ függvény $x_0 = 1$ helyhez tartozó ötödfokú Taylor-polinomját!

5.7.2. Írja fel az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = 2$ helyhez tartozó negyedfokú Taylor-polinomját!

5.7.3. Írja fel az $f(x) = \sin x$ függvény $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ helyhez tartozó harmadfokú Taylor-polinomját!

5.7.4. Írja fel az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény $x_0 = 1$ helyhez tartozó negyedfokú Taylor-polinomját!

5.7.5. Írja fel az $f(x) = \ln(1-x)$ függvény negyedfokú Maclaurin-polinomját!

5.7.6. Írja fel a következő függvények negyedfokú Maclaurin polinomját!

(a) $f_1(x) = \cos x$;

(b) $f_2(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

(c) $f_3(x) = \dfrac{1}{1+x}$;

(d) $f_4(x) = \dfrac{1}{\cos x}$;

(e) $f_5(x) = e^{\cos x}$;

(f) $f_6(x) = \ln(1+x)$.

5.7.7. Írja fel a következő függvények ötödfokúú Maclaurin polinomját!

(a) $f_1(x) = \sin x$;

(b) $f_2(x) = \operatorname{tg} x$;

(c) $f_3(x) = \operatorname{arctg} x$;

(d) $f_4(x) = \arcsin x$.

5.7.8. Számolja ki az $e^{0,02}$ közelítő értékét az $f(x) = e^{2x}$ másodfokú Maclaurin-polinomjának felhasználásával!

5.7.9. Számolja ki a $\cos(-1)$ közelítő értékét az $f(x) = \cos x$ negyedfokú Maclaurin-polinomjának felhasználásával!

5.8 L'Hospital-szabály

5.8.1. Számítsa ki a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{\sin(\ln x)}{\ln x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{\ln(x-1)^2}{x-2}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$;

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

(k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1}$;

(l) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 4}$.

5.8.2. Számítsa ki a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln 5x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-1}{e^{x^2}-1}$;

(c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}$;

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$;

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to0+0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

5.8.3. Számítsa ki a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to0+0} 2x \operatorname{ctg} 7x$;

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\dfrac{1}{x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to0+0} 2x \ln^2 x$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln\dfrac{x-1}{x+1}$;

(e) $\lim\limits_{x\to\pi-0} (\pi-x) \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

(f) $\lim\limits_{x\to0+0} (\ln x) \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$.

5.8.4. Számítsa ki a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to0+0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

(b) $\lim\limits_{x\to1+0} \left(\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

(c) $\lim\limits_{x\to0+0} \left(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$;

(d) $\lim\limits_{x\to0+0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{th} x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$;

(e) $\lim\limits_{x\to1+0} \left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

(f) $\lim\limits_{x\to0+0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

5.8.5. Számítsa ki a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to0+0} x^{\frac{2}{1+10\ln x}}$;

(b) $\lim\limits_{x\to0+0} (\sin x)^x$;

(c) $\lim\limits_{x\to0+0} x^x$;

(d) $\lim\limits_{x\to0+0} (e^x-1)^{\operatorname{tg} x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to0} (1-\cos x)^{\sin x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}}$;

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$;

(h) $\lim\limits_{x\to0+0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$;

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$;

(k) $\lim\limits_{x\to0+0} \left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

(l) $\lim\limits_{x\to0+0} (1+\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

(m) $\lim\limits_{x\to0+0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

(n) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

5.9 Teljes függvényvizsgálat

5.9.1. Adja meg az

$$f(x) = x^5 - 20x^2, \qquad x \in [-2, 3]$$

függvény lokális szélsőértékeit, valamint az értelmezési tartományán felvett maximális és minimális értékeket!

5.9.2. Adott az $f(x) = 3x^3 - x^4$, $x \in \mathbb{R}$ függvény. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

(a) Az f függvénynek lokális szélsőértéke van az $x = 0$ helyen.

(b) f konvex az $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ intervallumon.

5.9.3. Adott az $f(x) = x^4 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ függvény.

(a) Határozza meg a függvény zérushelyeit!

(b) Számítsa ki a lokális szélsőértékek koordinátáit!

(c) Vizsgálja meg a függvény monotonitását!

(d) Számítsa ki az inflexiós pontok a koordinátáit!

(e) Vizsgálja a függvény konvexitását!

(f) Számítsa ki a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ határértékeket!

(g) Vázolja a függvény grafikonját!

5.9.4. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvényen!

5.9.5. Adott az $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ függvény.

(a) Határozza meg a függvény zérushelyét!

(b) Számítsa ki a lokális szélsőérték(ek) koordinátáit és vizsgálja meg a függvény monotonitását!

(c) Számítsa ki az inflexiós pont(ok) a koordinátáit és vizsgálja a függvény konvexitását!

(d) Számítsa ki a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0-0} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to0+0} f(x)$ határértékeket!

(e) Vázolja a függvény grafikonját!

5.9.6. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2+2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvényen! Vázolja a függvény grafikonját!

5.9.7. Állapítsa meg, hogy milyen intervallumokon monoton csökkenő ill. monoton növekvő az

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{1+x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

függvény!

5.9.8. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = \frac{3x}{(x-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

függvényen! Vázolja a függvény grafikonját!

5.9.9. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

függvényen! Vázolja a függvény grafikonját!

5.9.10. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = x \cdot e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvényen! Vázolja a függvény grafikonját!

5.9.11. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = e^{1+\frac{1}{x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

függvényen! Vázolja a függvény grafikonját!

5.9.12. Vizsgálja meg lokális szélsőérték és monotonitás szempontjából az

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvényt!

5.9.13. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

függvényen! Vázolja a függvény grafikonját!

5.9.14. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = \frac{2-x}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvényen! Vázolja a függvény grafikonját!

5.9.15. Adott az $f(x) = x \ln x$ függvény.

(a) Adja meg a függvény értelmezési tartományát és határozza meg a függvény zérushelyét!

(b) Számítsa ki a szélsőérték- és inflexiós pontjainak a koordinátáit! Vizsgálja a függvény monotonitását és konvexitását!

(c) Számítsa ki a $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ és a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ határértékeket!

(d) Vázolja a függvény grafikonját!

5.9.16. Adott az $f(x) = x^2 \ln x^2$ függvény.

(a) Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvény paritását és határozza meg a függvény zérushelyeit!

(b) Számítsa ki a szélsőérték- és inflexiós pontjainak a koordinátáit!

(c) Számítsa ki a $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ és a $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)$ határértékeket!

(d) Vázolja a függvény grafikonját!

5.9.17. Vizsgálja konvexitás szempontjából az $f(x) = x^2 \ln x^2$ függvényt!

5.9.18. Adott az $f(x) = x \ln x^2$ függvény.

(a) Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvény paritását!

(b) Határozza meg a függvény zérushelyeit!

(c) Vizsgálja a függvényt lokális szélsőérték és monotonitás szempontjából!

(d) Hol konvex és hol konkáv a függvény?

(e) Számítsa ki a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ határértékeket!

(f) Vázolja a függvény grafikonját!

5.9.19. Keresse meg az $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$ függvény monoton illetve konvex és konkáv szakaszait! Vázolja a függvény grafikonját a $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ és a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ határérték figyelembevételével!

5.9.20. Keresse meg az $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ függvény monoton illetve konvex és konkáv szakaszait! Vázolja a függvény grafikonját a $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ és a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ határértékek figyelembevételével!

5.9.21. Adott az

$$f(x) = e^{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

(a) Az f függvény szigorúan növekedő az $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon.

(b) f-nek az $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ helyen lokális maximuma van.

5.9.22. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

függvényen, majd vázolja a függvény grafikonját!

5.9.23. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

függvényen, majd vázolja a függvény grafikonját!

5.9.24. Hol van lokális szélsőértéke az $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ függvénynek? Vizsgálja a függvény monotonitását! Vázolja a függvényt a $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$ és a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ határértékek figyelembevételével! Adja meg a függvény értékkészletét!

5.9.25. Határozza meg az $f(x) = \sin x + \cos x$ függvény lokális szélsőértékeit a $[0, 2\pi]$ intervallum felett!

5.9.26. Hol és milyen lokális szélsőértéke van az $f(x) = \cos x - \cos^2 x$ függvénynek, ha $x \in [-\pi, \pi]$?

5.9.27. Adott az $f(x) = x \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény.

(a) Állapítsa meg a függvény paritását és határozza meg a függvény zérushelyét!

(b) Vizsgálja a függvényt lokális szélsőértékek és monotonitás szempontjából!

(c) Hol konvex és hol konkáv a függvény?

(d) Számítsa ki a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ és a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ határértékeket!

(e) Vázolja a függvény grafikonját és adja meg a függvény értékkészletét!

5.9.28. Adott az $f(x) = x - \operatorname{arctg} 2x$ függvény.

(a) Állapítsa meg a függvény paritását!

(b) Vizsgálja a függvényt lokális szélsőértékek és monotonitás szempontjából!

(c) Adja meg a függvény inflexiós pontját! Hol konvex és hol konkáv a függvény?

(d) Számítsa ki a $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ és a $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ határértékeket!

(e) Vázolja a függvény grafikonját és adja meg a függvény értékkészletét!

5.9.29. Az $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ függvénynek milyen a és b értékek mellett lesz az $x_1 = 1$ és az $x_2 = 2$ helyen szélsőértéke? Milyen típusúak ezek a szélsőértékhelyek?

5.9.30. Igazolja, hogy az $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 27$ függvény inflexiós pontja rajta fekszik a szélsőértékpontjait összekötő egyenesen! Vázolja a függvényt!

5.10 Szöveges szélsőérték feladatok

5.10.1. Egy tetszőleges pozitív számhoz adja hozzá a reciprokát! Melyik szám esetén lesz ez az összeg minimális, illetve mikor lesz maximális?

5.10.2. Egy 16 méter hosszú drótot téglalap alakúra szeretnénk hajlítani. Milyen hosszúak legyenek a téglalap oldalai, hogy a téglalap területe maximális legyen?

5.10.3. Határozza meg azt a pozitív x valós számot, amelyre az $x - x^2$ különbség maximális!

5.10.4. Határozza meg azokat az x, y pozitív számokat, amelyek összege 300 és az x^2y szorzat maximális!

5.10.5. Adja meg azokat a pozitív számokból álló számpárokat, amelyekben az első számnak és a második szám négyzetének az összege 10, továbbá a számpárban álló számok összege maximális!

5.10.6. Adja meg azokat a pozitív számokból álló számpárokat, amelyekben a számok négyzetösszege 4, továbbá a számpárban álló számok köbének szorzata maximális!

5.10.7. Határozza meg azokat a pozitív számokból álló számpárokat, amelyekben a számok összege 5, továbbá az első komponens négyzetének és a második komponens köbének szorzata maximális!

5.10.8. Ossza fel a 8-at két részre úgy, hogy a részek négyzetösszege minimális legyen!

5.10.9. Egy tűzfal mellett 600 m^2 -es téglalap alakú területet akarunk elkeríteni. Csak három oldalon kell kerítést készíteni, mert a negyedik oldal a tűzfal. Hogyan kell megválassztani a téglalap oldalait, hogy a kerítéshez a lehető legkevesebb drótot használjunk fel?

5.10.10. Egy nagy, négyzet alakú mező egyik oldalán folyó folyik. Hogyan kerítsünk el 2000 méter kerítéssel egy téglalap alakú telket, hogy az így kialakított rész területe maximális legyen és egyik oldalról a folyó természetes határt képezzen?

5.10.11. Egy négyzet alapú, nyitott tetejű doboz készítéséhez 600 cm^2 papír áll rendelkezésre. Hogyan kell megválasztani az oldalak hosszát, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

5.10.12. Ossza fel az a távolságot két részre úgy, hogy a részekkel, mint oldalakkal szerkesztett négyzetek területének összege minimális legyen!

5.10.13. 720 mm hosszú fémhuzalból olyan téglatest élmodelljét kell elkészíteni, amelynél az egy csúcsból kiinduló élek közül az egyik él egy másik kétszerese. Hogyan kell megválasztani az élek hosszát, hogy a hasáb térfogata maximális legyen?

5.10.14. Egy 50 cm oldalú négyzet sarkaiból kis négyzeteket kell kivágni és az oldalakat felhajtva téglatestet készíteni. Mekkora legyen a kis négyzetek oldala, hogy a keletkező test térfogata maximális legyen?

5.10.15. Egy téglalap alakú udvart szeretnénk kerítéssel körülvenni, majd szintén kerítéssel két részre osztani az egyik oldalpárral párhuzamosan. Ha az udvar alapterülete A adott, határozza meg az oldalaknak azt az arányát, amely esetben a legkevesebb kerítést kell felhasználni!

5.10.16. Téglatest alakú, nyitott tetejű dobozt szeretnénk hajtogatni egy téglalap alakú kartonpapírból, amelynek egyik oldala 30 cm, a másik oldala pedig 80 cm. Mekkora négyzeteket kell kivágni a lap sarkainál, ha maximális térfogatú dobozt szeretnénk kapni?

5.10.17. Határozza meg, hogy a 8π dm^3 térfogatú, felül nyitott hengerek közül melyik elkészítéséhez kell a legkevesebb lemez!

5.10.18. Bádoglemezből 10 literes, felül is zárt hengeres tartályt akarunk készíteni. Mekkorára válasszuk az alapkör sugarát és a henger magasságát, hogy a tartály felszíne minimális legyen?

5.10.19. Határozza meg az R sugarú gömbben elhelyezhető legnagyobb térfogatú henger sugarát!

5.10.20. Határozza meg annak a maximális térfogatú egyenes körhengernek a magasságát illetve az alapkörének a sugarát, amit egy H magasságú, R alapsugarú egyenes körkúpba tudunk írni!

5.10.21. Határozza meg az R sugarú körbe írt téglalapok közül annak az adatait, amelyiknek a területe maximális!

5.10.22. Egy oldalon 60 cm^2 nyomtatott szövegnek kell lennie. Mindkét oldalon 5 cm-es, alul és felül 3 cm-es a margó. Milyen hosszú legyen egy nyomtatott sor, ha minél kevesebb papírt szeretnénk felhasználni?

5.10.23. Egy kiadó elhatározta, hogy egy album nyomtatott oldalait olyan formában szeretné kiadni, hogy a lap alján és tetején illetve a lap külső oldalán 2 cm-es, a lap belső oldalán pedig 4 cm-es margót hagy a fűzés miatt. Egy oldal területe 600 cm^2. Mekkorák legyenek a lap méretei, hogy a nyomtatott rész területe maximális legyen?

5.10.24. Egy téglalap alakú falragasz területe 80 m^2. A felső és alsó margó 1 m, a két oldalon 1,5 m. Milyen méretűre válasszuk a falragaszt, hogy a margókon belül telenyomtatott terület a legnagyobb legyen?

5.10.25. Keresse meg az $y^2 = 8x$ parabolának azt a pontját, amely a $(6, 0)$ ponttól a legkisebb távolságra van!

5.10.26. Keresse meg az $x^2 - y^2 = 2$ hiperbola azon pontjait, amelyek a legközelebb vannak a $P(0, 1)$ ponthoz!

5.10.27. Olyan ablakot szeretnénk készíteni, amelynek alakja egy téglalapból és egy azon lévő félkörből áll. Az ablak kerülete adott K állandó. Mekkorának válasszuk az ablak méreteit, hogy az ablakon a legtöbb fény juthasson be?

5.10.28. Az állandó K kerületű derékszögű háromszögek közül határozza meg a legnagyobb területű háromszög befogóinak hosszát!

5.11 Útmutatások és megoldások

5.1.1. $f(x) = 2x - 7$, így $f(x+\Delta x) = 2(x+\Delta x) - 7 = 2x + 2\Delta x - 7$, azaz

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 2x + 2\Delta x - 7 - (2x-7) = 2\Delta x,$$

tehát

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2.$$

Emiatt

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2.$$

5.1.2. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, így

$$f(x+\Delta x) = 2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 5 = 2\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) - 3x3\Delta x + 5 =$$

$$= 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 5,$$

vagyis

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \left(2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 5\right) - (2x^2 - 3x + 5) =$$

$$= 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x = (\Delta x)(4x + 2\Delta x - 3).$$

Így

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 3.$$

Emiatt

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(4x + 2\Delta x - 3) = 4x - 3.$$

5.1.3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, így $f(x+\Delta x) = \dfrac{1}{x+\Delta x}$, azaz

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

Tehát

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}.$$

Emiatt

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

5.1.4. Ismert, hogy

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Emiatt

$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Képezzük a differenciahányados határértékét, ha $x_0 = -1$. Ekkor

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(-1+\Delta x)^2 - |-(-1)^2|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2 - \Delta x) = 2,$$

tehát f differenciálható az $x_0 = -1$ helyen.
Képezzük most a differenciahányados határértékét, ha $x_1 = 1$. Ekkor

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2,$$

tehát f differenciálható az $x_1 = 1$ helyen is.
Az $x_2 = 0$ helyen a bal oldali határérték:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-\Delta x)^2 - 0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = 0.$$

Az $x_2 = 0$ helyen a jobb oldali határérték:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 - 0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = 0.$$

A bal és jobb oldali határérték megegyezik, így f differenciálható az $x_2 = 0$ helyen és

$$f'(0) = 0.$$

5.1.5. Tudjuk, hogy

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

emiatt

$$f(x) = |x+1| - |x-3| = \begin{cases} -4, & \text{ha } x < -1, \\ 2x-2, & \text{ha } -1 \leq x < 3, \\ 4, & \text{ha } x \geq 3. \end{cases}$$

Az $x_0 = -1$ helyen a bal oldali differenciálhányados:

$$f'_-(-1) = 0,$$

mert $(-4)' = 0$. Az $x_0 = -1$ helyen a jobb oldali differenciálhányados:

$$f'_+(-1) = 2,$$

mert $(2x-2)' = 2$. A bal és jobb oldali differenciálhányados különbözik, így f nem differenciálható az $x_0 = -1$ helyen.
Az $x_1 = 0$ helyen f folytonos és deriválható. A differenciálhányados:

$$f'(0) = 2.$$

Az $x_2 = 3$ helyen a bal oldali differenciálhányados:

$$f'_-(3) = 2,$$

mert $(2x-2)' = 2$. Az $x_2 = 3$ helyen a jobb oldali differenciálhányados:

$$f'_+(3) = 0,$$

mert $4' = 0$. A bal és jobb oldali differenciálhányados különbözik, így f nem differenciálható az $x_2 = 3$ helyen.

5.1.6. Nyilvánvaló, hogy

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{ha } x \leq -1 \text{ vagy } x \geq 1, \\ -x^2 + 1, & \text{ha } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Vizsgáljuk meg a féloldali differenciálhányadosokat az $x_0 = -1$ és az $x_1 = 1$ helyeken! Az $x_0 = -1$ helyen a bal oldali differenciálhányados:

$$f'_-(-1) = -2,$$

mert $(x^2 - 1)' = 2x$. Az $x_0 = -1$ helyen a jobb oldali differenciálhányados:

$$f'_+(-1) = 2,$$

mert $(-x^2 + 1)' = -2x$. A bal és jobb oldali differenciálhányados különbözik, így f nem differenciálható az $x_0 = -1$ helyen.
Hasonlóan az $x_1 = 1$ helyen a bal oldali differenciálhányados:

$$f'_-(1) = -2,$$

mert $(-x^2 + 1)' = -2x$. Az $x_1 = 1$ helyen a jobb oldali differenciálhányados:

$$f'_+(1) = 2,$$

mert $(x^2 - 1)' = 2x$. A bal és jobb oldali differenciálhányados különbözik, így f nem differenciálható az $x_1 = 1$ helyen sem.
A deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x < -1 \text{ vagy } x > 1, \\ -2x, & \text{ha } -1 < x < 1. \end{cases}$$

5.1.7. Könnyen látható, hogy

$$f(x) = |x| \cdot \sin|x| = \begin{cases} x \cdot \sin x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x \cdot \sin(-x) = x \cdot \sin x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

azaz $f(x) = x \cdot \sin x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Emiatt

$$f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x,$$

és

$$f'(0) = 0.$$

Nyilvánvaló az is, hogy

$$g(x) = |x| \cdot \cos |x| = \begin{cases} x \cdot \cos x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x \cdot \cos(-x) = -x \cdot \cos x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Tekintsük a féloldali differenciálhányadosokat az $x_0 = 0$ helyen!

$$g'_-(0) = -1 \neq g'_+(0) = 1.$$

A $g(x)$ függvény nem differenciálható az $x_0 = 0$ helyen.

5.1.8. Tekintsük az $x_0 = 0$ helyen a differenciahányadost! Látható, hogy

$$f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) - 0^2 = f(\Delta x) = \begin{cases} (\Delta x)^2, & \text{ha } \Delta x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } \Delta x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Emiatt:

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} \Delta x, & \text{ha } \Delta x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } \Delta x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Tehát

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0.$$

Az $f(x)$ függvény differenciálható az $x_0 = 0$ helyen.

5.1.9. Írjuk fel az $x_0 = 0$ helyen a differenciahányadost!

$$f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) - 0 = f(\Delta x) = \begin{cases} \Delta x, & \text{ha } \Delta x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } \Delta x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Tehát

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \Delta x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } \Delta x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Az $x_0 = 0$ tetszőlegesen kicsiny sugarú környezetében vannak racionális és irracionális számok is, így

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

nem létezik.

5.1.10. Tekintsük a féloldali differenciálhányadosokat az $x_0 = 1$ helyen!

$$f'_-(1) = 2, \qquad f'_+(1) = 0.$$

Az $f(x)$ függvény nem differenciálható az $x_0 = 1$ helyen, mert

$$f'_-(1) \neq f'_+(1).$$

5.1.11. Tekintsük a féloldali differenciálhányadosokat az $x_0 = 2$ helyen!

$$f'_-(2) = 4, \qquad f'_+(2) = 4.$$

Az $f(x)$ függvény differenciálható az $x_0 = 2$ helyen, mert $f'_-(2) = f'_+(2)$, továbbá a deriváltfüggvény

$$f' = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \leq 2, \\ 4, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

5.1.12. Az $x_0 = -1$ helyen a függvény nem folytonos, mert $f(-1) = 0$ és

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = -1 \neq 0.$$

Emiatt a függvény nem differenciálható az $x_0 = -1$ helyen. Tekintsük a féloldali differenciálhányadosokat az $x_1 = 1$ helyen!

$$f'_-(1) = 3, \qquad f'_+(1) = 3.$$

Az $f(x)$ függvény differenciálható az $x_1 = 1$ helyen, mert $f'_-(1) = f'_+(1)$.
A deriváltfüggvény:

$$f' = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < -1, \\ 3x^2, & \text{ha } -1 < x \leq 1, \\ 3, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

5.1.13. Nyilvánvaló, hogy

$$f(x) = |x^3| = \begin{cases} x^3, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x^3, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Vizsgáljuk az $x_0 = 0$ helyen a féloldali differencciálhányadosokat!

$$f'_-(0) = 0 = f'_+(0),$$

így

$$f'(x) = (|x^3|)' = \begin{cases} 3x^2, & \text{ha } x \geq 0, \\ -3x^2, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

5.1.14. Az $x_0 = 0$ helyen a féloldali deriváltak értékei különbözőek, így a függvény nem differenciálható a megadott helyen.

5.1.15. Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, akkor f nyilvánvalóan differenciálható. Az $x_0 = -1$ helyen a jobb és a bal oldali derivált értéke megegyezik, így a függvény ezen a helyen is deriválható.

5.1.16. Könnyen látható, hogy az $x < 1$ és $x > 1$ intervallumokon a függvény deriválható. Az f függvénynek az $x = 1$ helyen is differenciálhatónak kell lennie, tehát az $mx + b$ egyenesnek érintenie kell a $2\sqrt{x}$ függvényt az $x = 1$ helyen. Az érintési pont: $P(1, 2)$. Számítsuk ki az érintő meredekségét!

$$(2 \cdot \sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

azaz

$$m = f'(1) = 1.$$

Az érintő egyenlete:

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 1),$$

tehát

$$y = x + 1.$$

Ahonnan $m = 1$ és $b = 1$ adódik. Ezekkel a paraméterekkel az f mindenhol differenciálható.

5.1.17. Nyilvánvaló, hogy az $x < -1$ és az $x > -1$ intervallumokon a függvény deriválható. Az f függvénynek az $x = -1$ helyen is differenciálhatónak kell lennie, tehát az $mx + b$ egyenesnek érintenie kell az e^x függvényt az $x = -1$ helyen. Az érintési pont: $P(-1, e^{-1})$. Számítsuk ki az érintő meredekségét!

$$(e^x)' = e^x,$$

így

$$m = f'(-1) = \frac{1}{e}.$$

Az érintő egyenlete:

$$y - \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot (x + 1),$$

azaz

$$y = \frac{1}{e}x + \frac{2}{e}.$$

Ahonnan $m = \frac{1}{e}$ és $b = \frac{2}{e}$ adódik. Ezekkel a paraméterekkel az f függvény mindenhol differenciálható.

5.1.18. Pl. $f(x) = |x - 1|$.

5.1.19. Nincs ilyen függvény, ugyanis könnyen igazolható, hogy az x_0 helyen differenciálható f függvény folytonos is x_0-ban.

5.1.20. Pl. $f(x) = x^2$.

5.1.21. Pl. $f(x) = x \cdot |x|$.

5.1.22. A deriváltak:

(a) $f'(x) = 2x - 2;$ (b) $f'(x) = -1 - 4x^3;$

(c) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}} + \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} - \dfrac{1}{x^2};$ (d) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}};$

(e) $f'(x) = \dfrac{1}{8\sqrt[8]{x^7}};$ (f) $f'(x) = -\dfrac{3}{2\sqrt[4]{x^7}} - \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^7}}.$

5.1.23. A deriváltak:

(a) $f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x+2}{2\sqrt{x}};$ (b) $f'(x) = \sin x + x\cos x;$

(c) $f'(x) = 3x^2\cos x - (x^3+1)\sin x;$ (d) $f'(x) = 2^x \ln 2 \cdot (x-1) + 2^x;$

(e) $f'(x) = 14x^4 \log_4 x + \dfrac{3}{\ln 4}x^4;$ (f) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$

5.1.24. A deriváltak:

(a) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \dfrac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2};$

(b) $f'(x) = \dfrac{3x^2(1+2x) - 2(x^3+4)}{(1+2x)^2} = \dfrac{3x^2}{2x+1} - \dfrac{2x^3+8}{4x^2+4x+1};$

(c) $f'(x) = \dfrac{\cos x(\cos x - 1) + \sin x(\sin x + 1)}{(\cos x - 1)^2} = \dfrac{\sin x - \cos x + 1}{(\cos x - 1)^2};$

(d) $f'(x) = (\mathrm{tg}x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

(e) $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{(x - \sqrt{x})^2};$

(f) $f'(x) = \dfrac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}.$

5.1.25. A deriváltak:

(a) $f'(x) = \left((3x^2+5)^{-4}\right)' = -4(3x^2+5)^{-5} \cdot 6x = -\dfrac{24x}{(3x^2+5)^5};$

(b) $f'(x) = \left((2x+7)^{1/2}\right)' = \dfrac{1}{2}(2x+7)^{-1/2} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+7}};$

(c) $f'(x) = \left(\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^3\right)' = 3\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^2 \cdot \dfrac{-5}{(x-3)^2} = -15\dfrac{(x+2)^2}{(x-3)^3};$

(d) $f'(x) = \left(\left[4-(4+x)^{1/2}\right]^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\left(4-(4+x)^{1/2}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2}(4+x)^{-1/2} =$
$= \frac{-1}{4\sqrt{4+x}\sqrt{4-\sqrt{4+x}}};$

(e) $f'(x) = \left((1+x^2)^{4/3}\right)' = \frac{4}{3}(1+x^2)^{1/3} \cdot 2x = \frac{8}{3}x\sqrt[3]{1+x^2};$

(f) $f'(x) = ([\cos(x^3+1)]^2)' = 2\cos(x^3+1)(-\sin(x^3+1)) \cdot 3x^2 =$
$= -6x^2\cos(x^3+1)\sin(x^3+1).$

5.1.26. A deriváltak:

(a) $f'(x) = \frac{\left(2^x \ln 2 \cdot \sin\sqrt{x} + 2^x \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\operatorname{ctg}^2 x - 2^x \sin\sqrt{x} \cdot 2\operatorname{ctg} x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{\operatorname{ctg}^4 x};$

(b) $f'(x) = 5(x^2+2)^4 \cdot 2x - 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot \cos x;$

(c) $f'(x) = \frac{\left(2x \cdot \operatorname{tg} x + x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot 2^x - 2^x \cdot \ln 2 \cdot x^2 \cdot \operatorname{tg} x}{2^{2x}};$

(d) $f'(x) = 3^{x^2} \cdot \ln 3 \cdot 2x - (\sin(x^2-3x))(2x-3);$

(e) $f'(x) = 5^x \cdot \ln 5 \cdot \sin 3x + 5^x \cdot \cos 3x \cdot 3 + \frac{5}{\cos^2(5x-2)};$

(f) $f'(x) = \frac{\sqrt{6x^2-4}}{3x} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{6x^2-4} - 3x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{6x^2-4}} \cdot 12x}{6x^2-4} = \frac{2}{2x-3x^3}.$

5.1.27. A deriváltak:

(a) $f'(x) = \frac{\left(6\cos 6x + \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}\right)(3^{-x}+5) + 3^{-x}\ln 3 \cdot (\sin 6x + \sqrt[7]{x})}{(3^{-x}+5)^2};$

(b) $f'(x) = 2\cos(4x+1)(-\sin(4x+1)) \cdot 4 \cdot \ln\frac{1}{x^6+2} - \frac{6x^5}{x^6+2} \cdot \cos^2(4x+1);$

(c) $f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}} + \frac{1}{x\ln 10}\right)\left(\frac{1}{x^2} + \cos x\right) - \left(\frac{-2}{x^3} - \sin x\right)(\sqrt[6]{x} + \lg x)}{\left(\frac{1}{x^2} + \cos x\right)^2};$

(d) $f'(x) = \frac{3x^2}{\cos^2 x^3} - \frac{2\operatorname{ctg}(x^4+5)}{\sin^2(x^4+5} \cdot 4x^3;$

(e) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot \ln 2 \cdot (3^x+5) - 3^x \cdot \ln 3 \cdot x^2 \cdot \ln 2}{(3^x+5)^2} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \sin 8x + 8\sqrt[3]{x} \cos 8x;$

(f) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{-3\sin 3x + 2^x \ln 2}{(\cos 3x + 2^x)\ln 2} \cdot (x^3+e^2)^2 - 2(x^3+e^2) \cdot 3x^2 \cdot \log_2(\cos 3x + 2^x)}{(x^3+e^2)^4};$

(g) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot 2^x(\pi + \mathrm{tg}x) - \sqrt[3]{x}\left(2^x \ln 2 \cdot (\pi + \mathrm{tg}x) + \dfrac{2^x}{\cos^2 x}\right)}{4^x(\pi + \mathrm{tg}x)^2};$

(h) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\ln^2(1+x^2)}} \cdot \dfrac{2x}{1+x^2} \cdot (x^2 + \mathrm{tg}2x) - \sqrt[3]{\ln(1+x^2)} \cdot \left(2x + \dfrac{2}{\cos^2 2x}\right)}{(x^2 + \mathrm{tg}2x)^2}.$

5.1.28. A deriváltak:

(a) $f'(x) = \cos\left(\cos \dfrac{1}{x^2}\right) \cdot \left(-\sin \dfrac{1}{x^2}\right) \cdot (-2) \cdot \dfrac{1}{x^3};$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{\ln \ln x} \cdot \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x};$

(c) $f'(x) = 3\left(\ln^2 \dfrac{3x^5+6}{(x^2+5x)^2}\right) \cdot \dfrac{(x^2+5x)^2}{3x^5+6} \cdot \dfrac{15x^4(x^2+5x) - 2(3x^5+6)(2x+5)}{(x^2+5x)^3};$

(d) $f'(x) = \dfrac{1}{x^4 + 3^{\sqrt{\sin x}}} \cdot \left(4x^3 + 3^{\sqrt{\sin x}} \cdot \ln 3 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x\right);$

(e) $f'(x) = \cos(\sin \sin x) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x;$

(f) $f'(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \sin x - \sqrt{x+1} \cdot \cos x}{\sin^2 x}.$

5.1.29. A deriváltak:

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \dfrac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2};$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x^2+1};$

(c) $f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(\ln(2x - \mathrm{ch}x))} \cdot \dfrac{2 - \mathrm{sh}x}{2x - \mathrm{ch}x};$

(d) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-\text{th}x^2}} \cdot \dfrac{-2x}{\text{ch}^2 x^2}$;

(e) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(e^{x+3}-4x\sqrt{x})^2}} \cdot \left(e^{x+3} - 6\sqrt{x}\right)$;

(f) $f'(x) = \dfrac{2^{\cos x}\ln 2(-\sin x)\cdot\sqrt[4]{\text{tg}^2 x + \text{sh}^3 x} - 2^{\cos x}\cdot\dfrac{\dfrac{2\text{tg}x}{\cos^2 x} + 3\text{sh}^2 x\text{ch}x}{4\cdot\sqrt[4]{(\text{tg}^2 x+\text{sh}^3 x)^3}}}{\sqrt{\text{tg}^2 x + \text{sh}^3 x}}$.

(g) $f'(x) = 2\log_2 \text{cth}\sqrt{3-x^2} \cdot \dfrac{1}{\ln 2\cdot \text{cth}\sqrt{3-x^2}} \cdot \dfrac{-1}{\text{sh}^2\sqrt{3-x^2}} \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{3-x^2}}$;

(h) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x - \dfrac{x^2}{4}}} + \dfrac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}\cdot\sqrt{1+(4x-x^2)^2}}$.

5.2.1. Ha $x_0 = 2$, akkor $y_0 = f(x_0) = f(2) = -1$. Tehát a $P_0(2;-1)$ ponthoz húzható érintő és normális egyenletét keressük. Deriváljuk a függvényt!

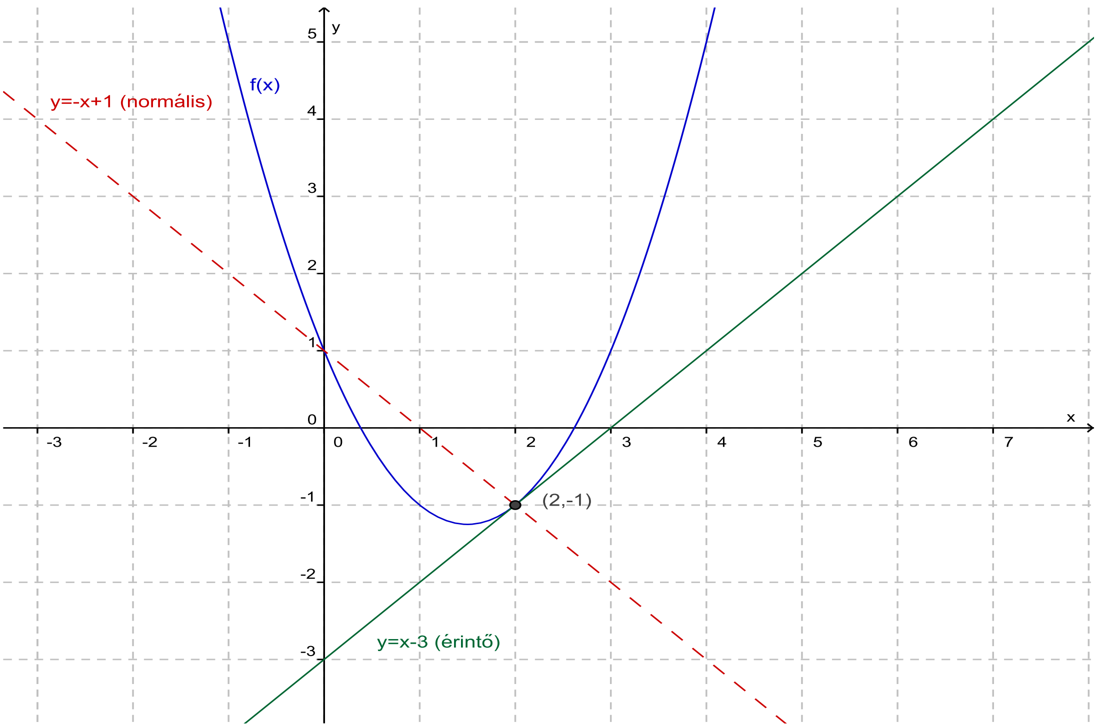
$$f'(x) = 2x - 3.$$

Az érintő meredeksége:

$$f'(2) = 4 - 3 = 1.$$

Az érintő egyenlete:

$$y_{\text{é}} = x - 3.$$



A normális meredeksége:

$$-\frac{1}{f'(2)} = -1.$$

A normális egyenlete:

$$y_n = -(x-2) - 1,$$

tehát

$$y_n = 1 - x.$$

5.2.2. Ha $x_0 = 3$, akkor $y_0 = f(x_0) = f(3) = 45$. Tehát a $P_0(3;45)$ ponthoz húzható érintő egyenletét keressük. Deriváljuk a függvényt!

$$f'(x) = 12x^2 - 14x.$$

Az érintő meredeksége:

$$f'(3) = 12 \cdot 3^2 - 14 \cdot 3 = 66.$$

Az érintő egyenlete:

$$y = 66(x-3) + 45,$$

azaz

$$y = 66x - 153.$$

5.2.3. A függvény deriváltja:

$$f'(x) = x^2 - 1.$$

Az érintők párhuzamosak az $y = 3x$ egyenessel, vagyis a meredekség 3. Tehát

$$x^2 - 1 = 3,$$

azaz

$$x^2 = 4.$$

Így:

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -2.$$

A keresett pontok:

$$P_1\left(2; \frac{2}{3}\right), \qquad \text{és} \qquad P_2\left(-2; -\frac{2}{3}\right).$$

5.2.4. Ha $x_0 = 1$, akkor $y_0 = f(x_0) = f(1) = 0$. Tehát a $P_0(1;0)$ zérushelyhez húzható normális egyenletét keressük. Deriváljuk a függvényt!

$$f'(x) = 3x^2 - 2x.$$

A normális meredeksége:

$$-\frac{1}{f'(1)} = -1.$$

A normális egyenlete:

$$y = -(x-1),$$

azaz

$$y = 1 - x.$$

5.2.5. A függvény deriváltja:

$$f'(x) = 2x.$$

Az érintő párhuzamos az $y = 6x - 1$ egyenessel, vagyis a meredekség 6. Tehát

$$2x = 6,$$

azaz

$$x = 3.$$

A P(3;14) a keresett pont, mert $f(3) = 9 + 5 = 14$.

5.2.6. Az egyenes egyenlete felírható expilicit alakban:

$$y = \frac{-1}{3}x + \frac{4}{9}.$$

Az egyenes meredeksége tehát $\dfrac{-1}{3}$. Emiatt a keresett érintő meredeksége 3. Az f függvény deriváltja:

$$f'(x) = 3x^2.$$

Tehát a keresett pontok meghatározásához a

$$3x^2 = 3,$$

egyenletet kell megoldani. Nyilvánvaló, hogy

$$x_{1,2} = \pm 1.$$

A megoldást tehát a $P_1(1;1)$ és a $P_2(-1,-1)$ pontok adják.

5.2.7. Deriváljuk a függvényt!

$$f'(x) = 9x^2 - 22x - 15.$$

Az érintő pontosan akkor párhuzamos az x-tengellyel, ha a meredeksége 0. Tehát a

$$9x^2 - 22x - 15 = 0$$

másodfokú egyenlet gyökeit keressük. Könnyen látható, hogy

$$x_1 = 3 \qquad \text{és} \qquad x_2 = -\frac{5}{9.}$$

A keresett pontok:

$$P_1(3,0) \qquad \text{és} \qquad P_2\left(-\frac{5}{9}; \frac{16384}{243}\right).$$

5.2.8. A függvény explicit alakja:

$$f(x) = \frac{4}{x}.$$

A derivált:

$$f'(x) = 4 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{-4}{x^2}.$$

Emiatt:

$$f'(1) = -4 \qquad \text{és} \qquad f'(-4) = -\frac{1}{4}.$$

A $P_1(1;4)$ ponthoz húzott érintő egyenlete:

$$y_{\acute{e}_{P_1}} = -4(x-1) + 4,$$

azaz

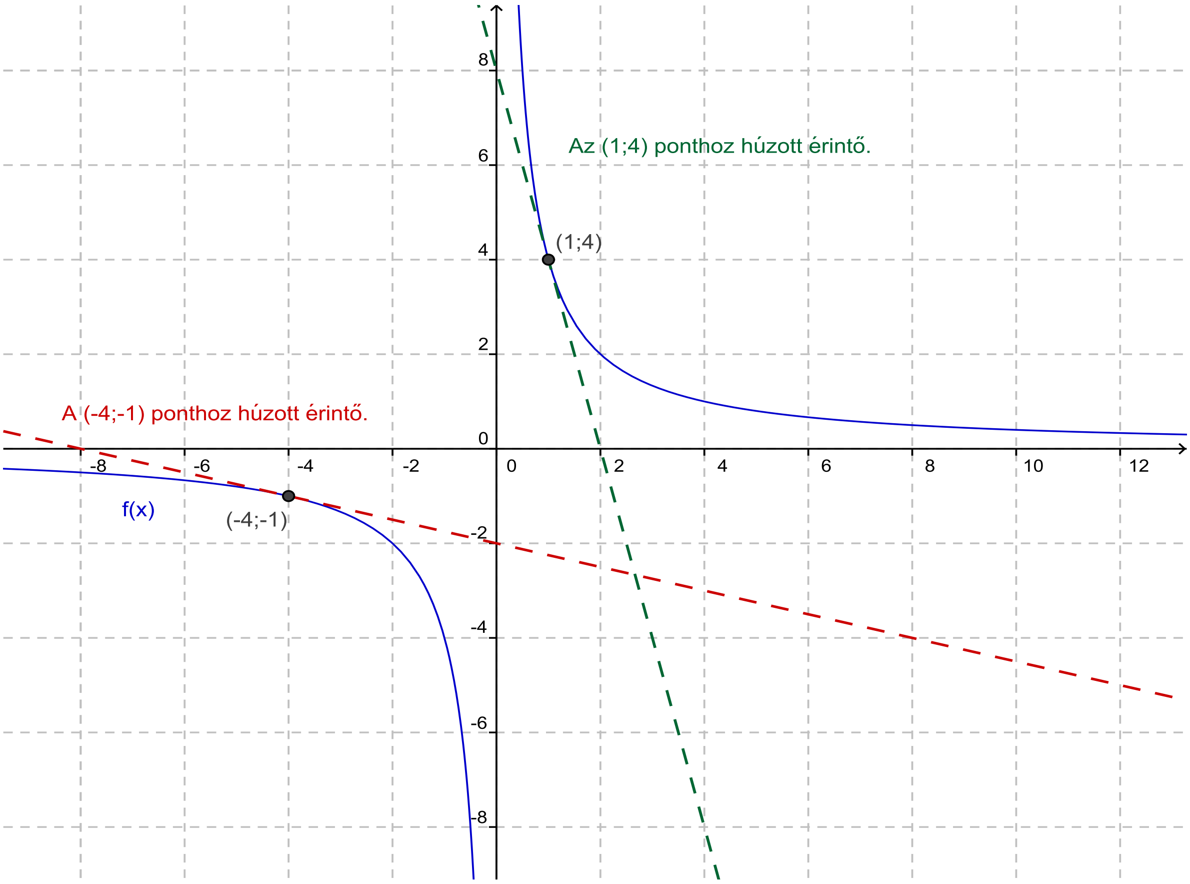
$$y_{\acute{e}_{P_1}} = -4x + 8.$$

A $P_2(-4;-1)$ ponthoz húzott érintő egyenlete:

$$y_{\acute{e}_{P_2}} = -\frac{1}{4}(x+4) - 1,$$

azaz

$$y_{\acute{e}_{P_2}} = -\frac{1}{4}x - 2.$$



5.2.9. Deriváljuk a függvényt!

$$f'(x) = 2x.$$

Jelölje az érintési pontot $P_0(x_0; y_0)$. Nyilvánvaló, hogy $y_0 = f(x_0) = x_0^2$. Tehát $P_0(x_0; x_0^2)$. Az érintő meredeksége a P_0 pontban $f'(x_0) = 2x_0$. Írjuk fel a P_0-beli érintő egyenletét!

$$y = 2x_0 \cdot (x - x_0) + x_0^2,$$

azaz

$$y = 2x_0 \cdot x - x_0^2.$$

Az érintő egyenesen a $Q(2; -12)$ pont rajta van. A keresett pontok meghatározásához tehát az

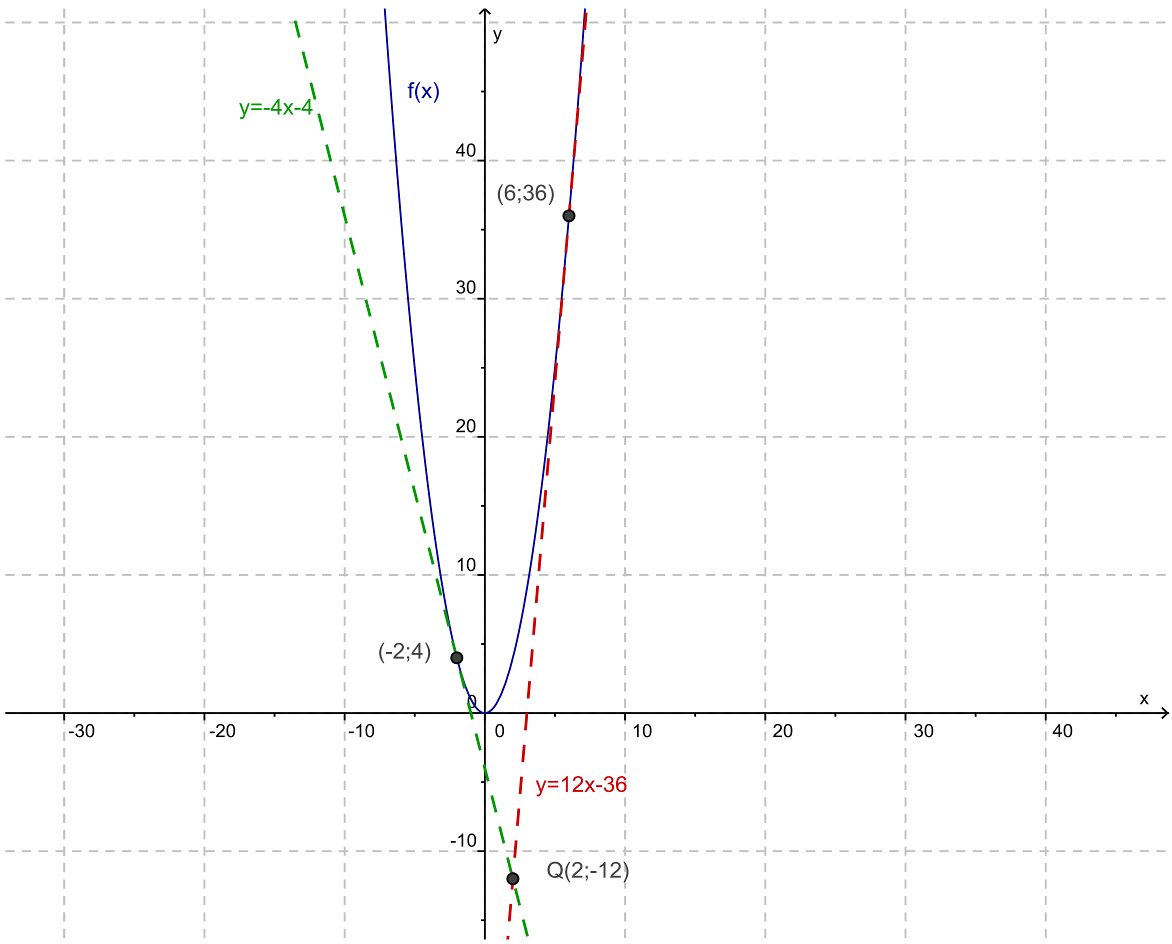
$$x_0^2 - 4x_0 - 12 = 0$$

másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Könnyen látható, hogy

$$x_{0_1} = 6 \qquad \text{és} \qquad x_{0_2} = -2.$$

A keresett pontok:

$$P_1(6; 36) \qquad \text{és} \qquad P_2 = (-2; 4).$$



5.2.10. Deriváljuk a függvényt!

$$f'(x) = 4x - 3x^2.$$

Jelölje az érintési pontot $P_0(x_0; y_0)$. Az érintő meredeksége a P_0 pontban $f'(x_0) = 4x_0 - 3x_0^2$. Az érintő meredeksége megegyezik az $y = x$ egyenes meredekségével, azaz 1-gyel. A keresett pontok meghatározásához tehát az

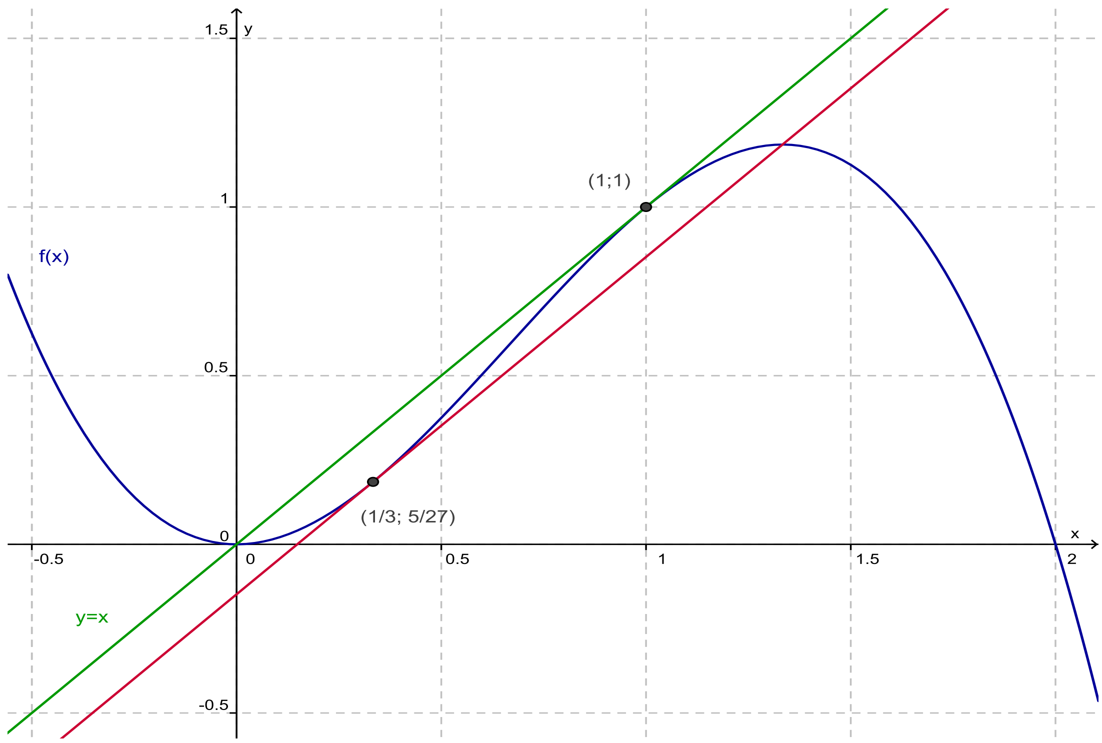
$$-3x_0^2 + 4x_0 - 1 = 0$$

másodfokú egyenletet kell megoldanunk. A gyökök

$$x_{0_1} = 1 \qquad \text{és} \qquad x_{0_2} = \frac{1}{3}.$$

A keresett pontok:

$$P_1(1; 1) \qquad \text{és} \qquad P_2 = \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{27}\right).$$



5.2.11. Deriváljuk a függvényt!

$$f'(x) = 6x^2 - 6x.$$

Jelölje az érintési pontot $P_0(x_0; y_0)$. Az érintő meredeksége a P_0 pontban $f'(x_0) = 4x_0 - 3x_0^2$. Az érintő meredeksége $-\frac{3}{2}$. A keresett pont meghatározásához a

$$6x_0^2 + 6x_0 + \frac{3}{2} = 0$$

másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Az

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

kétszeres valós gyöke az egyenletnek. A keresett pont tehát:

$$P_0\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

5.2.12. Deriváljuk a függvényt a láncszabály szerint!

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - 2x\sqrt{x-1}}{(x^2+1)^2}.$$

Az érintő meredeksége:

$$f'(2) = -\frac{3}{50}.$$

Az érintő egyenlete:

$$y = -\frac{3}{50}(x-2) + \frac{1}{5},$$

azaz

$$y = -\frac{3}{50}x + \frac{8}{25}.$$

5.2.13. Ha $x_0 = 3$, akkor $y_0 = f(x_0) = 5$. Deriváljuk a függvényt a láncszabály szerint!

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}.$$

Ekkor:

$$f'(3) = \frac{3}{5}.$$

A normális meredeksége:

$$-\frac{1}{f'(3)} = -\frac{5}{3}.$$

A normális egyenlete:

$$y = -\frac{5}{3}(x-3) + 5,$$

azaz

$$y = -\frac{5}{3}x + 10.$$

5.2.14. Deriváljuk a függvényt a láncszabály szerint!

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}.$$

A $P_0(x_0; y_0)$ pontban a normális meredeksége:

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{2\sqrt{1+3x_0}}{3}.$$

A megadott egyenes explicit alakja:

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Tehát a pont meghatározásához a

$$-\frac{2\sqrt{1+3x_0}}{3} = -\frac{4}{3}$$

egyenletet kell megoldani. Ekkor

$$\sqrt{1+3x_0} = 2,$$

azaz

$$x_0 = 1.$$

A keresett pont a $P_0(1; 2)$ pont.

5.2.15. Deriváljuk a függvényt!

$$f'(x) = 2\sin x \cos x.$$

Ha $x_0 = \frac{\pi}{3}$, akkor $y_0 = f(x_0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$. Az érintő meredeksége:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Az érintő egyenlete:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{3}{4}.$$

5.2.16. Deriváljuk a függvényt!

$$f'(x) = -\sin x.$$

Ha $x_0 = \frac{\pi}{3}$, akkor $y_0 = f(x_0) = 1 + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$. A normális meredeksége:

$$-\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{-\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

A normális egyenlete:

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{3}{2}.$$

5.2.17. Az egységnyi ordinátákhoz tartozó abszcisszák:

$$x_1 = -1 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 1.$$

A $P_1(-1;1)$ pontba húzott érintő iránytangense:

$$f'(-1) = -1,$$

a P_1 pontba húzott érintő egyenlete:

$$y = -x.$$

A $P_2(1;1)$ pontba húzott érintő iránytangense:

$$f'(1) = 1,$$

a P_2 pontba húzott érintő egyenlete pedig:

$$y = x.$$

Nyilvánvaló, hogy a két egyenes az origóban metszi egymást.

5.2.18. Deriváljuk a függvényt!

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

A megadott egyenes explicit alakja:

$$y = 9x - 26$$

Az egyenes meredeksége 9. Olyan érintőt keresünk, amelyiknek szintén 9 a meredeksége. Tegyük fel, hogy a $P_0(x_0; f(x_0))$ pontba húzott érintő eleget tesz a feladat feltételeinek, tehát

$$3x_0^2 - 6x_0 = 9.$$

Azaz a

$$3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 0$$

másodfokú egyenlet gyökeit kell meghatározni. Könnyen ellenőrizhető, hogy a gyökök:

$$x_{0_1} = 3 \qquad \text{és} \qquad x_{0_2} = -1.$$

Ennek megfeleően a

$$P_1(3;1) \qquad \text{és} \qquad P_2(-1;-3)$$

pontok írhatók fel. A P_1 pont illeszkedik az egyenesre, a P_2 viszont nincs rajta az egyenesen.

5.2.19. Deriváljuk a függvényt!

$$f'(x) = 1 - 2x.$$

Ekkor $f'(1) = -1$. A normális meredeksége:

$$-\frac{1}{f'(1)} = 1.$$

A normális egyenlete:

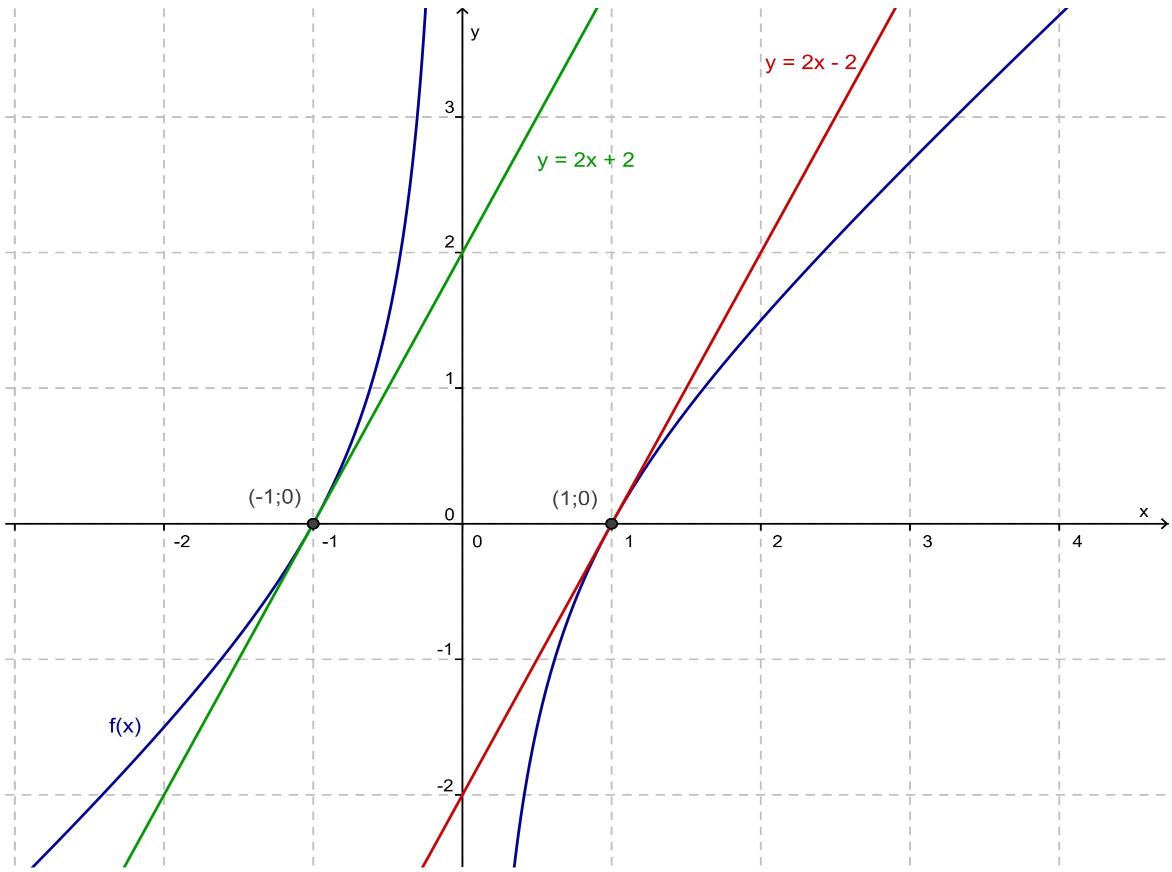
$$y = x - 1.$$

A metszéspont meghatározásához oldjuk meg az

$$x - x^2 = x - 1$$

egyenetet! Ekkor
$$x^2 = 1,$$
azaz
$$x_0 = 1 \qquad \text{és} \qquad x_1 = -1.$$
A keresett pont tehát a $P_1(-1, -2)$, mert $f(-1) = -2$.

5.2.20. Az $f(x)$ függvény grafikonja az x-tengelyt az $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$ helyen metszi. A keresett érintő egyenesek egyenletei:
$$y = 2x - 2 \qquad \text{és} \qquad y = 2x + 2.$$



5.2.21. Tekintsük a $P_0(x_0, f(x_0))$ pontba húzott érintőt, amely a feladat feltételeinek eleget tesz. A háromszög egyenlőszárú, így az érintő meredeksége -1, tehát
$$f'(x_0) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x_0}} = -1,$$
azaz $x_0 = \frac{3}{4}$. Az érintési pont koordinátái:
$$P_0\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right).$$

A P_0 ponba húzott érintő egyenlete:

$$y = -x + \frac{9}{4}.$$

A tengelyekből levágott szakaszok hossza $\frac{9}{4}$. A háromszög területe:

$$T_\triangle = \frac{81}{32}.$$

5.2.22. Tekintsük a $P\left(a; \frac{1}{a}\right)$ pontot! Az érintő egyenlete a P pontban:

$$y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a},$$

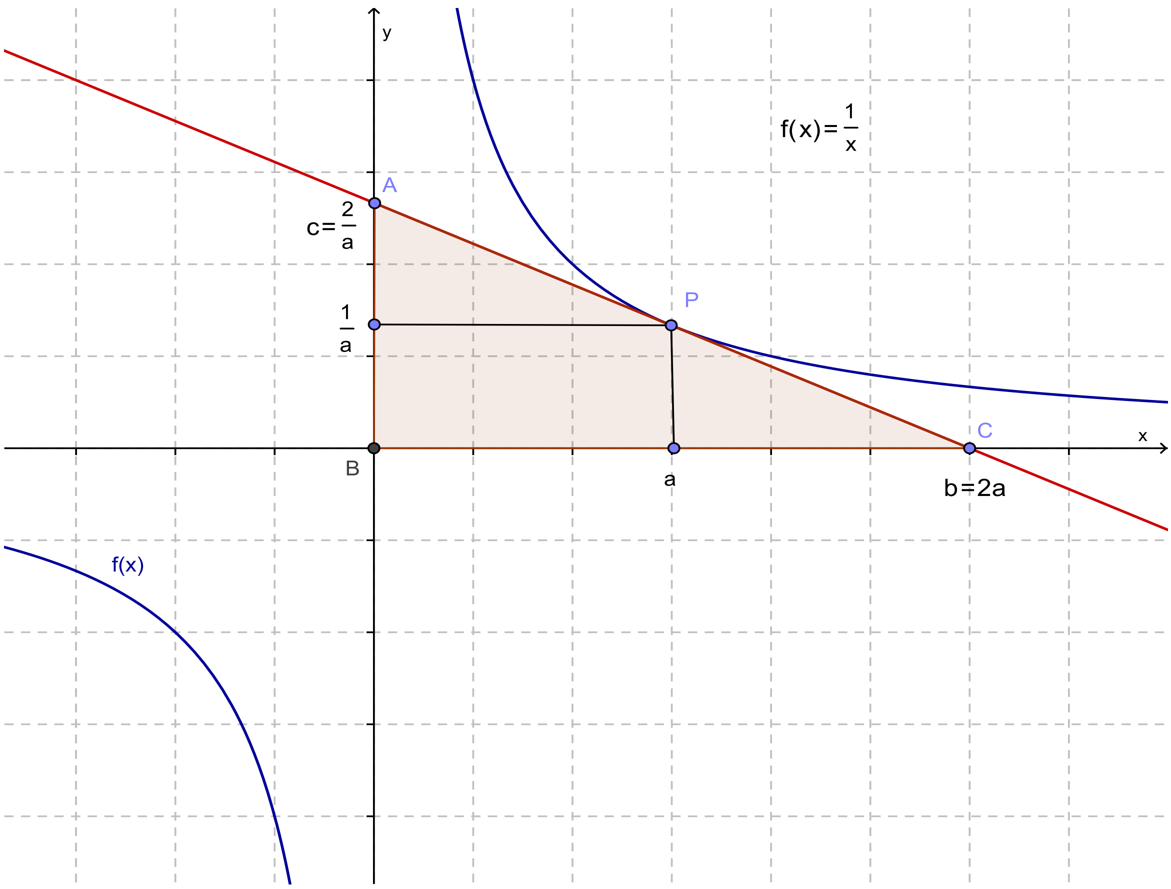
azaz

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}.$$

Az x-tengelyből levágott szakasz hossza: $b = 2a$, az y-tengelyből kivágott szakasz hossza: $c = \frac{2}{a}$. A háromszög területe:

$$T_\triangle = \frac{1}{2}bc = 2.$$

A háromszög területe tehát állandó.



5.2.23. Azon pontok koordinátáit, amelyekhez húzott érintők párhuzamosak az x-tengellyel, az

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0$$

egyenletből kapjuk meg. A gyökök:

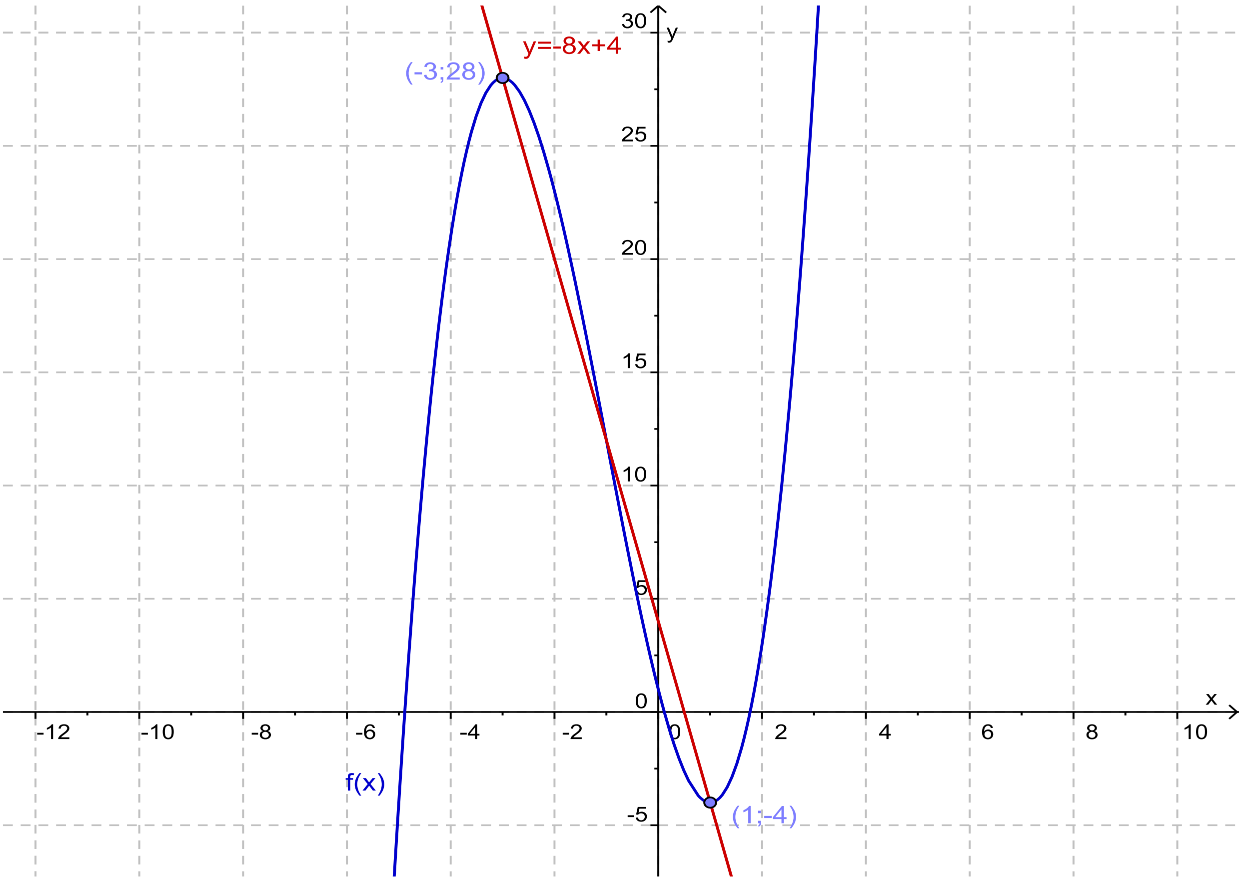
$$x_1 = -3 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 1.$$

A keresett pontok:

$$P_1(-3; 28) \qquad \text{és} \qquad P_2(1; -4).$$

A P_1 és P_2 pontokat összekötő egyenes egyenlete:

$$y = -8x + 4.$$



5.3.1. A deriváltak megadásához felhasználjuk az

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

azonosságot.

(a) Ha $x > 0$, akkor $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\cdot\ln x}$.

$$f'(x) = \left(e^{x\cdot\ln x}\right)' = e^{x\cdot\ln x}\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

(b) Ha $x > 0$, akkor $f(x) = \sin\left(x^{\cos x}\right) = \sin\left(e^{\ln x^{\cos x}}\right) = \sin\left(e^{\cos x \cdot \ln x}\right)$.
$f'(x) = \left(\sin\left(e^{\cos x \cdot \ln x}\right)\right)' = \cos\left(e^{\cos x \cdot \ln x}\right) \cdot e^{\cos x \cdot \ln x} \cdot \left(-\sin x \ln x + \cos x \cdot \dfrac{1}{x}\right) =$
$= x^{\cos x}\left(\dfrac{\cos x}{x} - \sin x \ln x\right) \cdot \cos\left(x^{\cos x}\right)$.

(c) Ha $\sin x > 0$, akkor $f(x) = (\sin x)^{\cos x} = e^{\ln(\sin x)^{\cos x}} = e^{\cos x \cdot \ln \sin x}$.
$f'(x) = \left(e^{\cos x \cdot \ln \sin x}\right)' = e^{\cos x \cdot \ln \sin x}\left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right) =$
$= (\sin x)^{\cos x} \cdot \left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln \sin x\right)$.

(d) Ha $x > 0$, akkor $f(x) = x^{\mathrm{arch} x} = e^{\ln x^{\mathrm{arch} x}} = e^{\mathrm{arch} x \cdot \ln x}$.
$f'(x) = \left(e^{\mathrm{arch} x \cdot \ln x}\right)' = e^{\mathrm{arch} x \cdot \ln x} \cdot \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \dfrac{\mathrm{arch} x}{x}\right) =$
$= x^{\mathrm{arch} x} \cdot \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \dfrac{\mathrm{arch} x}{x}\right)$.

(e) Ha $\sqrt{x} > 0$, akkor $f(x) = (\sqrt{x})^x = e^{\ln(\sqrt{x})^x} = e^{x \cdot \ln \sqrt{x}}$.
$f'(x) = \left(e^{x \cdot \ln \sqrt{x}}\right)' = e^{x \cdot \ln \sqrt{x}}\left(\ln \sqrt{x} + x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = (\sqrt{x})^x\left(\ln \sqrt{x} + \dfrac{1}{2}\right)$.

(f) Ha $x > 0$, akkor $f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x}$.
$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x}\right)' = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x}\left(-\dfrac{1}{x^2} \cdot \ln x + \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - \ln x)$.

(g) Ha $\cos x > 0$, akkor $f(x) = (\cos x)^{x^3} = e^{\ln(\cos x)^{x^3}} = e^{x^3 \cdot \ln \cos x}$.
$f'(x) = \left(e^{x^3 \cdot \ln \cos x}\right)' = e^{x^3 \cdot \ln \cos x}\left(3x^2 \cdot \ln \cos x + x^3 \cdot \dfrac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)\right) =$
$= (\cos x)^{x^3} \cdot \left(3x^2 \cdot \ln \cos x - x^3 \operatorname{tg} x\right)$.

5.3.2. Az $f(x)$ függvény deriváltja meghatározható az általános szabályok szerint, de egyszerűbb logaritmikus deriválásra áttérni. A derivált megadásához felhasználjuk, hogy

$$f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'.$$

Tehát:

$$\ln f(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + \ln \sin x + x \ln 2,$$

így

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 4} \cdot \sin x \cdot 2^x \cdot \left(\frac{x}{x^2 + 4} + \mathrm{ctg} x + \ln 2\right).$$

5.3.3. A derivált megadásához felhasználjuk, hogy

$$f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'.$$

Könnyen látható, hogy

$$\ln f(x) = \ln(x+1) + 2\ln(x+2) + 3\ln(x+3),$$

így

$$[\ln f(x)]' = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}.$$

Tehát:

$$f'(x) = (x+1)\cdot(x+2)^2\cdot(x+3)^3\cdot\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}\right).$$

5.3.4. A derivált megadásához itt is felhasználjuk, hogy

$$f'(x) = f(x)\cdot[\ln f(x)]'.$$

Könnyen adódik, hogy

$$\ln f(x) = \ln(1-x) + 2\ln(1-x^2) + 3\ln(1-x^3),$$

és

$$[\ln f(x)]' = \frac{1}{x-1} + \frac{4x}{x^2-1} + \frac{9x^2}{x^3-1}.$$

Tehát:

$$f'(x) = (1-x)\cdot(1-x^2)^2\cdot(1-x^3)^3\cdot\left(\frac{1}{x-1} + \frac{4x}{x^2-1} + \frac{9x^2}{x^3-1}\right).$$

5.3.5. A derivált megadásához itt is felhasználjuk, hogy

$$f'(x) = f(x)\cdot[\ln f(x)]'.$$

Könnyen adódik, hogy

$$\ln f(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln(2+x^2) + \frac{1}{3}\ln(3+x^3),$$

és

$$[\ln f(x)]' = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{2+x^2} + \frac{x^2}{3+x^3}.$$

Tehát:

$$f'(x) = (1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}\cdot\left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{2+x^2} + \frac{x^2}{3+x^3}\right).$$

5.3.6. Ha $f(x) = 2^x\cdot \operatorname{ch} x\cdot x^{\cos x}$ és $x>0$, akkor

$$\ln f(x) = x\ln 2 + \ln\operatorname{ch} x + \cos x\cdot\ln x.$$

Deriválva:

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \ln 2 + \frac{1}{\operatorname{ch} x}\cdot\operatorname{sh} x - \sin x\cdot\ln x + \frac{\cos x}{x},$$

azaz
$$f'(x) = 2^x \cdot \operatorname{ch} x \cdot x^{\cos x} \cdot \left(\ln 2 + \operatorname{th} x - \sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}\right).$$

5.3.7. Ha $f(x) = x^{\ln x}$ és $x > 0$, akkor
$$\ln f(x) = (\ln x)^2 .$$
Deriválva:
$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x},$$
azaz
$$f'(x) = 2x^{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x}.$$
Ha $x_0 = e^2$, akkor
$$y_0 = f(x_0) = f(e^2) = (e^2)^2 = e^4.$$
Az érintő meredeksége:
$$f'(e^2) = 4 \cdot (e^2)^2 \cdot \frac{1}{e^2} = 4e^2.$$
A P_0 pontbeli érintőegyenes egyenlete:
$$y = 4e^2(x - e^2) + e^4.$$

5.4.1. Implicit deriválással:
$$2x + 2yy' = 0,$$
azaz
$$2yy' = -2x.$$
Tehát:
$$y' = -\frac{x}{y}.$$

5.4.2. Implicit deriválással:
$$2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 2,$$
azaz
$$y'(2x - 2y) = 2 - 2x - 2y.$$
Tehát:
$$y' = \frac{1 - x - y}{x - y}.$$

5.4.3. Implicit deriválással:
$$y + xy' + 2yy' = 0,$$
azaz
$$y'(x + 2y) = -y.$$

Tehát:

$$y' = -\frac{y}{x+2y}.$$

5.4.4. Implicit deriválással:

$$(-\sin y)y' = 1,$$

azaz

$$y' = -\frac{1}{\sin y}.$$

5.4.5. Implicit deriválással:

$$2xy + x^2y' + 3y^3 + 3x \cdot 3y^2y' - 1 = 0,$$

azaz

$$y'(x^2 + 9xy^2) = 1 - 2xy - 3y^3.$$

Tehát:

$$y' = \frac{1 - 2xy - 3y^3}{x^2 + 9xy^2}.$$

5.4.6. Implicit deriválással:

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}y' = 0,$$

tehát a derivált:

$$y' = -\frac{y^2}{x^2}.$$

5.4.7. Implicit deriválással:

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 2yy'),$$

azaz

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{x + yy'}{x^2+y^2},$$

átrendezve az egyszerűsítés és a műveletek elvégzése után:

$$y'\frac{x-y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

Tehát:

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

5.4.8. Implicit deriválással:

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0,$$

azaz

$$y' \cdot (2y - x) = y - 2x,$$

tehát:

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - x}.$$

A $P(1,2)$ pontban az érintő meredeksége:

$$y'|_{P(1,2)} = 0.$$

Az érintő párhuzamos az x-tengellyel, egyenlete:

$$y = 2.$$

5.4.9. Implicit deriválással:

$$18x + 32yy' = 0,$$

tehát:

$$y' = -\frac{9x}{16y}.$$

A $9x - 8y = 1$ egyenes meredeksége $\frac{9}{8}$. Ahhoz, hogy az ellipszis érintője párhuzamos legyen a megadott egyenessel a

$$-\frac{9x}{16y} = \frac{9}{8}$$

egyenlőségnek kell teljesülnie, azaz

$$-x = 2y.$$

Ezt az összefüggést az ellipszis egyenletébe helyettesítve a

$$36y^2 + 16y^2 = 52$$

összefüggéshez jutunk, ahonnan

$$y^2 = 1,$$

azaz

$$y = \pm 1.$$

Az érintési pontok:

$$P_1(-2,1) \qquad \text{és} \qquad P_2(2,-1).$$

A P_1 pontba húzott érintő egyenlete:

$$y = \frac{9}{8} \cdot (x+2) + 1,$$

a P_2 pontba húzott érintő egyenlete pedig:

$$y = \frac{9}{8} \cdot (x-2) - 1.$$

5.4.10. Implicit deriválással:

$$2x + 2(xy' + y) - 6yy' = 0,$$

azaz

$$y' \cdot (2x - 6y) = -2x - 2y,$$

tehát:

$$y' = \frac{x + y}{3y - x}.$$

A $P(3,2)$ pontban az érintő meredeksége:

$$y'|_{P(3,2)} = \frac{5}{3}.$$

5.5.1. A Cauchy-féle középértéktétel feltételeinek teljesülést vizsgáljuk.

(a) Az $f_1(x)$ és $g_1(x)$ függvények $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén folytonosak, így a folytonosság $\forall x \in [1;4]$-re is fennáll. A deriváltak:

$$f_1'(x) = 2x - 2 \qquad \text{és} \qquad g_1'(x) = 3x^2 - 14x + 20$$

mindenütt léteznek és $g_1'(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, így alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel:

$$\frac{f_1(4) - f_1(1)}{g_1(4) - g_1(1)} = \frac{f_1'(\xi)}{g_1'(\xi)},$$

azaz

$$\frac{11 - 2}{27 - 9} = \frac{2\xi - 2}{3\xi^2 - 14\xi + 20}, \quad \xi \in (1;4).$$

Az egyenletet megoldva $\xi_1 = 2$ és $\xi_2 = 4$. A kapott értékek közül csak a $\xi_1 = 2$ belső pont.

(b) Nem teljesül valamennyi feltétel, mert $g_2(-3) = g_2(3)$.

(c) A tétel feltételei teljesülnek és $\xi = \dfrac{\pi}{4}$.

(d) A tétel feltételei teljesülnek és $\xi = \sqrt[3]{\left(\dfrac{15}{4}\right)^2} \approx 2,4$.

5.5.2. Az $f(x)$ függvény nyilvánvalóan mindenhol folytonos és differenciálható, továbbá

$$f(-1) = f(3) = 0.$$

A Rolle-tétel tehát alkalmazható. Az $f(x)$ függvény deriváltja:

$$f'(x) = 2x - 2.$$

Az $f'(\xi) = 0$ egyenlet:

$$2\xi - 2 = 0,$$

amelynek megoldása $\xi = 1$. A kapott érték benne van a megadott intervallumban, mert $-1 < 1 < 3$.

5.5.3. Könnyen látható, hogy $\xi = 3$, mert $f'(3) = 0$. A Rolle-tétel feltételei azonban nem teljesülnek, mert f nem differenciálható az $x = 2$ helyen.

5.5.4. $x_0 = 1$-nél szakadási pontja van az $f(x)$ függvénynek, tehát nem alkalmazható a Rolle-féle középértéktétel.

5.5.5. A Rolle-féle középértéktétel feltételeinek teljesülést vizsgáljuk.

(a) Az $f_1(x)$ függvény folytonos az $I_1 = [-1; 1]$ intervallumon és

$$f_1(-1) = f_1(1).$$

Tehát két feltétel teljesül. Az $f_1(x)$ függvény deriváltja:

$$f_1'(x) = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén létezik, vagyis a derivált $x_0 = 0$ esetén nem létezik. Mivel $x_0 = 0$ az I_1 intervallum belső pontja, így a Rolle-tétel harmadik feltétele nem teljesül.

(b) A Rolle-tétel minden feltétele teljesül és $\xi = \dfrac{\pi}{2}$.

(c) Nem teljesül a Rolle-tétel minden feltétele, mert $f_3'(0)$ nem létezik.

5.5.6. Vegyük észre, hogy $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6)$. Tehát $f(x) = x^2 - x - 6$, ha $x \neq 1$ és $x \in [-2; 3]$. Továbbá

$$f(x) = -6 = 1^2 - 1 - 6, \qquad \text{ha } x = 1.$$

Vagyis $f(x) = x^2 - x - 6$ a $[-2; 3]$ intervallumon. Továbbá

$$f(-2) = f(3) = 0.$$

Rolle-tétele alkalmazható, mert f folytonos a $[-2; 3]$ intervallumban és differenciálható a $(-2; 3)$ intervallumon.

$$f'(x) = 2x - 1.$$

$\xi = \dfrac{1}{2}$, mert $f'(\xi) = 0$. A kapott ξ érték -2 és 3 között van.

5.5.7. Az $f(x)$ függvény differenciálható a $(0; 8)$ intervallumban, de az $x_0 = 0$ helyen nem. Az $f(x)$ függvény folytonos $x_0 = 0$ esetén, valamint a teljes $[0; 8]$ intervallumon is. Továbbá

$$f(0) = f(8) = 0,$$

tehát alkalmazható a Rolle-tétel. Könnyen látható, hogy $\xi = 1$, ami belső pontja a $[0; 8]$ intervallunak.

5.5.8. Az $f(x)$ függvény nem differenciálható az $x_0 = 1$ helyen, így Rolle-tétele nem alkalmazható.

5.5.9. Legyen $f(x)=\frac{1}{2}-\left|x-\frac{1}{2}\right|$. Ekkor $f(0)=f(1)=0$, de $f'(x)\neq 0$, ha $x\in(0;1)$. A Rolle-tétel tehát nem alklmazható, mert $f(x)$ nem differenciálható az $x_0=\frac{1}{2}$ helyen.

5.5.10. Az $f(x)$ folytonos a $[-2;0]$ intervallumon, $f'(x)$ létezik és véges az adott intervallum minden belső pontjában. A ξ értéke a Lagrange-tételben szereplő formulából kiszámítható:

$$f'(\xi)=6\xi=\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{-5-7}{2}=-6,$$

amiből $\xi=-1$ adódik, ami belső pontja $[-2;0]$ intervallumnak.

5.5.11. Lagrange-tétele alkalmazható, továbbá $f'(x)=6x-5$. Továbbá

$$f'(\xi)=6\xi-5=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{51-3}{3}=16,$$

amiből $\xi=\frac{7}{2}$, ami 2 és 5 közötti érték.

5.5.12. Az $f(x)$ folytonos, differenciálható és nem nulla az $[1;3]$ intervallumon, tehát alkalmazható Lagrange-tétele. A függvény deriváltja:

$$f'(x)=\frac{x-4-(x+3)}{(x-4)^2}=-\frac{7}{(x-4)^2}.$$

ξ értéke a tételben szereplő formulából kiszámítható:

$$f'(\xi)=-\frac{7}{(\xi-4)^2}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=-\frac{7}{3},$$

amiből $\xi_{1,2}=4\pm\sqrt{3}$ adódik. A $\xi_1=4-\sqrt{3}$ belső pontja az $[1;3]$ intervallumnak, viszont $\xi_2=4+\sqrt{3}$ nem belső pont.

5.5.13. A $\xi=2$ abszcisszájú pontban lesz az érintő párhuzamos a $P_1(0,3)$ és a $P_2(4,-5)$ koordinátájú pontokat összekötő szelővel. A keresett pont tehát a $P(2,3)$.

5.5.14. $\xi=\frac{19}{6}$.

5.5.15. A Lagrange-tétel feltételei mindhárom esetben teljesülnek.

(a) $\xi=e-1$;

(b) $\xi=\sqrt{\frac{\pi}{4}-1}$;

(c) $\xi=\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}$.

5.5.16. Az $f(x) = |x|$ függvény folytonos a$[-1;1]$ intervallumon, de az $x_0 = 0$ helyen nem differenciálható, így nem alkalmazható rá a Lagrange-féle középértéktétel.

5.5.17. Az $f(x) = \mathrm{tg}x$ függvényre alkalmazható a Lagrange-tétel a $[0;x]$ intervallumon $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Emiatt van olyan ξ érték 0 és x között, amelyre

$$f'(\xi) = \frac{1}{\cos^2\xi} = \frac{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}0}{x-0} = \frac{\mathrm{tg}x}{x}.$$

Mivel $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$, így $0 < \cos\xi < 1$, amiből pedig

$$\frac{1}{\cos^2\xi} > 1$$

adódik. Tehát

$$\frac{\mathrm{tg}x}{x} > 1,$$

azaz

$$\mathrm{tg}x > x$$

teljesül a vizsgált intervallumon.

5.6.1. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. A függvények hányadosára vonatkozó deriválási szabályt használjuk a második derivált meghatározásához:

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{(x^3+1)^3}}.$$

5.6.2. $f'(x) = \ln x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x}$, $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}$, és

$$f^{(5)}(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

5.6.3. $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, és ez a négy függvény ismétlődik ciklikusan. Tehát

$$f^{(100)}(x) = \sin x.$$

5.6.4. $f'(x) = 9x^2 - 5$, $f''(x) = 18x$, $f'''(x) = 18$, és $f^{(n)}(x) = 0$, ha $n \geq 4$.

5.6.5. $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(x+5)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}\cdot(x+5)^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8}\cdot(x+5)^{-\frac{5}{2}}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}\cdot(x+5)^{-\frac{7}{2}}$.

Az alábbi sejtés alakítható ki:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n}(x+5)^{-\frac{2n-1}{2}}, \qquad \text{ha} \quad n \geq 2.$$

Teljes indukcióval bizonyítjuk.

(1) $n = 2$ esetén:
$$f''(x) = (-1)^3 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot (x+5)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot (x+5)^{-\frac{3}{2}}.$$
Az állítás igaz $n = 2$-re.

(2) Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ esetén igaz az állítás, azaz
$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-3)}{2^k}(x+5)^{-\frac{2k-1}{2}}.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ esetén. Igazoljuk, hogy
$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-1)}{2^{k+1}}(x+5)^{-\frac{2k+1}{2}}.$$
Alkalmazzuk az indukciós feltételt:
$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^{k+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-3)}{2^k}(x+5)^{-\frac{2k-1}{2}}\right)' =$$
$$= (-1)^{k+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-3)}{2^k}\left((x+5)^{-\frac{2k-1}{2}}\right)' =$$
$$= (-1)^{k+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-3)}{2^k} \cdot \left(-\frac{2k-1}{2}\right)(x+5)^{-\frac{2k-1}{2}-1} =$$
$$(-1)^{k+2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-1)}{2^{k+1}}(x+5)^{-\frac{2k+1}{2}}.$$
Az állítás tehát igaz.

5.6.6. $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+3)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(x+3)^3}$, $f'''(x) = -\dfrac{6}{(x+3)^4}$.

Az alábbi sejtés alakítható ki:
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{(x+3)^{n+1}}, \qquad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N}.$$
Teljes indukcióval bizonyítjuk.

(1) $n = 1$ esetén:
$$f'(x) = (-1) \cdot 1! \cdot \frac{1}{(x+3)^2} = -\frac{1}{(x+3)^2}.$$
Az állítás igaz $n = 1$-re.

(2) Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás, azaz
$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot \frac{1}{(x+3)^{k+1}}.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$ esetén. Igazoljuk, hogy

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot \frac{1}{(x+3)^{k+2}}.$$

Alkalmazzuk az indukciós feltételt:

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k \cdot k! \cdot \frac{1}{(x+3)^{k+1}}\right)' = (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot \frac{1}{(x+3)^{k+2}}.$$

Az állítás tehát igaz.

5.6.7. $f'(x) = \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$, $f'''(x) = -\dfrac{12}{(x-1)^4}$.

Az alábbi sejtés alakítható ki:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{2}{(x-1)^{n+1}}, \qquad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teljes indukcióval bizonyítjuk.

(1) $n = 1$ esetén:

$$f'(x) = (-1) \cdot 1! \cdot \frac{2}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Az állítás igaz $n = 1$-re.

(2) Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás, azaz

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot \frac{2}{(x-1)^{k+1}}.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$ esetén. Igazoljuk, hogy

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot \frac{2}{(x-1)^{k+2}}.$$

Alkalmazzuk az indukciós feltételt:

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k \cdot k! \cdot \frac{2}{(x-1)^{k+1}}\right)' = (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot \frac{2}{(x-1)^{k+2}}.$$

Az állítás tehát igaz.

5.6.8. Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást.

(1) $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2$, $f''(x) = 6x \ln x + 5x$, $f'''(x) = 6 \ln x + 11$. Tehát $n = 4$ esetén:

$$f^{(4)}(x) = \frac{6}{x} = (-1)^4 \cdot 6 \cdot 0! \cdot x^{3-4}.$$

Az állítás igaz $n = 4$-re.

(2) Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$ esetén igaz az állítás, azaz

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot 6 \cdot (k-4)! \cdot x^{3-k}.$$

(3) Bizonyítunk $(k+1) \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$ esetén. Igazoljuk, hogy

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot 6 \cdot (k-3)! \cdot x^{2-k}.$$

Alkalmazzuk az indukciós feltételt:

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k \cdot 6 \cdot (k-4)! \cdot x^{3-k}\right)' = (-1)^{k+1} \cdot 6 \cdot (k-3)! \cdot x^{2-k}.$$

Az állítás tehát igaz.

5.6.9. $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$; $f'(x) = e^{-x} \cdot \cos x - e^{-x} \cdot \sin x$ és $f''(x) = -2e^{-x} \cdot \cos x$, így

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = -2e^{-x} \cdot \cos x + 2e^{-x} \cdot \cos x - 2e^{-x} \cdot \sin x + 2e^{-x} \cdot \sin x = 0.$$

Az állítás tehát igaz.

5.6.10. $f(x) = 2x - \dfrac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = 2x - 2 \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right)^{-1}$, és

$$f'(x) = 2 + 2 \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}\right)^2} =$$

$$= 2 + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2} \cdot \left(1 + 2\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}\right)} = 2 + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = 2 + \frac{1}{1 + \sin x}.$$

Emiatt

$$f''(x) = \left(2 + \frac{1}{1 + \sin x}\right)' = -\frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}.$$

Így

$$\cos x + f''(x) \cdot (1 + \sin x)^2 = \cos x - \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} \cdot (1 + \sin x)^2 = 0.$$

Az állítás tehát igaz.

5.6.11. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Innen adódik, hogy $x \cdot f'(x) = 1$. Ha ezt $(n-1)$-szer deriváljuk $(n \geq 2)$, akkor a Leibniz-formula szerint

$$x \cdot f^{(n)}(x) + (n-1) \cdot f^{(n-1)}(x) = 0$$

adódik, amiből átrendezéssel a bizonyítandó rekurzív összefüggést kapjuk.

5.6.12. $x^3 - y^3 = 1$, így $3x^2 - 3y^2 y' = 0$, azaz

$$y' = \frac{x^2}{y^2}.$$

A függvények hányadosára vonatkozó deriválási szabály alapján:

$$y'' = \frac{2xy^2 - 2x^2yy'}{y^4} = \frac{2xy^2 - 2x^2y \cdot \dfrac{x^2}{y^2}}{y^4} = \frac{2xy^3 - 2x^4}{y^5} = \frac{2x(y^3 - x^3)}{y^5} = -\frac{2x}{y^5}.$$

5.6.13. $xy + y^2 = 1$, így implicit deriválással adódik, hogy $xy' + y + 2yy' = 0$, tehát

$$y' = -\frac{y}{x+2y}.$$

A függvények hányadosára vonatkozó deriválási szabály alapján:

$$y'' = -\frac{(x+2y)y' - y(1+2y')}{(x+2y)^2} = -\frac{xy' - y}{(x+2y)^2} = -\frac{x\left(-\dfrac{y}{x+2y}\right) - y}{(x+2y)^2} = -\frac{-xy - y(x+2y)}{(x+2y)^3} =$$

$$= \frac{2xy + 2y^3}{(x+2y)^3} = \frac{2(xy + y^2)}{(x+2y)^3} = \frac{2}{(x+2y)^3}.$$

5.6.14. $x^2 - xy + y^2 = 3$, így implicit deriválással adódik, hogy $2x - y - xy' + 2yy' = 0$, tehát

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - x}.$$

A függvények hányadosára vonatkozó deriválási szabály alapján:

$$y'' = \frac{(y'-2)(2y-x) - (y-2x)(2y'-1)}{(2y-x)^2} = \frac{3xy' - 3y}{(2y-x)^2} = \frac{3x \cdot \dfrac{y-2x}{2y-x} - 3y}{(2y-x)^2} = \frac{-6 \cdot (x^2 - xy + y^2)}{(2y-x)^3}.$$

Felhasználva, hogy $x^2 - xy + y^2 = 3$ adódik, hogy

$$y'' = -\frac{18}{(2y-x)^3}.$$

5.7.1. $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{x^4}$ és $f^{(5)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$. Így

$$f(1) = \ln 1 = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -1, \quad f'''(1) = 2, \quad f^{(4)}(1) = -6, \quad f^{(5)}(1) = 24.$$

A keresett ötödfokú Taylor-polinom:

$$T_5(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}.$$

5.7.2. $f(x) = e^x$ és $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $f^{(n)}(x) = e^x$. Így

$$f(2) = f^{(n)}(2) = e^2.$$

A keresett negyedfokú Taylor-polinom:

$$T_4(x) = e^2 \cdot \left(\frac{x-2}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \frac{(x-2)^4}{4!} \right).$$

5.7.3. Ha $f(x) = \sin x$, akkor $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A keresett harmadfokú Taylor-polinom:

$$T_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \right].$$

5.7.4. Ha $f(x) = \frac{1}{x}$ és $x_0 = 1$, akkor

$$T_4(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4.$$

5.7.5. Ha $f(x) = \ln(1-x)$, akkor $f(0) = 0$ és

$$f'(0) = -1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = -1 \cdot 2, \quad f^{(4)}(0) = -1 \cdot 2 \cdot 3.$$

A keresett negyedfokú Maclaurin-polinom:

$$M_4(x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

5.7.6.

(a) Az $f_1(x) = \cos x$ negyedfokú Maclaurin-polinomja:

$$M_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

(b) Az $f_2(x) = \operatorname{ch} x$ negyedfokú Maclaurin-polinomja:

$$M_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

(c) Az $f_3(x) = \frac{1}{1+x}$ negyedfokú Maclaurin polinomja:

$$M_4(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

(d) Az $f_4(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ negyedfokú Maclaurin polinomja:

$$M_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}.$$

(e) Az $f_5(x) = e^{\cos x}$ negyedfokú Maclaurin polinomja:

$$M_4(x) = e \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}\right).$$

(f) Az $f_6(x) = \ln(1+x)$ negyedfokú Maclaurin polinomja:

$$M_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

5.7.7.

(a) Az $f_1(x) = \sin x$ ötödfokú Maclaurin-polinomja:

$$M_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

(b) Az $f_2(x) = \operatorname{tg} x$ ötödfokú Maclaurin-polinomja:

$$M_5(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}.$$

(c) Az $f_3(x) = \operatorname{arctg} x$ ötödfokú Maclaurin polinomja:

$$M_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.$$

(d) Az $f_4(x) = \arcsin x$ ötödfokú Maclaurin polinomja:

$$M_5(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}.$$

5.7.8. Az $f(x) = e^{2x}$ másodfokú Maclaurin-polinomja:

$$M_2(x) = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!}.$$

Most $x = 0,01$, tehát

$$e^{0,02} \approx 1 + 0,02 + 0,0002,$$

azaz

$$e^{0,02} \approx 1,0202.$$

5.7.9. Az $f(x) = \cos x$ negyedfokú Maclaurin-polinomja:

$$M_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Most $x = -1$, tehát

$$\cos(-1) \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24},$$

azaz

$$\cos(-1) \approx \frac{13}{24} = 0,5417.$$

5.8.1.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin 3x)'}{(\sin 5x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\cdot\cos 3x}{5\cdot\cos 5x} = \dfrac{3}{5}.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin 2x)'}{(\operatorname{tg} 3x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cdot\cos 2x}{\dfrac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3} = \dfrac{2}{3}.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x^2} = 1.$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{6x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{6} = \dfrac{1}{6}.$

(e) $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{\sin(\ln x)}{\ln x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1+0} \cos(\ln x) = 1.$

(f) $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{\ln(x-1)^2}{x-2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2} = 2.$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x + \sin x}{2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x + \cos x}{2} = 1.$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2.$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1.$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1.$

(k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x - \dfrac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}{\dfrac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{x\to 1} \left(6x\sqrt[3]{x^2} - 1\right) = 5.$

(l) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-x-12}{x-4} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 4} (2x-1) = 7.$

5.8.2.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln 5x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x)'}{(\ln 5x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{5x}\cdot 5} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty.$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-1}{e^{x^2}-1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{2x\cdot e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^{x^2}} = 0.$

(c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}}{\cos^2 x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \dfrac{1}{-\sin 2x} = +\infty.$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{3x^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{6x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{6} = +\infty.$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

(f) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{-\sin^2 x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0+0} (-2\sin x\cos x) = 0.$

5.8.3.

(a) $\lim\limits_{x\to 0+0} 2x\operatorname{ctg} 7x = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{2x}{\operatorname{tg} 7x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{(2x)'}{(\operatorname{tg} 7x)'} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{2}{\dfrac{1}{\cos^2 7x}\cdot 7} = \dfrac{2}{7}.$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = (\infty\cdot 0) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \cos\dfrac{1}{x} = 1.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0+0} 2x\ln^2 x = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{2\ln^2 x}{\dfrac{1}{x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{-4\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0+0} 4x = 0.$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\dfrac{x-1}{x+1} = (\infty\cdot 0) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{1}{x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2}{x^2-1} = -2.$

(e) $\lim\limits_{x\to\pi-0} (\pi-x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to\pi-0} \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\dfrac{1}{\pi-x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\pi-0} \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{(\pi-x)^2}} = \lim\limits_{x\to\pi-0} \dfrac{(\pi-x)^2}{2\cos^2\frac{x}{2}} =$

$= \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to\pi-0} \dfrac{\pi-x}{\sin x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to\pi-0} \dfrac{-1}{\cos x} = 1.$

(f) $$\lim_{x\to 0+0} (\ln x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+0} \frac{-2\sin^2\frac{\pi}{2}x}{\pi x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{-4\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{\pi} = \lim_{x\to 0+0} (-\sin\pi x) = 0.$$

5.8.4.

(a) $$\lim_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to 0+0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0+0} \frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1} =$$
$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0+0} \frac{e^x}{2e^x+xe^x} = \frac{1}{2}.$$

(b) $$\lim_{x\to 1+0} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2-x-\ln x}{(x-1)\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1+0} \frac{2x-1-\frac{1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}} =$$
$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1+0} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 1+0} \frac{2x^2+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

(c) $$\lim_{x\to 0+0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right) = \frac{1}{2}.$$

(d) $$\lim_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) = 0.$$

(e) $$\lim_{x\to 1+0} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \frac{1}{2}.$$

(f) $$\lim_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \frac{1}{2}.$$

5.8.5.

(a) $$\lim_{x\to 0+0} x^{\frac{2}{1+10\ln x}} = (0^0) = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln x^{\frac{2}{1+10\ln x}}} = \lim_{x\to 0+0} e^{\frac{2}{1+10\ln x}\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{2\ln x}{1+10\ln x}}.$$

A kitevőben lévő határérték:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{2\ln x}{1+10\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+0} \frac{2\cdot\frac{1}{x}}{10\cdot\frac{1}{x}} = \frac{1}{5}.$$

A keresett határérték: $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{2}{1+10\ln x}} = e^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{e}.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\sin x)^x = (0^0) = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{\ln(\sin x)^x} = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\cdot\ln(\sin x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln(\sin x)}$.

A kitevőben lévő határérték:

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln(\sin x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{-x^2}{\operatorname{tg} x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0+0} (-2x)\cdot\cos^2 x = 0.$$

A keresett határérték: $\lim\limits_{x\to 0+0} (\sin x)^x = e^0 = 1$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = 1$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0+0} (e^x - 1)^{\operatorname{tg} x} = 1$.

(e) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)^{\sin x} = 1$.

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}} = 1$.

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = (\infty^0) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(e^x+x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}}$.

A kitevőben lévő határérték:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

A keresett határérték: $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$.

(h) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{e}$.

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{2x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} 2x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$.

A kitevőben lévő határérték:

$$\lim_{x\to +\infty} 2x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{6x}{x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{6}{1} = 6.$$

A keresett határérték: $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x} = e^6$.

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

(k) $\lim\limits_{x\to0+0}\left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{6}.$

(l) $\lim\limits_{x\to0+0}(1+\mathrm{tg}^2\,x)^{\mathrm{ctg}^2\,x}=e.$

(m) $\lim\limits_{x\to0+0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1.$

(n) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}.$

5.9.1. A lokális szélsőértékek kiszámításához számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x)=5x^4-40x=5x\cdot(x^3-8)\qquad\text{és}\qquad f''(x)=20x^3-40.$$

A stacionárius helyek az $f'(x)=5x\cdot(x^3-8)=0$ egyenlet megoldásai. Azaz

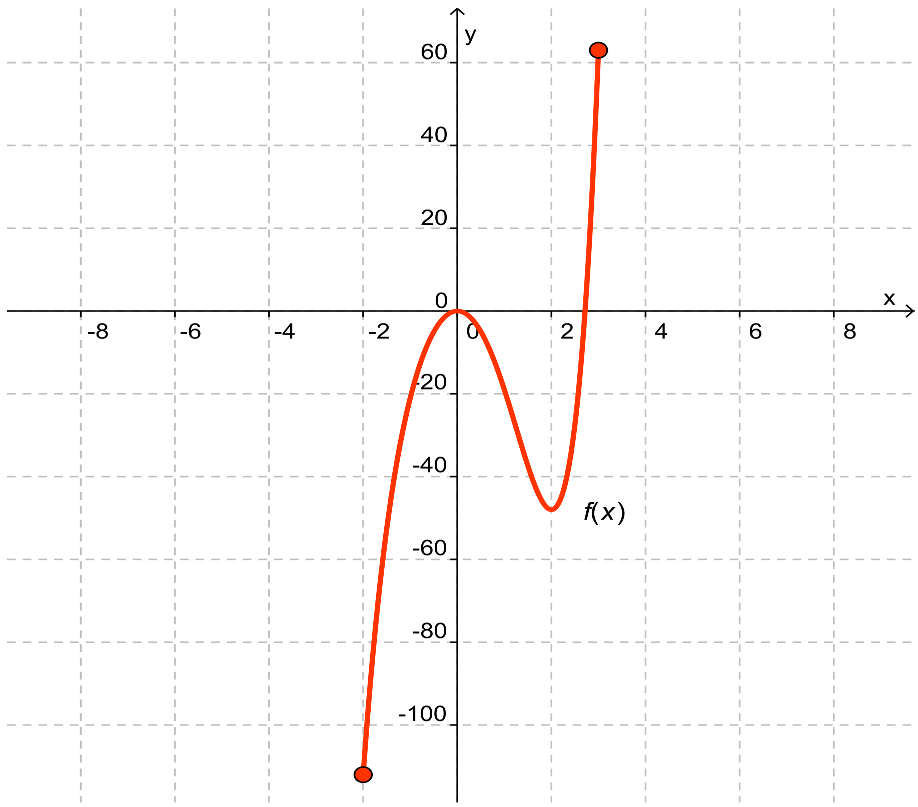
$$x_1=0\qquad\text{és}\qquad x_2=2.$$

Mivel $f''(0)=-40<0$, ezért f-nek az $x_1=0$ helyen lokális maximuma van és

$$P_{max}(0,0).$$

Továbbá $f''(2)=120>0$, ezért f-nek az $x_2=2$ helyen lokális minimuma van és

$$P_{min}(2,-48).$$



A függvény a $[-2, 3]$ intervallumon folytonos. A legkisebb függvényértéket (globális minimumot) az értelmezési tartomány bal oldali végpontjában veszi fel a függvény:

$$f_{min}(x) = f(-2) = -112.$$

A legnagyobb függvényértéket (globális maximumot) az értelmezési tartomány jobb oldali végpontjában veszi fel a függvény:

$$f_{max}(x) = f(3) = 63.$$

5.9.2. A kérdések megválaszolásához számoljuk ki az első, a második és a harmadik deriváltat!

$$f'(x) = 9x^2 - 4x^3, \qquad f''(x) = 18x - 12x^2, \qquad f'''(x) = 18 - 24x.$$

(a) Könnyen látható, hogy

$$f'(0) = f''(0) = 0 \qquad \text{és} \qquad f'''(0) = 18 \neq 0,$$

tehát az $x = 0$ helyen inflexiós pontja van az f függvénynek, vagyis az állítás nem igaz.

(b) Az $f''(x) = 0$ egyenletből:

$$x_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad x_2 = \frac{3}{2}.$$

Ha $x_1 < x < x_2$, akkor $f''(x) > 0$, azaz a függvény konvex. Mivel

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset \left[0, \frac{3}{2}\right],$$

ezért az állítás igaz.

5.9.3. $f(x) = x^4 - x^2$ és $x \in \mathbb{R}$. Nyilvánvaló, hogy f páros függvény.

(a) A zérushelyek az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásai.

$$f(x) = x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1) = 0,$$

azaz három zérushelye van a függvénynek:

$$x_1 = 0 \ (2) \qquad x_2 = 1 \ (1) \qquad x_3 = -1 \ (1).$$

A zárójelben lévő szám a gyök multiplicitását mutatja.

(b) Számoljuk ki az első, a második és a harmadik deriváltat!

$$f'(x) = 4x^3 - 2x, \qquad f''(x) = 12x^2 - 2, \qquad f'''(x) = 24x.$$

A stacionárius helyek az

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1) = 0$$

egyenlet megoldásai. Azaz

$$x_1 = 0, \qquad x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad x_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mivel $f''(x_1) = f''(0) = -2 < 0$, ezért f-nek az $x_1 = 0$ helyen lokális maximuma van és

$$P_{max}(0,0).$$

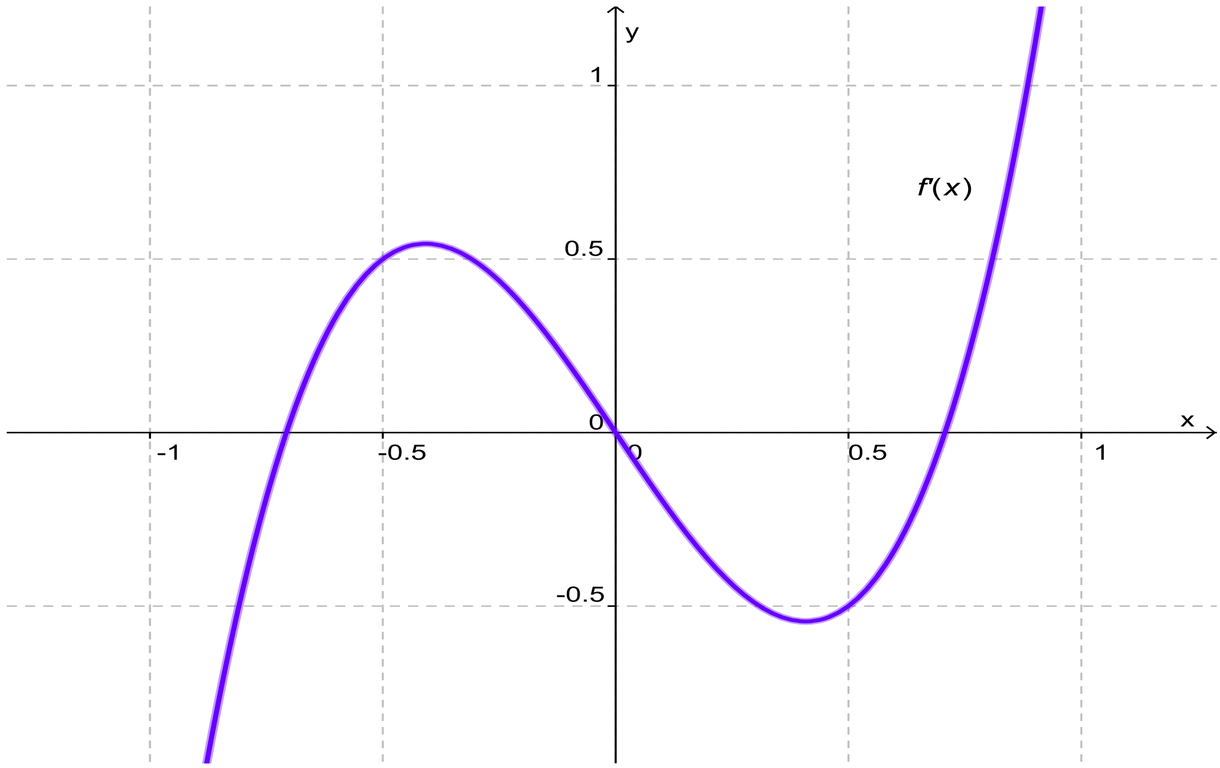
Továbbá a függvény párossága miatt

$$f''(x_4) = f''(x_5) = f''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 > 0,$$

ezért f-nek az x_4 és x_5 helyeken lokális minimuma van:

$$P_{min_1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right) \qquad \text{és} \qquad P_{min_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right).$$

(c) A monotonitás vizsgálatához tekintsük az $f'(x)$ függvény grafikonját!



Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $f'(x) < 0$, azaz

$$x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{vagy} \qquad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Továbbá az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha $f'(x) > 0$, azaz

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0 \qquad \text{vagy} \qquad x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(d) Az inflexiós pont(ok) első koordinátája az $f''(x) = 0$ egyenletből adódik:

$$x_6 = -\frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \text{és} \qquad x_7 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Mivel $f'''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \pm\frac{24}{\sqrt{6}} \neq 0$, így a függvénynek két inflexiós pontja van:

$$P_{infl_1}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{5}{36}\right) \qquad \text{és} \qquad P_{infl_2}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{5}{36}\right).$$

(e) Az f függvény konvex, ha $f''(x) > 0$, azaz

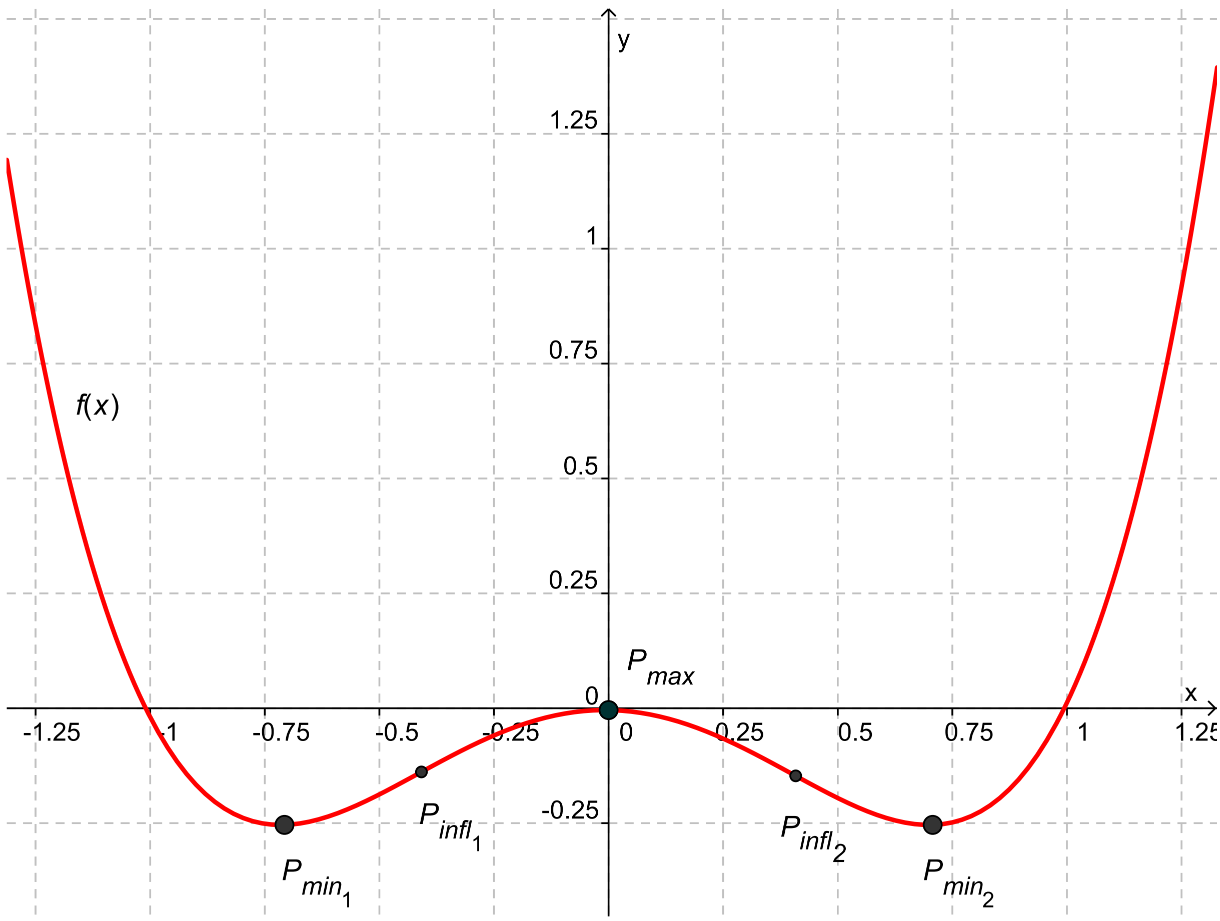
$$x < -\frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \text{vagy} \qquad x > \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Továbbá az f függvény konkáv, ha $f''(x) < 0$, azaz

$$-\frac{1}{\sqrt{6}} < x < \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

(g) A függvény grafikonja:



5.9.4. $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^3}{3}$ és $x \in \mathbb{R}$.

(a) A zérushelyek az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásai.

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} = x^3\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) = 0,$$

azaz két zérushelye van a függvénynek:

$$x_1 = 0\ (3) \qquad x_2 = \frac{2}{3}\ (1).$$

A zárójelben lévő szám a gyök multiplicitását mutatja.

(b) Számoljuk ki az első, a második és a harmadik deriváltat!

$$f'(x) = 2x^3 - x^2, \qquad f''(x) = 6x^2 - 2x, \qquad f'''(x) = 12x - 2.$$

A stacionárius helyek az

$$f'(x) = 2x^3 - x^2 = x^2(2x-1) = 0$$

egyenlet megoldásai. Azaz

$$x_1 = 0, \qquad x_3 = \frac{1}{2}.$$

Mivel $f''(x_1) = f''(0) = 0$, ezért f-nek az $x_1 = 0$ helyen nincs lokális szélsőértéke. Továbbá

$$f''(x_3) = f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0,$$

ezért f-nek az x_3 helyen lokális minimuma van:

$$P_{min}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{96}\right).$$

(c) Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $f'(x) < 0$, azaz $x < \frac{1}{2}$, ill. az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha $f'(x) > 0$, azaz $x > \frac{1}{2}$.

(d) Az inflexiós pont(ok) első koordinátája az $f''(x) = 0$ egyenletből adódik:

$$x_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad x_4 = \frac{1}{3}.$$

Mivel $f'''(0) = -2 \neq 0$ és $f'''\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \neq 0$, így a függvénynek két inflexiós pontja van:

$$P_{infl_1}(0,0) \qquad \text{és} \qquad P_{infl_2}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{162}\right).$$

(e) Az f függvény konvex, ha $f''(x) > 0$, azaz

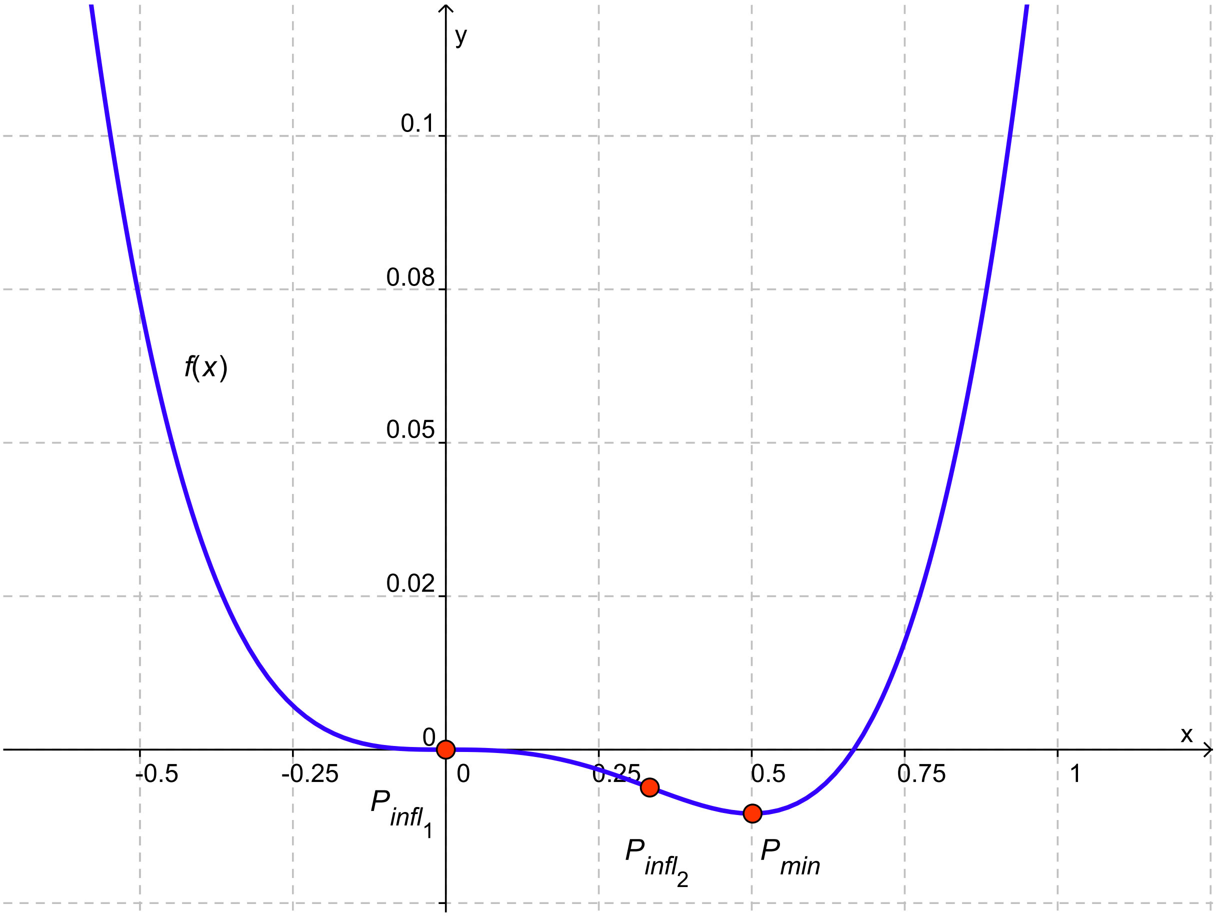
$$x < 0 \qquad \text{vagy} \qquad x > \frac{1}{3},$$

míg az f függvény konkáv, ha $f''(x) < 0$, azaz

$$0 < x < \frac{1}{3}.$$

(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$

(g) A függvény grafikonja:



5.9.5. $f(x) = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$ és $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) A zérushely az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásakor adódik.

$$f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x} = \frac{4x^3 + 1}{x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4x^3 = -1,$$

azaz

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

(b) Számoljuk ki az első, a második és a harmadik deriváltat!

$$f'(x) = 8x - \frac{1}{x^2}, \qquad f''(x) = 8 + \frac{2}{x^3}, \qquad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

A stacionárius hely(ek) az

$$f'(x) = 8x - \frac{1}{x^2} = \frac{8x^3 - 1}{x^2} = 0$$

egyenlet megoldásai. Az f függvénynek egyetlen stacionárius helye van:

$$x_2 = \frac{1}{2}.$$

Mivel

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{1}{2}\right) = 24 > 0,$$

ezért f-nek az x_2 helyen lokális minimuma van:

$$P_{min}\left(\frac{1}{2}, 3\right).$$

Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $f'(x) < 0$, azaz ha $x < 0$, ill. ha $0 < x < \frac{1}{2}$. Az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha $f'(x) > 0$, azaz ha $x > \frac{1}{2}$.

(c) Az inflexiós pont(ok) első koordinátája az $f''(x) = 0$ egyenletből adódik:

$$f''(x) = 8 + \frac{2}{x^3} = \frac{8x^3 + 2}{x^3} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4x^3 = -1,$$

azaz

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Mivel $f'''(x_1) = f'''\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) =\neq 0$, így a függvénynek inflexiós pontja van az x_1 helyen:

$$P_{infl}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 0\right).$$

Jól látható, hogy az inflexiós pont az x-tengelyen van. Az f függvény konvex, ha $f''(x) > 0$, azaz

$$x < -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \qquad \text{vagy} \qquad x > 0,$$

míg az f függvény konkáv, ha $f''(x) < 0$, azaz ha

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{4}} < x < 0.$$

(d) f áltört függvény, így

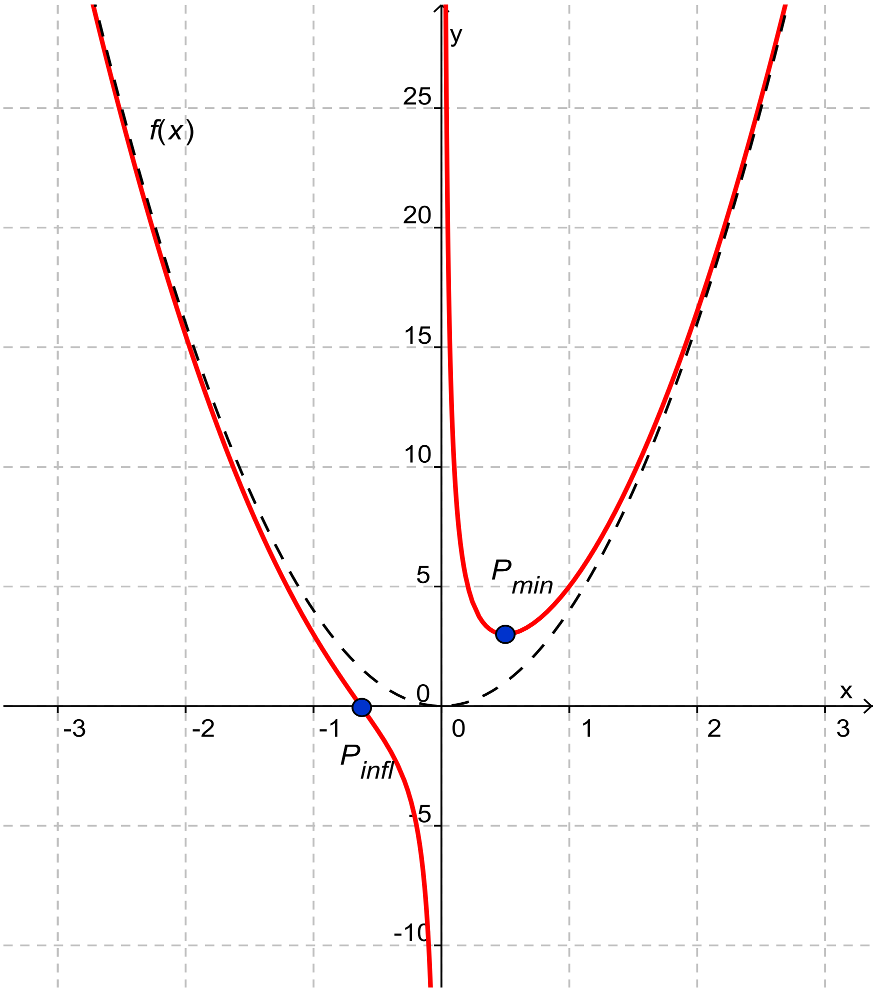
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 4x^2 = +\infty.$$

Továbbá

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty.$$

Az $x_3 = 0$ helyen f-nek pólusa van.

(e) A függvény grafikonja:



5.9.6. $f(x) = \dfrac{3x^2+2}{x^2+2}$, $D_f = \mathbb{R}$. A függvény páros.

(a) Zérushely nincs.

(b) Számoljuk ki az első, a második és a harmadik deriváltat!

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{16-24x^2}{(x^2+2)^3}, \qquad f'''(x) = \frac{96x^3-192x}{(x^2+2)^4}.$$

A stacionárius hely(ek) az
$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+2)^2} = 0$$
egyenlet megoldásai. Az f függvénynek egyetlen stacionárius helye van:
$$x_1 = 0.$$
Mivel
$$f''(x_1) = f''(0) = 2 > 0,$$
ezért f-nek az $x_1 = 0$ helyen lokális minimuma van:
$$P_{min}(0,1).$$

(c) Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $f'(x) < 0$, azaz ha $x < 0$, ill. az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha $f'(x) > 0$, azaz ha $x > 0$.

(d) Inflexiós pont ott lehet, ahol
$$f''(x) = \frac{16 - 24x^2}{(x^2+2)^3} = 0,$$
azaz
$$x^2 = \frac{2}{3},$$
vagyis:
$$x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \text{és} \qquad x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$
Mivel
$$f'''\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \neq 0,$$
így a függvénynek két inflexiós pontja van:
$$P_{infl_1}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{3}{2}\right) \qquad \text{és} \qquad P_{infl_2}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{3}{2}\right).$$

(e) Az f függvény konvex, ha $f''(x) > 0$, azaz
$$-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}},$$
míg az f függvény konkáv, ha $f''(x) < 0$, azaz ha
$$x < -\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \text{vagy} \qquad x > \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(f) f áltört függvény és

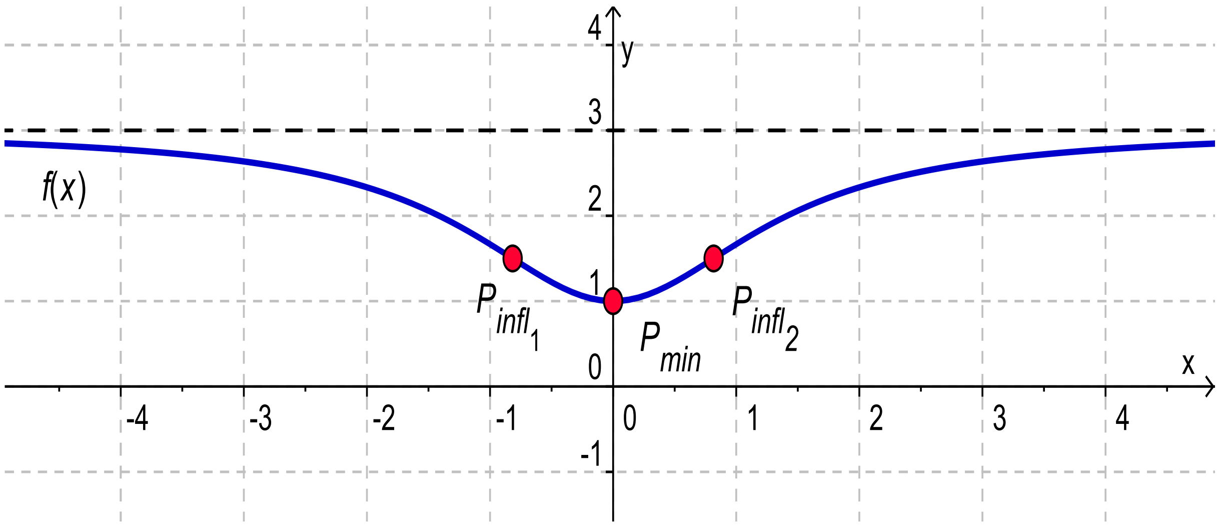
$$f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2+2} = 3 - \frac{4}{x^2+2},$$

azaz

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3.$$

(g) $R_f = [1,3]$.

(h) A függvény grafikonja:



5.9.7. $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{1+x}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{(1+x)^2} = \frac{x^2-4x-2}{x^2(1+x)^2} = \frac{\left[x-(2+\sqrt{6})\right]\cdot\left[x-(2-\sqrt{6})\right]}{x^2(1+x)^2}.$$

A monotonitás vizsgálatánál figyelembe vesszük, hogy $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$. Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $f'(x) < 0$, azaz ha

$$f'(x) = \frac{\left[x-(2+\sqrt{6})\right]\cdot\left[x-(2-\sqrt{6})\right]}{x^2(1+x)^2} < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[x-(2+\sqrt{6})\right]\cdot\left[x-(2-\sqrt{6})\right] < 0,$$

vagyis ha

$$2-\sqrt{6} < x < 0 \qquad \text{vagy} \qquad 0 < x < 2+\sqrt{6}.$$

Az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha $f'(x) > 0$, azaz ha

$$f'(x) = \frac{\left[x-(2+\sqrt{6})\right]\cdot\left[x-(2-\sqrt{6})\right]}{x^2(1+x)^2} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[x-(2+\sqrt{6})\right]\cdot\left[x-(2-\sqrt{6})\right] > 0,$$

vagyis ha

$$x < -1 \qquad \text{vagy} \qquad -1 < x < 2-\sqrt{6} \qquad \text{vagy} \qquad x > 2+\sqrt{6}.$$

5.9.8. $f(x) = \dfrac{3x}{(x-1)^2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(a) Zérushely: $x_1 = 0$ (1). A zárójelben lévő szám a multiplicitást mutatja.

(b) Számoljuk ki az első, a második és a harmadik deriváltat!

$$f'(x) = \frac{-3x-3}{(x-1)^3}, \qquad f''(x) = \frac{6x+12}{(x-1)^4}, \qquad f'''(x) = \frac{-18x-54}{(x-1)^5}.$$

A stacionárius helyek az

$$f'(x) = \frac{-3x-3}{(x-1)^3} = 0$$

egyenlet megoldásakor adódnak. Az f függvénynek egyetlen stacionárius helye van:

$$x_2 = -1.$$

Mivel

$$f''(x_2) = f''(-1) = \frac{3}{8} > 0,$$

ezért f-nek az $x_2 = -1$ helyen lokális minimuma van:

$$P_{min}\left(-1, -\frac{3}{4}\right).$$

(c) Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $f'(x) < 0$, azaz ha

$$x < -1 \qquad \text{vagy} \qquad x > 1.$$

Az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha $f'(x) > 0$, azaz ha

$$-1 < x < 1.$$

(d) Inflexiós pont ott lehet, ahol

$$f''(x) = \frac{6x+12}{(x-1)^4} = 0,$$

azaz

$$6x + 12 = 0,$$

vagyis:

$$x_3 = -2.$$

Mivel

$$f'''(-2) = \frac{2}{27} \neq 0,$$

így a függvénynek inflexiós pontja van az $x_3 = -2$ helyen:

$$P_{infl}\left(-2, -\frac{2}{3}\right).$$

(e) Az f függvény konvex, ha $f''(x) > 0$, azaz ha

$$-2 < x < 1 \qquad \text{vagy} \qquad x > 1,$$

míg az f függvény konkáv, ha $f''(x) < 0$, azaz ha

$$x < -2.$$

(f) f valódi törtfügvény, tehát

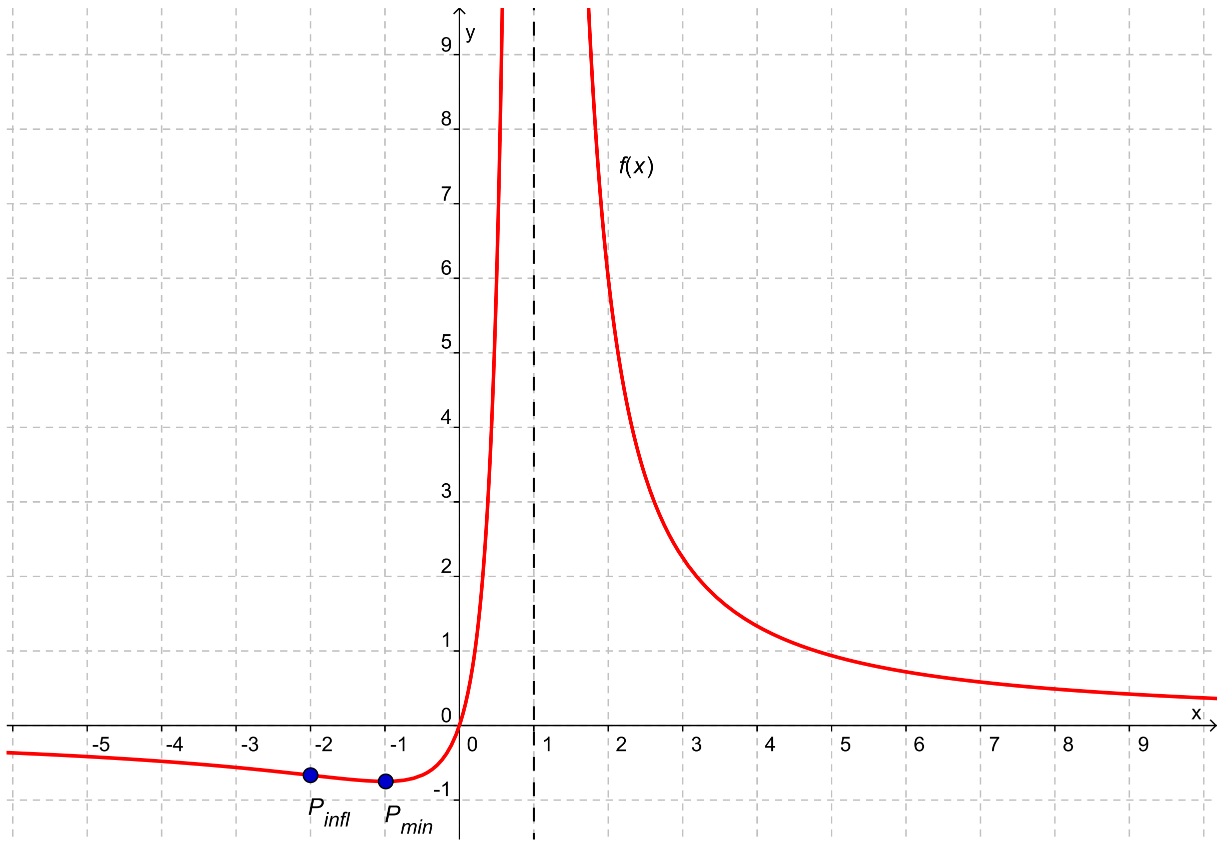
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

f-nek az $x_4 = 1$ helyen kétszeres pólusa van és

$$\lim_{x\to1-0} f(x) = \lim_{x\to1+0} f(x) = +\infty.$$

(g) $R_f = \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

(h) A függvény grafikonja:



5.9.9. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A függvény páros.

(a) Zérushely nincs, mert $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} > 0$, $\forall x \in D_f$ esetén.

(b) Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} \qquad \text{és} \qquad f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4}.$$

A stacionárius helyek az

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^4 - 2}{x^3} = 0$$

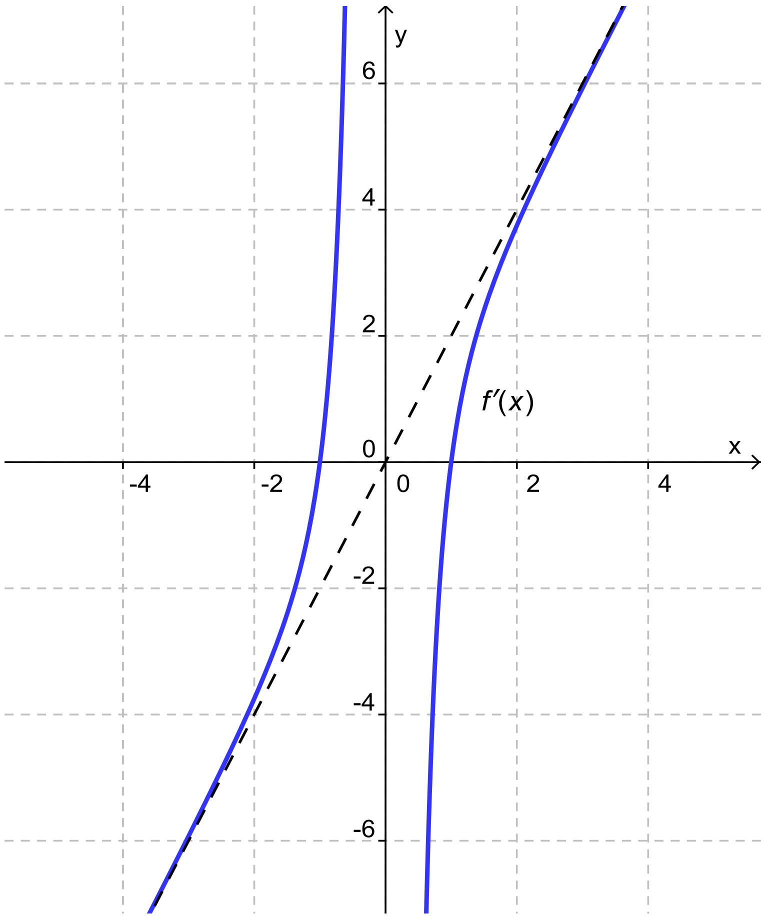
egyenlet megoldásakor adódnak. Két stacionárius hely van:

$$x_1 = -1 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 1.$$

Mivel $f''(x_{1,2}) = f''(\pm 1) = 8 > 0$, így mindkét stacionárius helyen lokális minimuma van a függvénynek:

$$P_{min_1}(-1, 2) \qquad \text{és} \qquad P_{min_2}(1, 2)\,.$$

(c) A monotonitás vizsgálatához vázoljuk az $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3}$ függvény grafikonját!



Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $f'(x) < 0$, azaz ha

$$x < -1 \qquad \text{vagy} \qquad 0 < x < 1.$$

Az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha $f'(x) > 0$, azaz ha

$$-1 < x < 0 \qquad \text{vagy} \qquad x > 1.$$

(d) Mivel

$$f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} = \frac{2x^4 + 6}{x^4} > 0 \qquad \forall x \in D_f,$$

így a függvénynek nincs inflexiós pontja, továbbá a teljes értelmezési tartományán konvex.

(e) f áltört függvény és

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty.$$

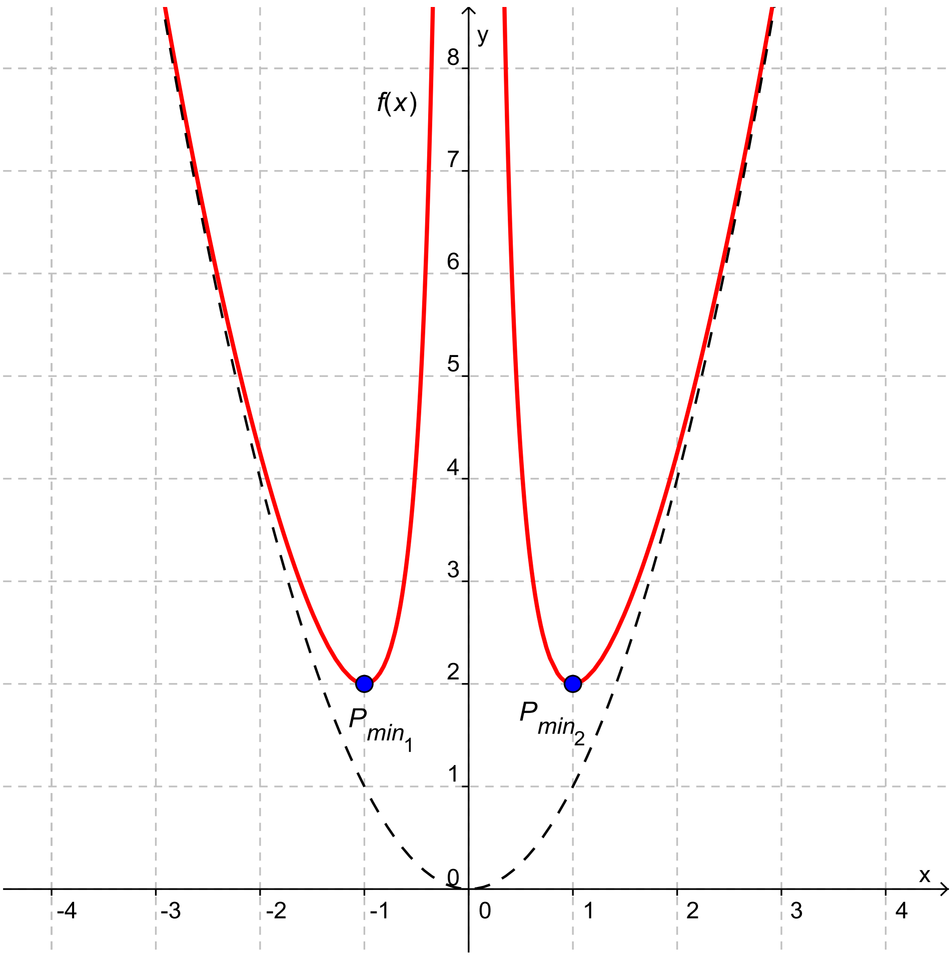
Továbbá

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty.$$

f-nek az $x_3 = 0$ helyen kétszeres pólusa van.

(f) $R_f = [2, +\infty)$.

(g) A függvény grafikonja:



5.9.10. $f(x) = x \cdot e^{-x}$, $D_f = \mathbb{R}$.

(a) A zérushely az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása.

$$f(x) = x \cdot e^{-x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = 0.$$

(b) Számoljuk ki az első, a második és a harmadik deriváltat!

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (1 - x), \qquad f''(x) = e^{-x} \cdot (x - 2), \qquad f'''(x) = e^{-x} \cdot (3 - x).$$

A stacionárius helyek az

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (1 - x) = 0$$

egyenlet megoldásakor adódnak. Az f függvénynek egyetlen stacionárius helye van:

$$x_2 = 1.$$

Mivel

$$f''(x_2) = f''(1) = \frac{-1}{e} < 0,$$

ezért f-nek az $x_2 = 1$ helyen lokális maximuma van:

$$P_{max}\left(1, \frac{1}{e}\right).$$

(c) Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $f'(x) < 0$, azaz ha $1 - x < 0$, tehát

$$x > 1,$$

míg az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha $f'(x) > 0$, azaz ha $1 - x > 0$, vagyis

$$x < 1.$$

(d) Inflexiós pont ott lehet, ahol

$$f''(x) = e^{-x} \cdot (x - 2) = 0,$$

azaz

$$x - 2 = 0,$$

vagyis:

$$x_3 = 2.$$

Mivel

$$f'''(2) = \frac{1}{e^2} \neq 0,$$

így a függvénynek inflexiós pontja van az $x_3 = 2$ helyen:

$$P_{infl}\left(2, \frac{2}{e^2}\right).$$

(e) Az f függvény konvex, ha $f''(x) > 0$, azaz ha $x - 2 > 0$, vagyis

$$x > 2,$$

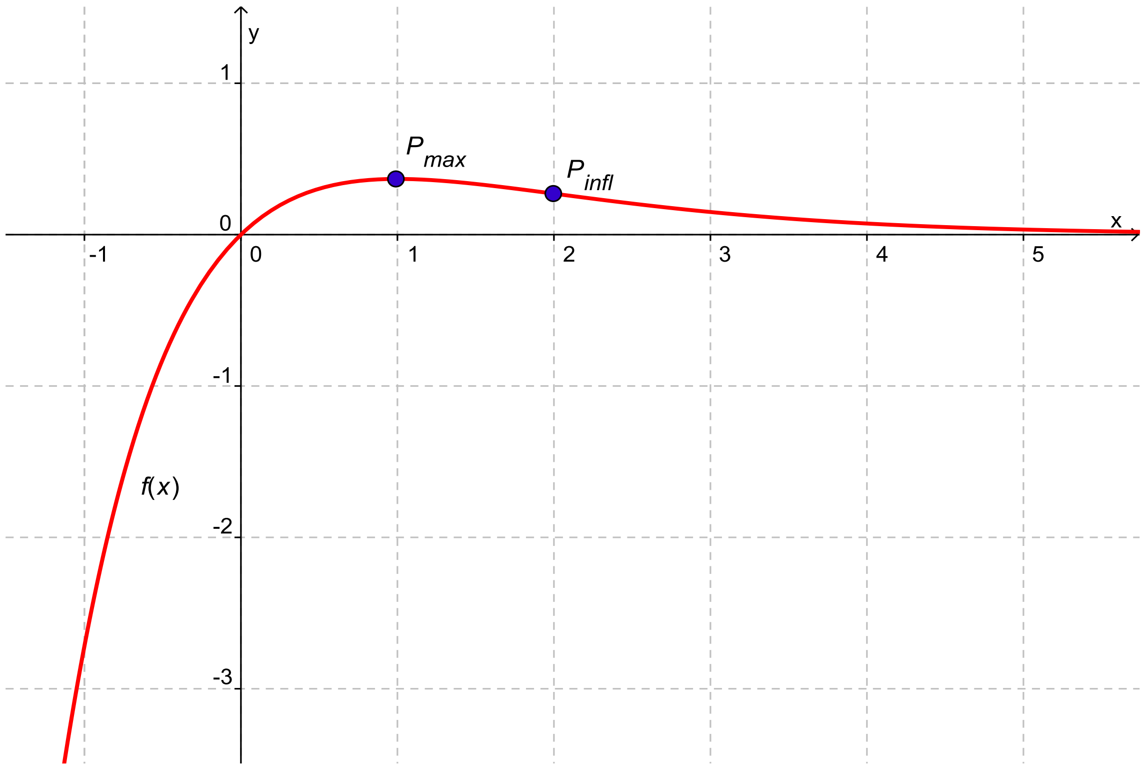
míg az f függvény konkáv, ha $f''(x) < 0$, azaz ha

$$x < 2.$$

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ és $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(g) $R_f = \left(-\infty, \dfrac{1}{e}\right]$.

(h) A függvény grafikonja:



5.9.11. $f(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Zérushely nincs, mert $\forall x \in D_f$ esetén

$$f(x) = e^{1+\frac{1}{x}} > 0.$$

(b) Számoljuk ki az első, a második és a harmadik deriváltat!

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{1+\frac{1}{x}}, \qquad f''(x) = \frac{1}{x^4} \cdot e^{1+\frac{1}{x}} \cdot (2x+1), \qquad f'''(x) = -\frac{1}{x^6} \cdot e^{1+\frac{1}{x}} \cdot (6x^2+6x+1).$$

Az f függvénynek egyetlen stacionárius helye sincs, mert

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{1+\frac{1}{x}} \neq 0.$$

Az f függvénynek tehát nincs lokális szélsőértéke.

(c) Az f függvény D_f-en szigorúan monoton csökkenő, mert

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{1+\frac{1}{x}} < 0,$$

ha $x \in D_f$.

(d) Inflexiós pont ott lehet, ahol

$$f''(x) = \frac{1}{x^4} \cdot e^{1+\frac{1}{x}} \cdot (2x+1) = 0,$$

azaz

$$2x + 1 = 0,$$

vagyis:

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Mivel

$$f'''\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0,$$

így a függvénynek inflexiós pontja van az $x = -\frac{1}{2}$ helyen:

$$P_{infl}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e}\right).$$

(e) Az f függvény konvex, ha $f''(x) > 0$, azaz ha

$$-\frac{1}{2} < x < 0 \qquad \text{vagy} \qquad x > 0,$$

míg az f függvény konkáv, ha $f''(x) < 0$, azaz ha

$$x < -\frac{1}{2}.$$

(f) f-nek az $x_0 = 0$ helyen másodfajú szakadása van, mert

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to 0+0} f(x) = +\infty.$$

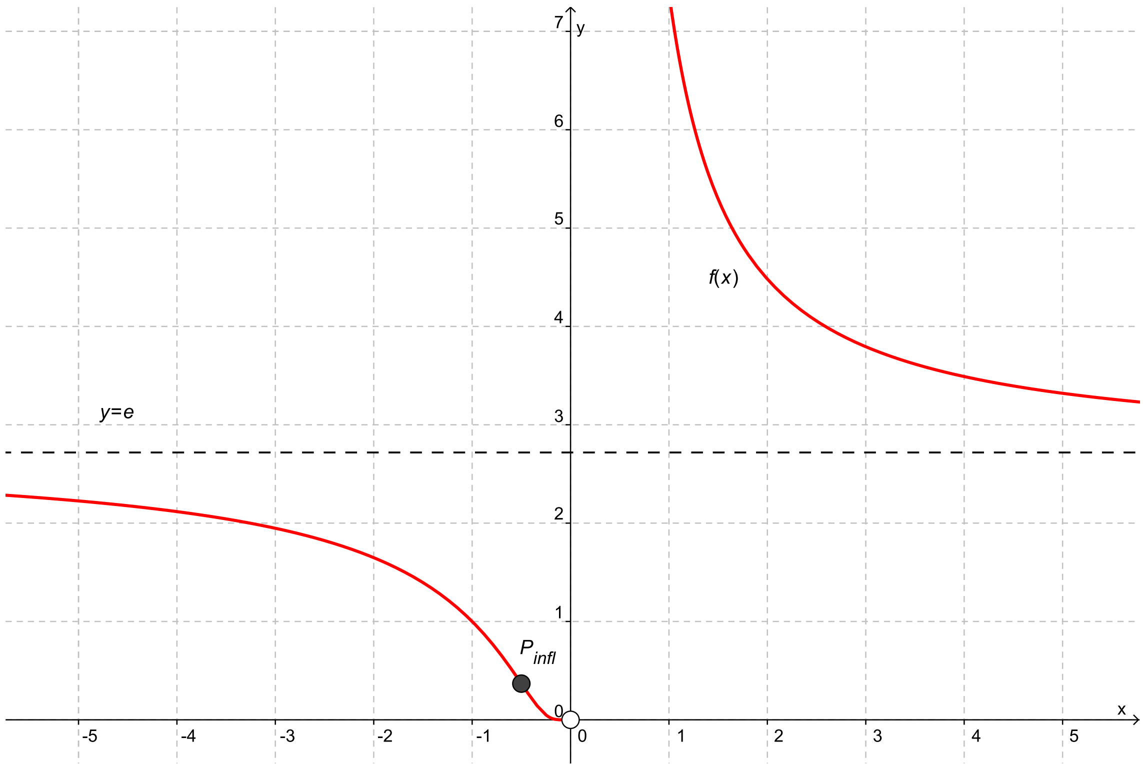
Továbbá

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e.$$

Az $y = e$ egyenes az f függvény vízszintes aszimptotája.

(g) $R_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$.

(h) A függvény grafikonja:



5.9.12. $f(x) = e^{-x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$. A függvény páros és $f(x) > 0$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = -\frac{2x}{e^{x^2}} \qquad \text{és} \qquad f''(x) = \frac{4x^2 - 2}{e^{x^2}}.$$

A stacionárius helyek az

$$f'(x) = -\frac{2x}{e^{x^2}} = 0$$

egyenlet megoldásakor adódnak. Az f függvénynek egyetlen stacionárius helye van:

$$x_1 = 0.$$

Mivel

$$f''(x_1) = f''(0) = -2 < 0,$$

ezért f-nek az $x_1 = 0$ helyen lokális maximuma van:

$$P_{max}(0, 1).$$

Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha

$$f'(x) = -\frac{2x}{e^{x^2}} < 0,$$

vagyis ha $x > 0$, míg az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha

$$f'(x) = -\frac{2x}{e^{x^2}} > 0,$$

vagyis ha $x < 0$.

5.9.13. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A függvény páros és $f(x) > 0$.

(a) Zérushely nincs, mert $\forall x \in D_f$ esetén

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} > 0.$$

(b) Számoljuk ki az első, a második és a harmadik deriváltat!

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad f''(x) = \frac{2}{x^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{2}{x^2} - 3\right), \qquad f'''(x) = \frac{1}{x^9} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (24x^4 - 36x^2 + 8).$$

Az f függvénynek egyetlen stacionárius helye sincs, mert

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0.$$

Az f függvénynek tehát nincs lokális szélsőértéke.

(c) Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} < 0,$$

vagyis ha $x < 0$, míg az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} > 0,$$

vagyis ha $x > 0$.

(d) Inflexiós pont ott lehet, ahol

$$f''(x) = \frac{2}{x^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{2}{x^2} - 3\right) = 0,$$

azaz

$$\frac{2}{x^2} - 3 = 0,$$

vagyis:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \text{és} \qquad x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Mivel

$$f'''\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \neq 0,$$

így a függvénynek két inflexiós pontja van:

$$P_{infl_1}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{e\sqrt{e}}\right) \qquad \text{és} \qquad P_{infl_2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{e\sqrt{e}}\right).$$

(e) Az f függvény konvex, ha $f''(x) > 0$, azaz ha

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 0 \qquad \text{vagy} \qquad 0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}},$$

míg az f függvény konkáv, ha $f''(x) < 0$, azaz ha

$$x < -\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \text{vagy} \qquad x > \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(f) f-nek az $x_0 = 0$ helyen elsőfajú, megszüntethető szakadása van, mert

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} f(x) = 0.$$

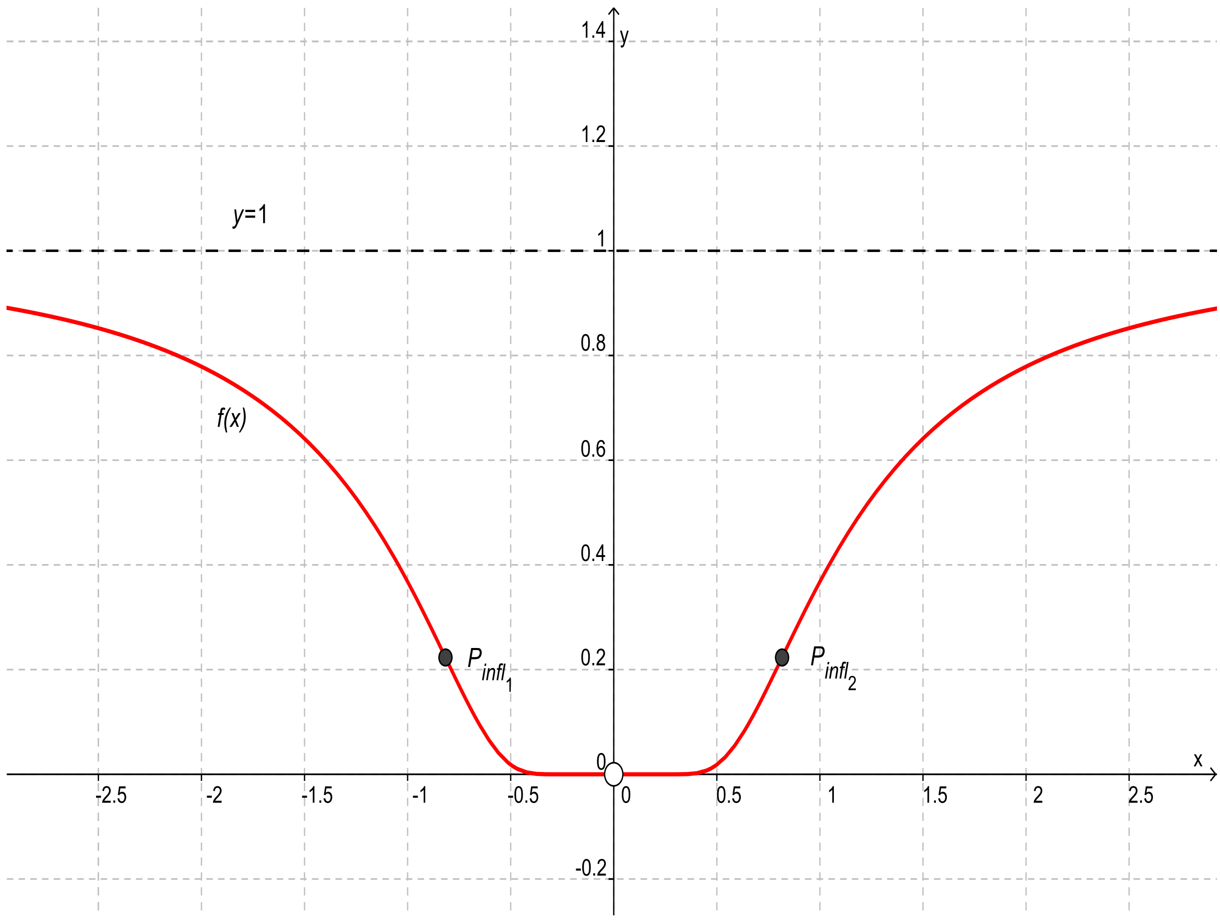
Továbbá

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1.$$

Az $y = 1$ egyenes az f függvény vízszintes aszimptotája.

(g) $R_f = (0, 1)$.

(h) A függvény grafikonja:



5.9.14. $f(x) = \dfrac{2-x}{e^x}$, $D_f = \mathbb{R}$.

(a) A zérushely az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása.

$$f(x) = \frac{2-x}{e^x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = 2.$$

(b) Számoljuk ki az első, a második és a harmadik deriváltat!

$$f'(x) = \frac{x-3}{e^x}, \qquad f''(x) = \frac{4-x}{e^x}, \qquad f'''(x) = \frac{x-5}{e^x}.$$

A stacionárius hely az

$$f'(x) = \frac{x-3}{e^x} = 0$$

egyenlet megoldásakor adódik. Az f függvénynek egyetlen stacionárius helye van:

$$x_2 = 3.$$

Mivel

$$f''(x_2) = f''(3) = \frac{1}{e^3} > 0,$$

ezért f-nek az $x_2 = 3$ helyen lokális minimuma van:

$$P_{min}\left(3, -\frac{1}{e^3}\right).$$

(c) Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha

$$f'(x) = \frac{x-3}{e^x} < 0,$$

vagyis ha $x < 3$, míg az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha

$$f'(x) = \frac{x-3}{e^x} > 0,$$

vagyis ha $x > 3$.

(d) Inflexiós pont ott lehet, ahol

$$f''(x) = \frac{4-x}{e^x} = 0,$$

azaz

$$4 - x = 0,$$

vagyis:

$$x_3 = 4.$$

Mivel

$$f'''(4) = -\frac{1}{e^4} \neq 0,$$

így a függvénynek van inflexiós pontja az $x_3 = 4$ helyen:

$$P_{infl}\left(4, -\frac{2}{e^4}\right).$$

(e) Az f függvény konvex, ha $f''(x) > 0$, azaz ha

$$x < 4,$$

míg az f függvény konkáv, ha $f''(x) < 0$, azaz ha

$$x > 4.$$

(f) Határértékek:

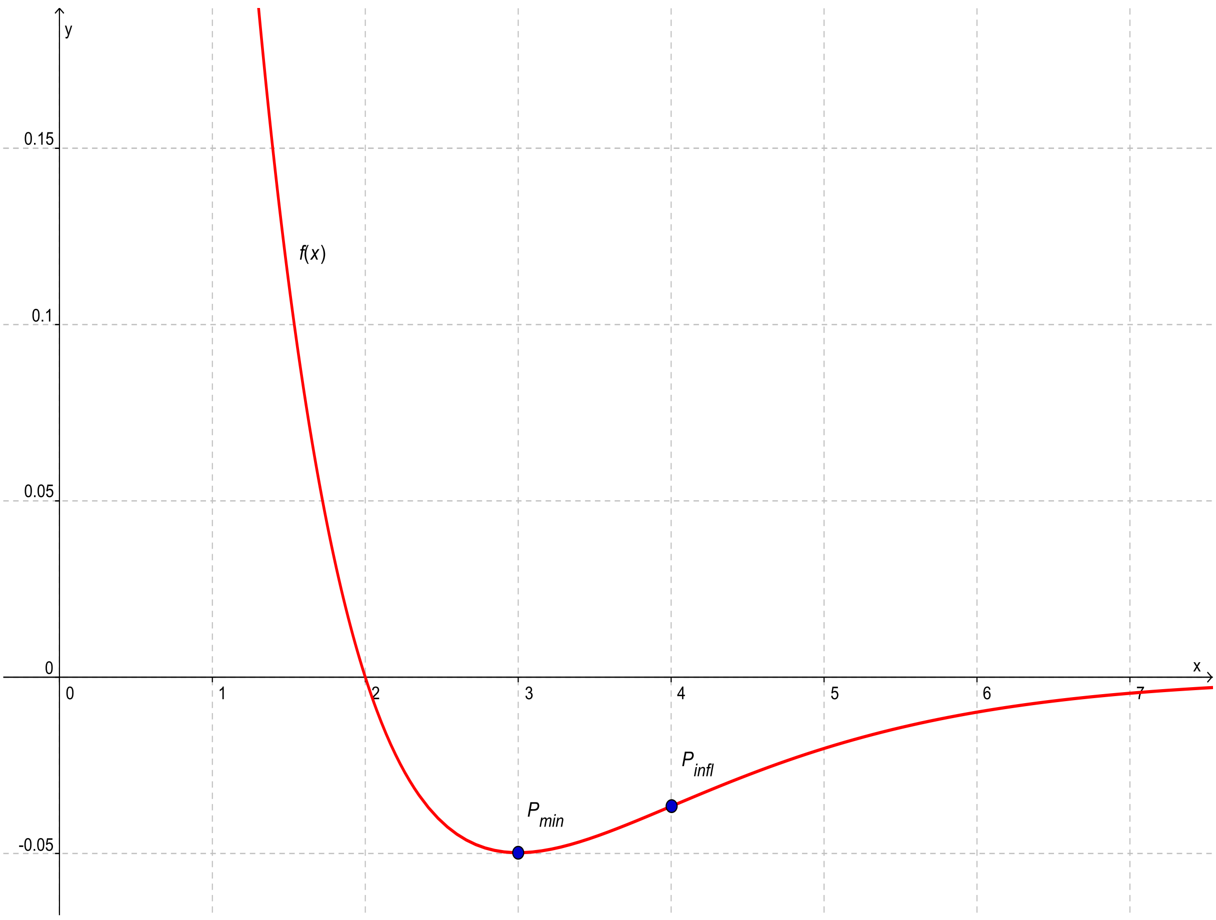
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{e^x} = 0,$$

továbbá

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-x}{e^x} = +\infty.$$

(g) $R_f = \left[-\frac{1}{e^3}, +\infty\right)$.

(h) A függvény grafikonja:



5.9.15. $f(x) = x \ln x$.

(a) A függvény értelmezési tartománya:
$$D_f = \mathbb{R}^+.$$
A függvény zérushelyét az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásakor kapjuk.
$$f(x) = x \ln x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x = 0,$$
azaz
$$x_1 = 1.$$

(b) A lokális szélsőérték- és inflexiós pontok meghatározásához számoljuk ki az első és a második deriváltat!
$$f'(x) = 1 + \ln x \qquad \text{és} \qquad f''(x) = \frac{1}{x}.$$
A stacionárius hely az
$$f'(x) = 1 + \ln x = 0$$
egyenlet megoldásakor adódik. Az f függvénynek egyetlen stacionárius helye van:
$$x_2 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$
Mivel
$$f''(x_2) = f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0,$$
ezért f-nek az $x_2 = \frac{1}{e}$ helyen lokális minimuma van:
$$P_{min}\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right).$$
Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha
$$f'(x) = 1 + \ln x < 0,$$
vagyis ha $0 < x < \frac{1}{e}$, míg az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha
$$f'(x) = 1 + \ln x > 0,$$
vagyis ha $x > \frac{1}{e}$.
f-nek nincs inflexiós pontja, mert $\forall x \in D_f$ esetén
$$f''(x) = \frac{1}{x} \neq 0.$$
Azonnal adódik, hogy f konvex D_f-en, mert $\forall x \in D_f$ esetén
$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

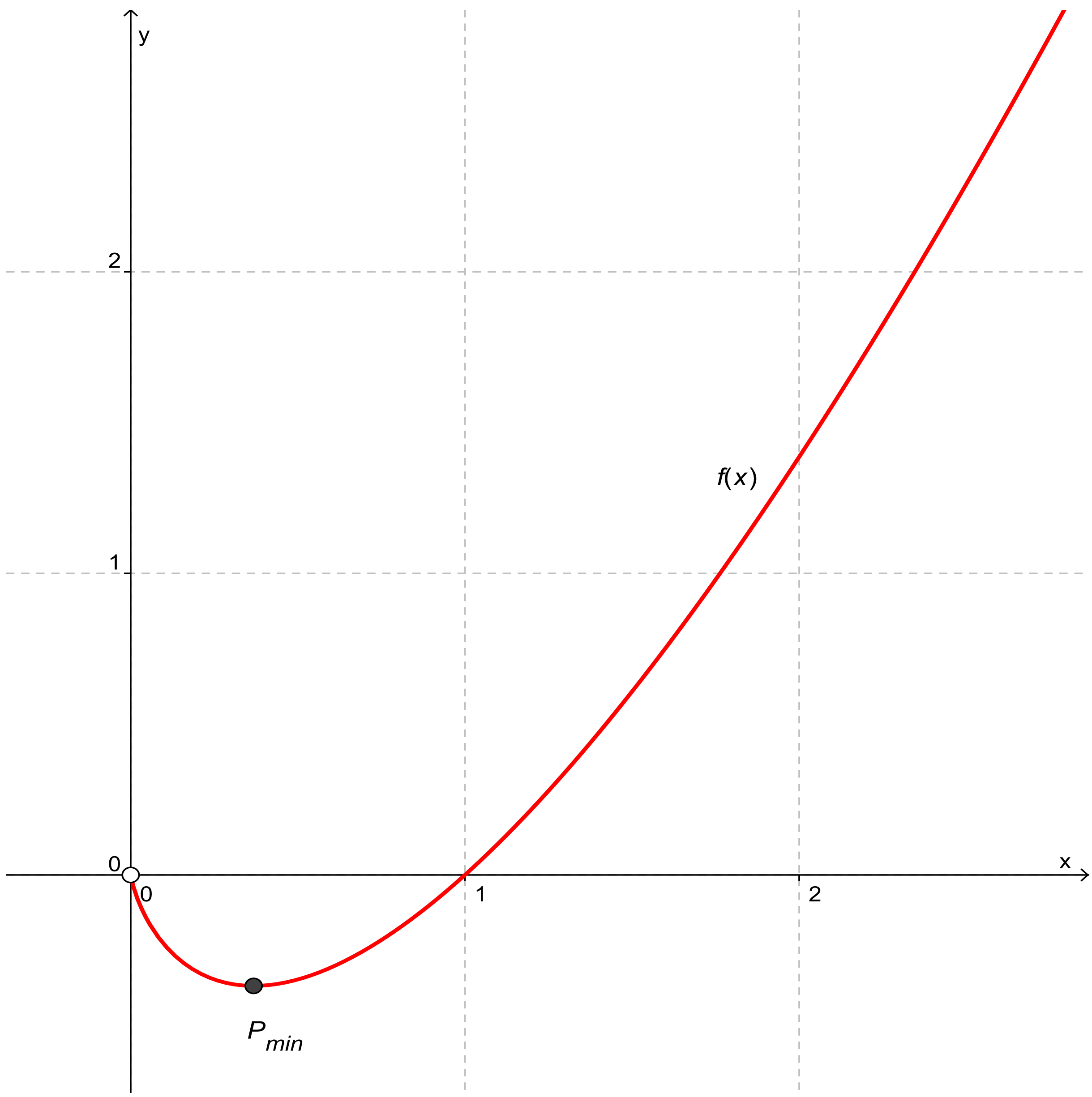
(c) Határértékek:

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0} (-x) = 0,$$

továbbá

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(d) A függvény grafikonja:



5.9.16. $f(x) = x^2 \ln x^2$.

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A függvény páros, mert $\forall x \in D_f$ esetén

$$f(-x) = (-x)^2 \ln(-x)^2 = x^2 \ln x^2 = f(x).$$

A függvény zérushelyeit az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásakor kapjuk. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ miatt

$$f(x) = x^2 \ln x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x^2 = 0,$$

azaz

$$x^2 = 1,$$

vagyis két zérushelye van a függvénynek:

$$x_1 = -1 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 1.$$

(b) A lokális szélsőértékek meghatározásához számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = 2x + 2x \ln x^2 \qquad \text{és} \qquad f''(x) = 6 + 2 \ln x^2.$$

A stacionárius helyek az

$$f'(x) = 2x + 2x \ln x^2 = 2x(1 + \ln x^2) = 0$$

egyenlet megoldásakor adódnak. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ miatt

$$2x(1 + \ln x^2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x^2 = -1,$$

azaz

$$x^2 = \frac{1}{e},$$

tehát az f függvénynek két stacionárius helye van:

$$x_3 = -\frac{1}{\sqrt{e}} \qquad \text{és} \qquad x_4 = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Mivel

$$f''(x_{3,4}) = f''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 4 > 0,$$

ezért f-nek az x_3 és az x_4 helyeken lokális minimuma van:

$$P_{min_1}\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{e}\right) \qquad \text{és} \qquad P_{min_2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{e}\right).$$

Az inflexiós pontok meghatározásához oldjuk meg az

$$f''(x) = 6 + 2 \ln x^2 = 0$$

egyenletet!

$$2\ln x^2 = -6 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = e^{-3} = \frac{1}{e^3},$$

vagyis

$$x_5 = -\frac{1}{\sqrt{e^3}} \qquad \text{és} \qquad x_6 = \frac{1}{\sqrt{e^3}}.$$

Mivel $f'''(x_{5,6}) \neq 0$, ezért az f függvénynek két inflexiós pontja van:

$$P_{infl_1}\left(-\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3}{e^3}\right) \qquad \text{és} \qquad P_{infl_2}\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3}{e^3}\right).$$

(c) Határértékek:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

továbbá

$$\lim_{x\to0+0} f(x) = \lim_{x\to0+0} 2x^2\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to0+0} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to0+0} \frac{\frac{2}{x}}{-2\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to0+0}(-x^2) = 0.$$

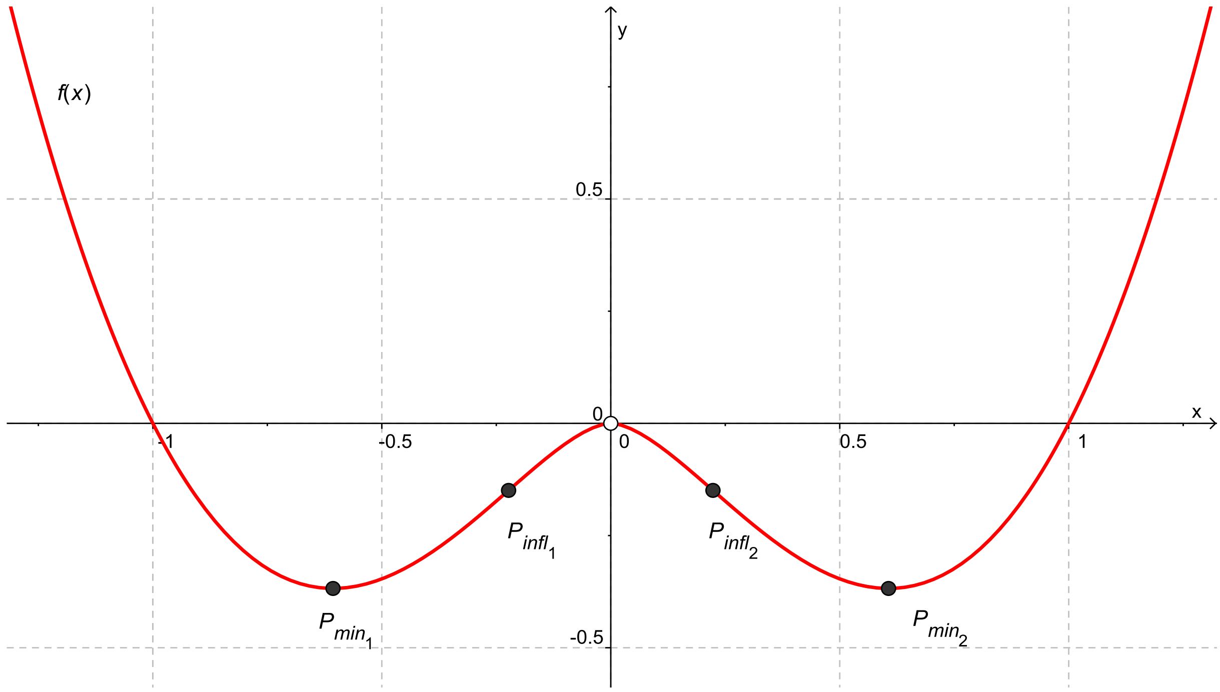
A függvény páros, így

$$\lim_{x\to0-0} f(x) = \lim_{x\to0+0} f(x) = 0,$$

azaz

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0.$$

(d) A függgény grafikonja:



5.9.17. A **5.9.16.** feladat megoldásakor láttuk, hogy $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ és az $f(x) = x^2 \ln x^2$ függvénynek két inflexiós pontja van:

$$P_{infl_1}\left(-\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3}{e^3}\right) \qquad \text{és} \qquad P_{infl_2}\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3}{e^3}\right).$$

f konvex, ha

$$f''(x) = 6 + 2\ln x^2 > 0,$$

vagyis ha

$$x < -\frac{1}{\sqrt{e^3}} \qquad \text{vagy} \qquad x > \frac{1}{\sqrt{e^3}}.$$

Továbbá f konkáv, ha

$$f''(x) = 6 + 2\ln x^2 < 0,$$

vagyis ha

$$-\frac{1}{\sqrt{e^3}} < x < 0 \qquad \text{vagy} \qquad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e^3}}.$$

5.9.18. $f(x) = x\ln x^2$.

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A függvény páratlan, mert $\forall x \in D_f$ esetén

$$f(-x) = -x\ln(-x)^2 = -x\ln x^2 = -f(x).$$

(b) A függvény zérushelyeit az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásakor kapjuk. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ miatt

$$f(x) = x\ln x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x^2 = 0,$$

azaz

$$x^2 = 1,$$

vagyis két zérushelye van a függvénynek:

$$x_1 = -1 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 1.$$

(c) A lokális szélsőértékek meghatározásához számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = 2 + \ln x^2 \qquad \text{és} \qquad f''(x) = \frac{2}{x}.$$

A stacionárius helyek az

$$f'(x) = 2 + \ln x^2 = 0$$

egyenlet megoldásakor adódnak.

$$\ln x^2 = -2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = \frac{1}{e^2},$$

tehát az f függvénynek két stacionárius helye van:

$$x_3 = -\frac{1}{e} \qquad \text{és} \qquad x_4 = \frac{1}{e}.$$

Mivel

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{1}{e}\right) = -2e < 0,$$

ezért f-nek az $x_3 = -\frac{1}{e}$ helyen lokális maximuma van:

$$P_{max}\left(-\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right).$$

Továbbá

$$f''(x_4) = f''\left(\frac{1}{e}\right) = 2e > 0,$$

ezért f-nek az $x_4 = \frac{1}{e}$ helyen lokális minimuma van:

$$P_{min}\left(\frac{1}{e}, -\frac{2}{e}\right).$$

Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha

$$f'(x) = 2 + \ln x^2 < 0,$$

vagyis ha

$$-\frac{1}{e} < x < 0 \qquad \text{vagy} \qquad 0 < x < \frac{1}{e},$$

míg az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha

$$f'(x) = 2 + \ln x^2 > 0,$$

vagyis ha

$$x < -\frac{1}{e} \qquad \text{vagy} \qquad x > \frac{1}{e}.$$

(d) f-nek nincs inflexiós pontja, mert $\forall x \in D_f$ esetén

$$f''(x) = \frac{2}{x} \neq 0.$$

f konvex, ha

$$f''(x) = \frac{2}{x} > 0,$$

vagyis ha $x > 0$. Továbbá f konkáv, ha

$$f''(x) = \frac{2}{x} < 0,$$

vagyis ha $x < 0$.

(e) Határértékek:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

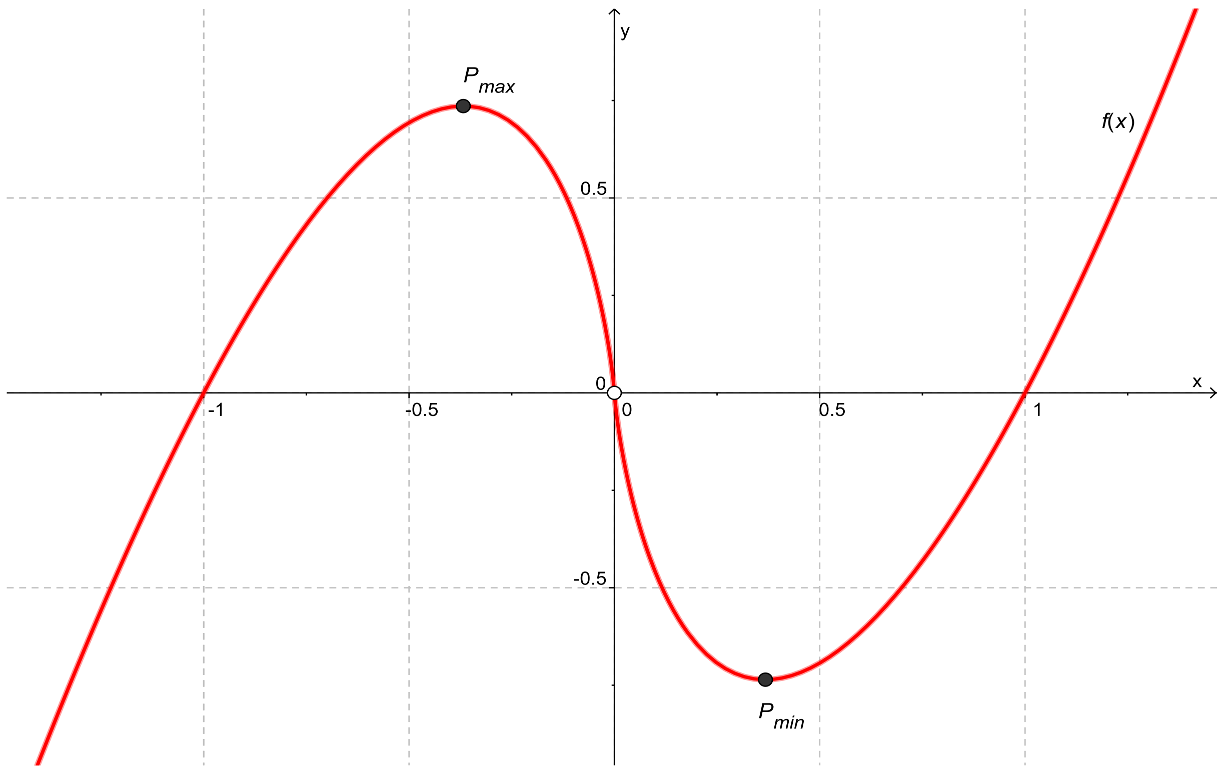
továbbá

$$\lim_{x\to0+0} f(x) = \lim_{x\to0+0} x\ln x^2 = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to0+0} \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to0+0} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to0+0} (-2x) = 0$$

és

$$\lim_{x\to0-0} f(x) = \lim_{x\to0+0} f(x) = 0.$$

(f) A függény grafikonja:



5.9.19. $f(x) = \ln\frac{1}{x}$.

(a) $D_f = \mathbb{R}^+$.

(b) A függvény zérushelyét az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásakor kapjuk.

$$\ln\frac{1}{x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x} = 1,$$

azaz egyetlen zérushelye van a függvénynek:

$$x_1 = 1.$$

(c) Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \qquad \text{és} \qquad f''(x) = \frac{1}{x^2}.$$

f-nek nincs lokális szélsőértéke, mert $\forall x \in D_f$ esetén

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \neq 0.$$

Nyilvánvaló, hogy f szigorúan monoton csökkenő D_f-en, mert

$$f'(x) = -\frac{1}{x} < 0,$$

ha $x > 0$, azaz ha $x \in D_f$.

(d) f-nek nincs inflexiós pontja sem, mert $\forall x \in D_f$ esetén

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} \neq 0.$$

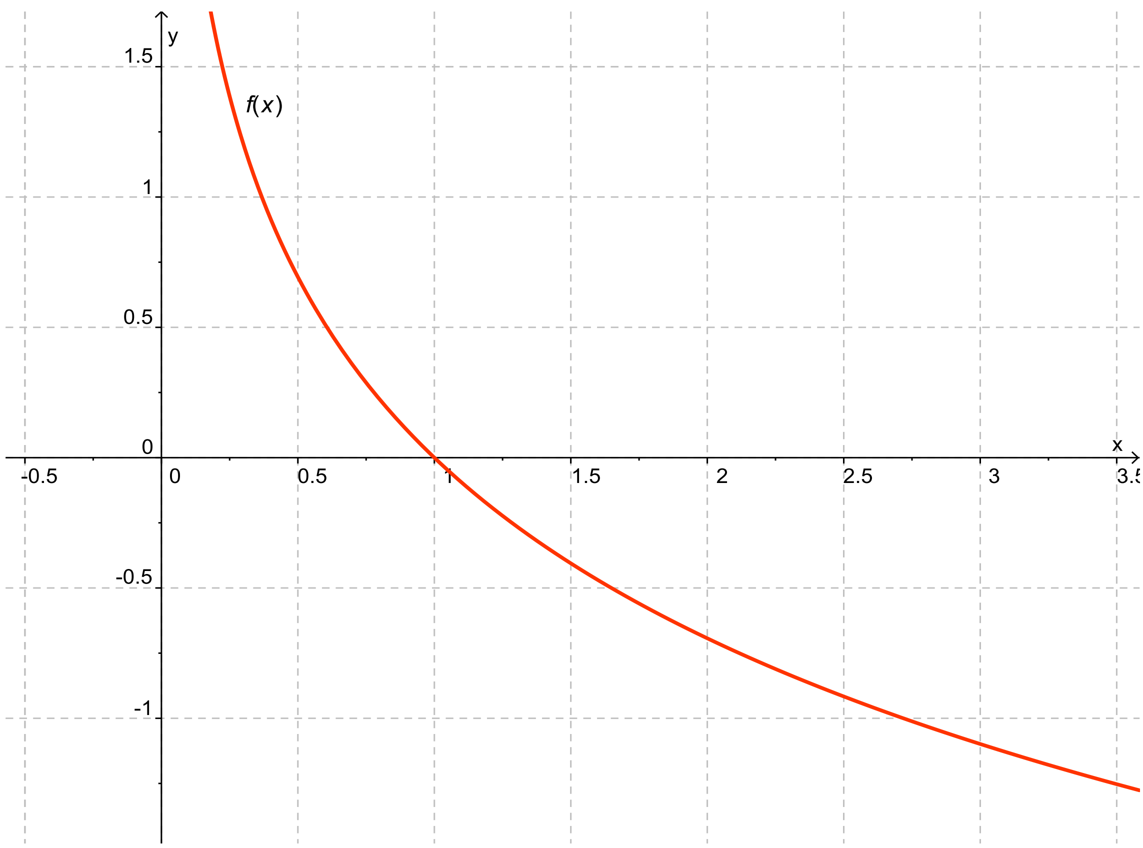
Rögtön adódik, hogy f konvex D_f-en, mert $\forall x \in D_f$ esetén

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0.$$

(e) Határértékek:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty.$$

(f) A függvény grafikonja:



5.9.20. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A függvénynek nincs zérushelye, mert $\forall x \in D_f$ esetén

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} > 0.$$

(a) A monotonitás vizsgálatához számoljuk ki az első deriváltat!

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Rögtön adódik, hogy f-nek nincs lokális szélsőértéke, mert $\forall x \in D_f$ esetén $f'(x) \neq 0$. Továbbá $\forall x \in D_f$ esetén

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) < 0,$$

vagyis f szigorúan monoton csökkenő D_f-en.

(b) A konvexitás vizsgálatához számoljuk ki a második és a harmadik deriváltat!

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right) \cdot (1 + 2x) \qquad \text{és} \qquad f'''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^6}\right) \cdot (1 + 6x + 6x^2).$$

Az inflexiós pont meghatározásához oldjuk meg az

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right) \cdot (1 + 2x) = 0$$

egyenletet!

$$e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right) \cdot (1 + 2x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + 2x = 0,$$

vagyis

$$x_1 = -\frac{1}{2}.$$

Mivel $f'''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{32}{e^2} \neq 0$, ezért az f függvénynek inflexiós pontja van az $x_1 = -\frac{1}{2}$ helyen:

$$P_{infl}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right).$$

A konvexitás vizsgálatánál figyelembe vesszük, hogy $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az f függvény konvex, ha

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right) \cdot (1 + 2x) > 0,$$

vagyis ha $1 + 2x > 0$, azaz ha

$$-\frac{1}{2} < x < 0 \qquad \text{vagy} \qquad x > 0.$$

f konkáv, ha

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right) \cdot (1 + 2x) < 0,$$

vagyis ha $1 + 2x < 0$, azaz ha

$$x < -\frac{1}{2}.$$

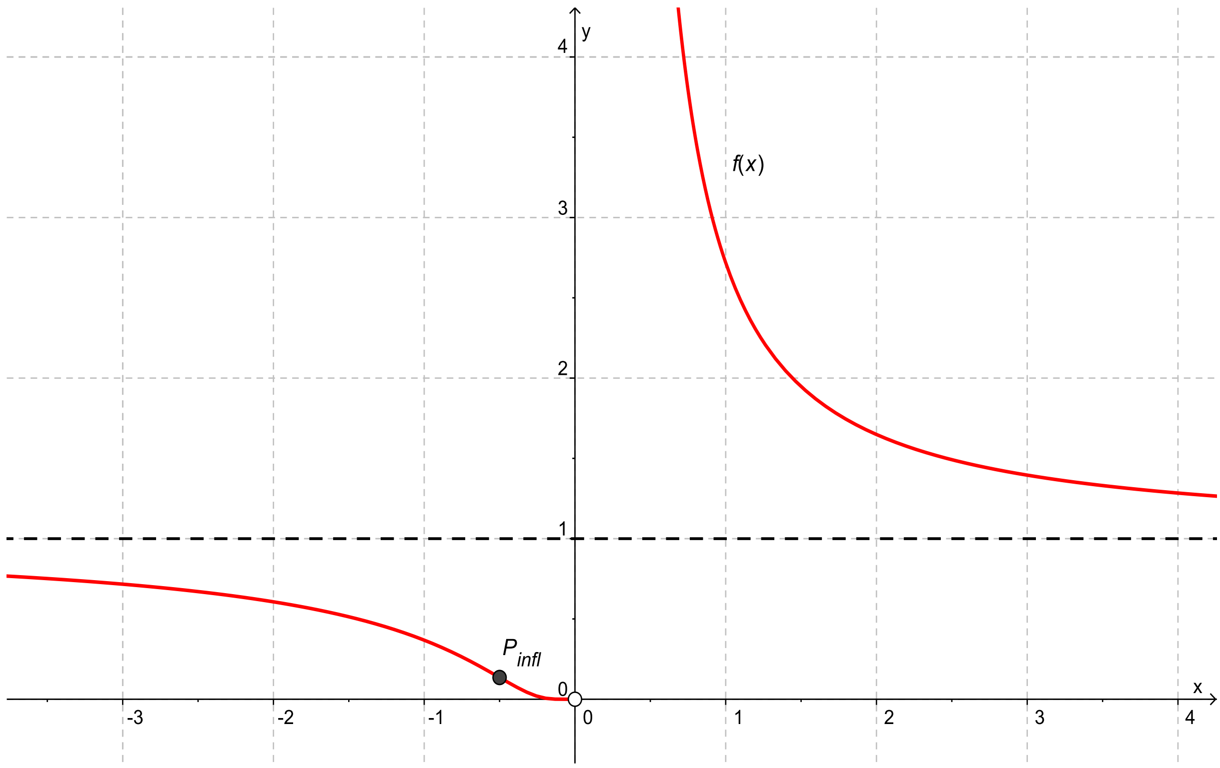
(c) Határértékek:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1,$$

továbbá:

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0-0} f(x) = 0.$$

(d) A függvény grafikonja:



5.9.21. $f(x) = e^{\sin x}$, $D_f = \mathbb{R}$.

(a) $f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$. f szigorúan monoton növekvő, ha

$$f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x > 0.$$

Mivel $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén $e^{\sin x} > 0$ és $\cos x > 0$, ezért

$$f'(x) > 0,$$

azaz f szigorúan monoton növekvő a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, tehát az állítás igaz.

(b) f-nek stacionárius helye van az $x_0 = \dfrac{3\pi}{2}$ helyen, mert

$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{\sin\frac{3\pi}{2}} \cdot \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{e} \cdot 0 = 0.$$

A második derivált:

$$f''(x) = e^{\sin x} \cdot \cos^2 x - e^{\sin x} \cdot \sin x = e^{\sin x} \cdot (\cos^2 x - \sin x).$$

Mivel

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{\sin\frac{3\pi}{2}} \cdot (\cos^2 \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{e} \cdot (0 - (-1)) = \frac{1}{e} > 0,$$

így f-nek lokális minimuma van az $x_0 = \dfrac{3\pi}{2}$ helyen. Az állítás tehát nem igaz.

5.9.22. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. A függvény páros, mert $\forall x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és

$$f(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = \ln(x^2 - 1) = f(x).$$

(b) A függvény zérushelyeit az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásakor kapjuk.

$$\ln(x^2 - 1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 1 = 1,$$

azaz két zérushelye van a függvénynek:

$$x_1 = -\sqrt{2} \qquad \text{és} \qquad x_2 = \sqrt{2}.$$

(c) Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \qquad \text{és} \qquad f''(x) = -\frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2}.$$

f-nek nincs lokális szélsőértéke, mert $\forall x \in D_f$ esetén

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \neq 0.$$

(*Megjegyzés*: $f'(x) = 0$, ha $x = 0$, de $0 \notin D_f$.)

(d) Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} < 0,$$

vagyis ha $x < -1$, míg az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} > 0,$$

vagyis ha $x > 1$.

(e) f-nek nincs inflexiós pontja, mert $\forall x \in D_f$ esetén

$$f''(x) = -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2} \neq 0.$$

Rögtön adódik, hogy f konkáv D_f-en, mert $\forall x \in D_f$ esetén

$$f''(x) = -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2} < 0.$$

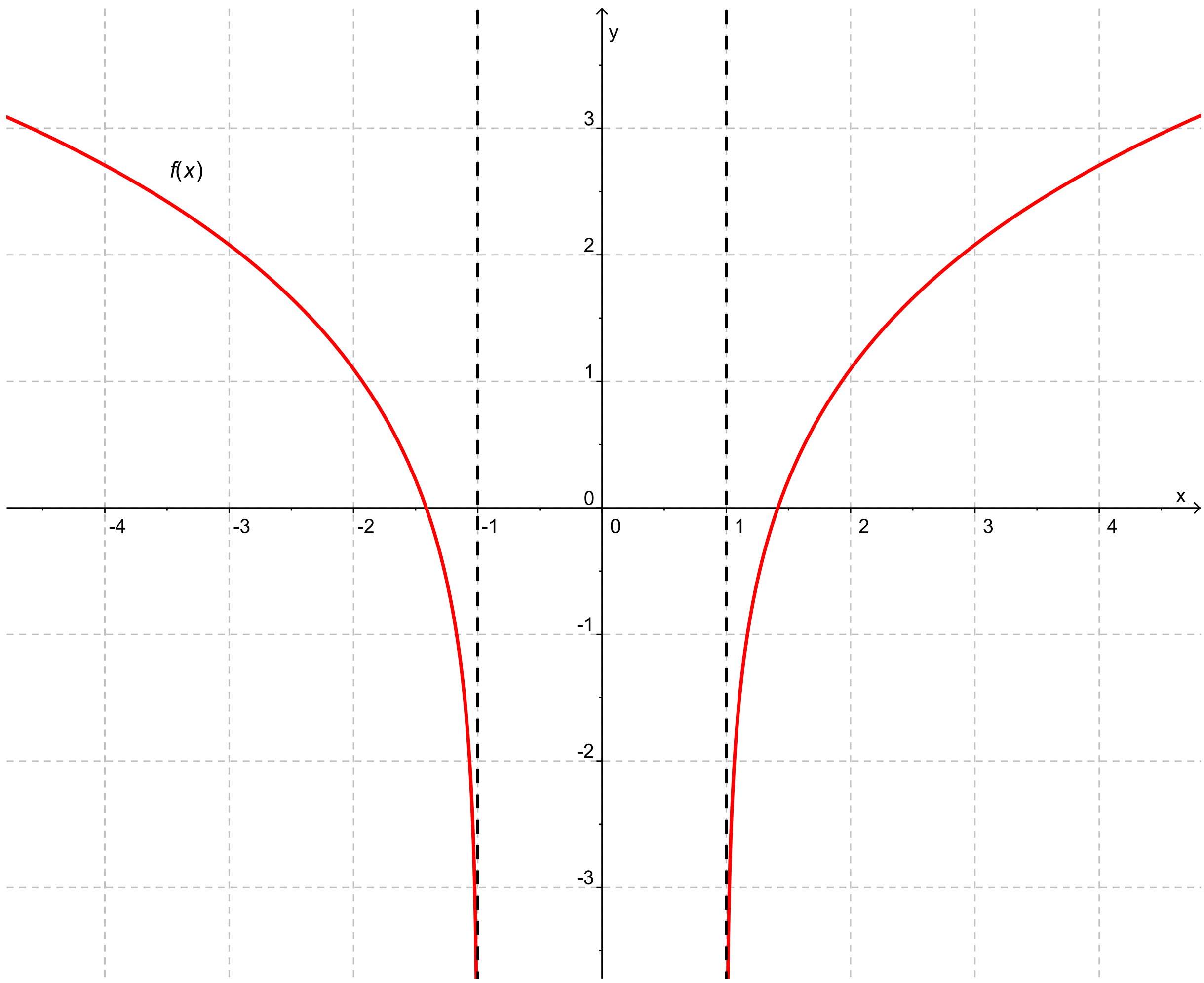
(f) Határértékek:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

és

$$\lim_{x\to-1-0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = -\infty.$$

(g) A függvény grafikonja:



5.9.23. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

(a) $D_f = \mathbb{R}^+$.

(b) A függvény zérushelyét az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásakor kapjuk.

$$\frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x = 0,$$

vagyis egy zérushelye van a függvénynek:

$$x_1 = 1.$$

(c) A lokális szélsőérték vizsgálatához számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \qquad \text{és} \qquad f''(x) = \frac{-3x + 2x \ln x}{x^4}.$$

A stacionárius hely az

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$$

egyenlet megoldásakor adódik.

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x = 1,$$

Az f függvénynek egyetlen stacionárius helye van:

$$x_2 = e.$$

Mivel

$$f''(x_2) = f''(e) = -\frac{1}{e^3} < 0,$$

ezért f-nek az $x_2 = e$ helyen lokális maximuma van:

$$P_{max}\left(e, \frac{1}{e}\right).$$

(d) Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$$

vagyis ha $1 - \ln x < 0$, azaz ha

$$0 < x < e.$$

Az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0,$$

vagyis ha $1 - \ln x > 0$, tehát

$$x > e$$

esetén.

(e) Az inflexiós pont meghatározásához oldjuk meg az

$$f''(x) = \frac{-3x + 2x \ln x}{x^4} = 0$$

egyenletet!

$$\frac{-3x + 2x \ln x}{x^4} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -3x + 2x \ln x = x \cdot (-3 + 2 \ln x) = 0,$$

vagyis

$$x_3 = e^{\frac{3}{2}}.$$

Mivel $f'''\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \neq 0$, ezért az f függvénynek inflexiós pontja van az $x_3 = e^{\frac{3}{2}}$ helyen:

$$P_{infl}\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right).$$

(f) A konvexitás vizsgálatánál is figyelembe vesszük, hogy $D_f = \mathbb{R}^+$. Az f függvény konvex, ha

$$f''(x) = \frac{-3x + 2x \ln x}{x^4} > 0,$$

vagyis ha $-3x + 2x \ln x > 0$, azaz ha $x > e^{\frac{3}{2}}$. f konkáv, ha

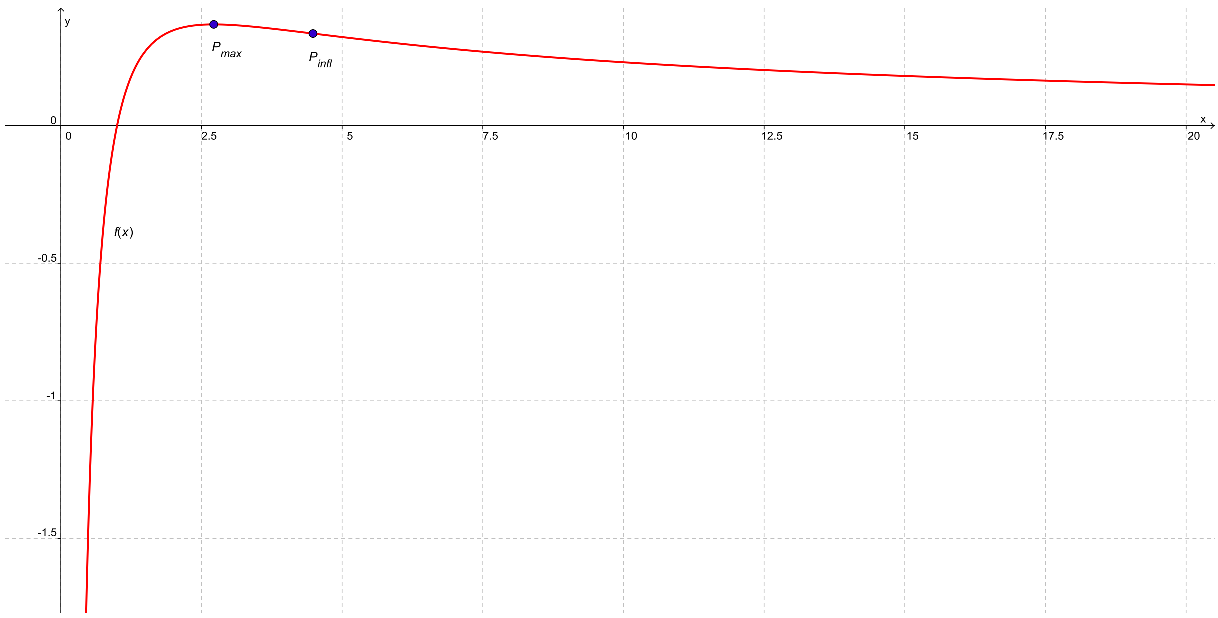
$$f''(x) = \frac{-3x + 2x \ln x}{x^4} < 0,$$

vagyis ha $-3x + 2x \ln x < 0$, azaz ha $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$.

(g) Határértékek:

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(h) A függvény grafikonja:



5.9.24. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

(a) $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

(b) f-nek nincs zérushelye.

(c) Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \qquad \text{és} \qquad f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}.$$

A stacionárius hely az

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0$$

egyenlet megoldásakor adódik.

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x = 1,$$

Az f függvénynek egyetlen stacionárius helye van:

$$x_1 = e.$$

Mivel

$$f''(x_1) = f''(e) = \frac{1}{e} > 0,$$

ezért f-nek az $x_1 = e$ helyen lokális minimuma van:

$$P_{min}(e, e).$$

(d) A monotonitás vizsgálatakor figyelembe vesszük, hogy $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} < 0$$

vagyis ha $\ln x - 1 < 0$, azaz ha

$$0 < x < 1 \qquad \text{vagy} \qquad 1 < x < e.$$

Az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0,$$

vagyis ha $\ln x - 1 > 0$, tehát

$$x > e$$

esetén.

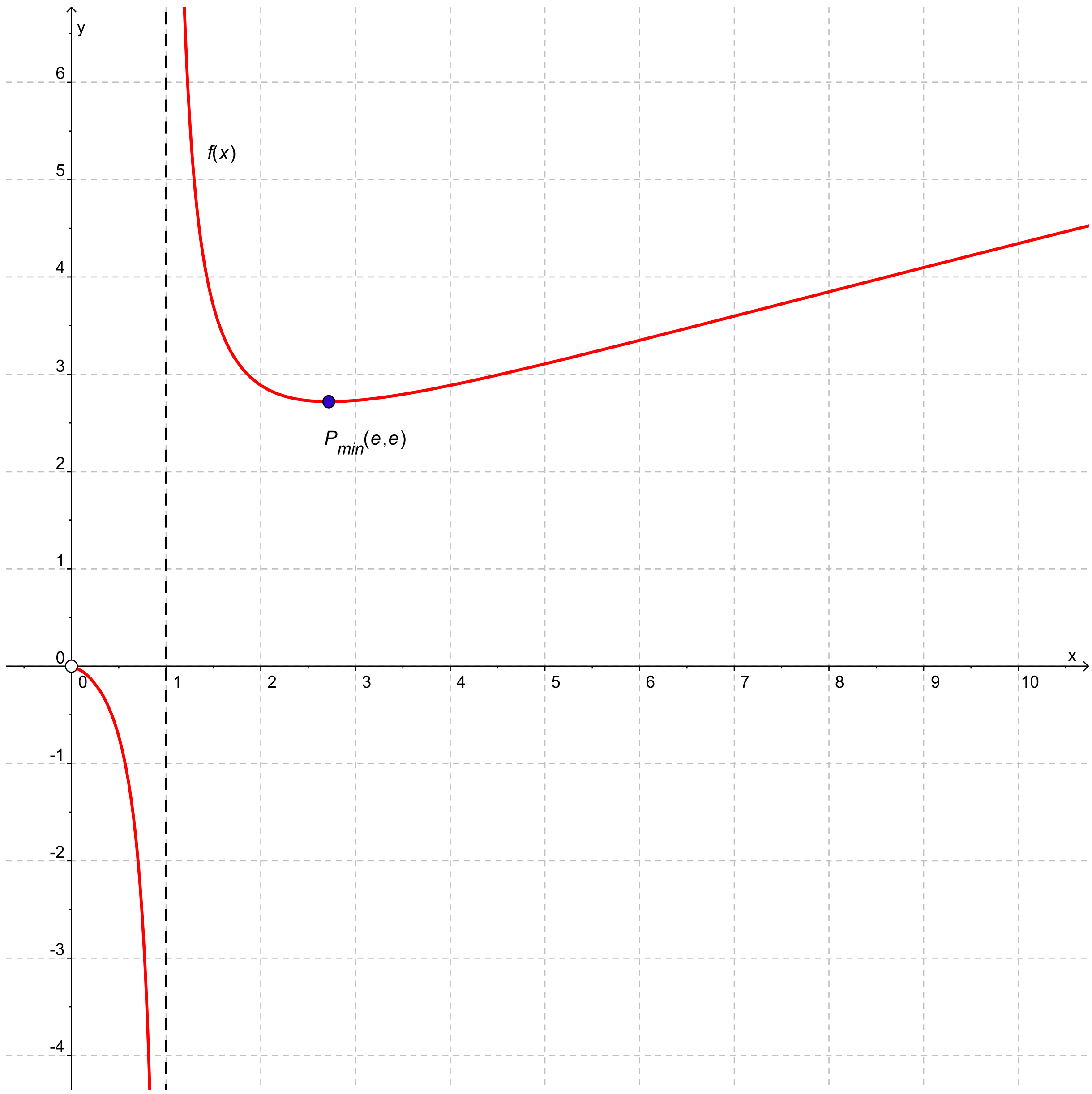
(e) Határértékek:

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$$

és

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

(f) A függvény grafikonja:



(g) $R_f = \mathbb{R} \setminus [0, e)$.

5.9.25. $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = \cos x - \sin x \qquad \text{és} \qquad f''(x) = -\sin x - \cos x.$$

A stacionárius helyek az

$$f'(x) = \cos x - \sin x = 0$$

egyenlet megoldásakor adódnak.

$$\cos x - \sin x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos x = \sin x,$$

azaz

$$\operatorname{tg} x = 1.$$

$x \in [0, 2\pi]$ miatt két stacionárius helyet kapunk:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{és} \qquad x_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

Mivel

$$f''(x_1) = f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0,$$

ezért f-nek az $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ helyen lokális maximuma van:

$$P_{max}\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right).$$

Továbbá

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 0,$$

ezért f-nek az $x_2 = \dfrac{5\pi}{4}$ helyen lokális minimuma van:

$$P_{min}\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right).$$

5.9.26. $f(x) = \cos x - \cos^2 x$, $x \in [-\pi, \pi]$. A függvény páros, mert szimmetrikus az értelmezési tartomány és

$$f(-x) = \cos(-x) - \cos^2(-x) = \cos x - \cos^2 x = f(x).$$

Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = -\sin x + 2\cos x \sin x \qquad \text{és} \qquad f''(x) = 4\cos^2 x - \cos x - 2.$$

A stacionárius helyek az

$$f'(x) = -\sin x + 2\cos x \sin x = \sin x(2\cos x - 1) = 0$$

egyenlet megoldásakor adódnak.

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin x = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \cos x = \frac{1}{2}.$$

$x \in [-\pi, \pi]$ miatt öt stacionárius helyet kapunk:

$$x_1 = -\pi \qquad x_2 = -\frac{\pi}{3} \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = \frac{\pi}{3} \qquad x_5 = \pi.$$

Mivel

$$f''(x_{1,5}) = f''(\pm\pi) = 4 + 1 - 2 = 3 > 0 \qquad \text{és} \qquad f''(x_3) = f''(0) = 4 - 1 - 2 = 1 > 0,$$

ezért az x_1, x_3 és x_5 helyeken lokális minimuma van a függvénynek:

$$P_{min_1}(-\pi, -2), \qquad P_{min_2}(0, 0), \qquad P_{min_3}(\pi, -2).$$

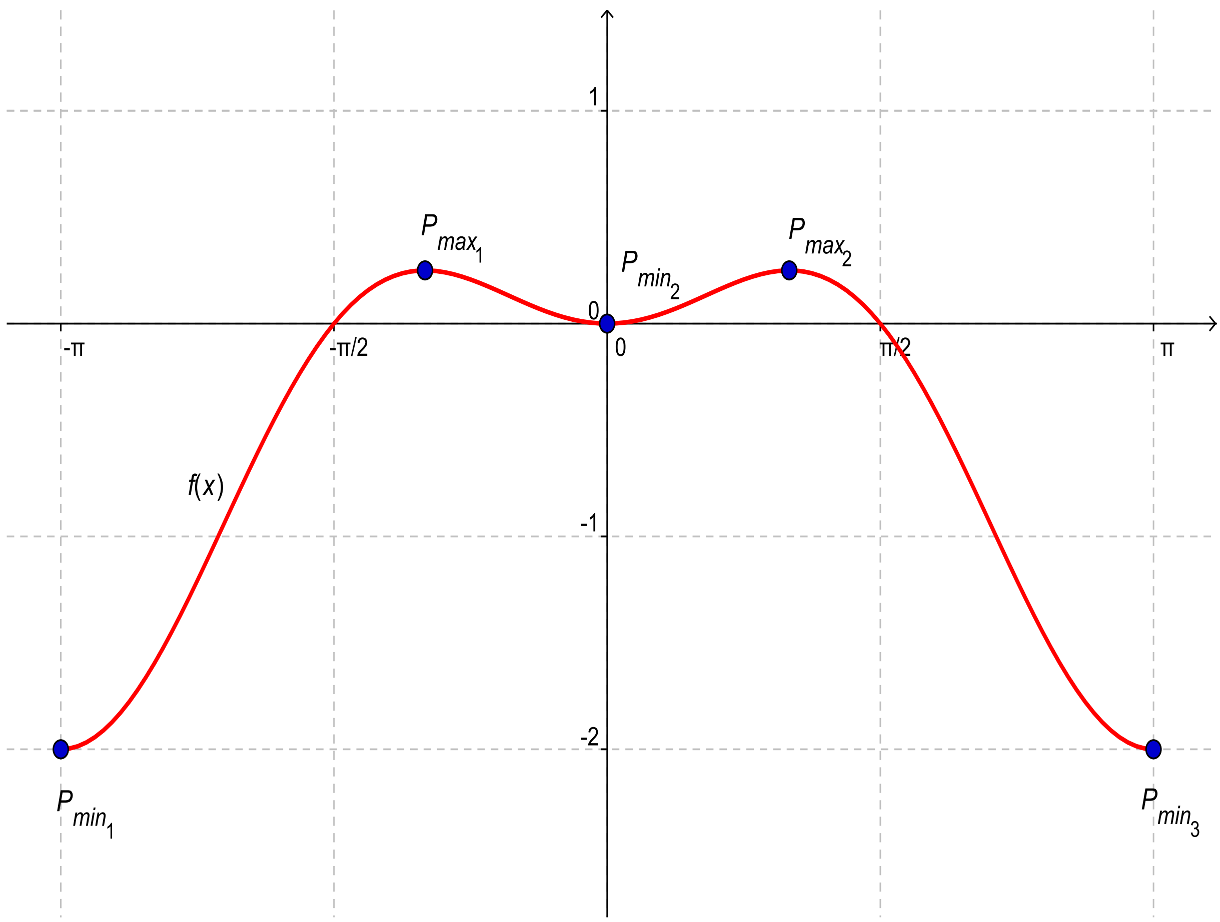
Továbbá

$$f''(x_{2,4}) = f''\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} < 0,$$

ezért az x_2 és x_4 helyeken lokális maximuma van a függvénynek:

$$P_{max_1}\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right) \qquad \text{és} \qquad P_{max_2}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right).$$

A függvény grafikonja:



5.9.27. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$, $D_f = \mathbb{R}$.

(a) f páros, mert két páratlan függvény szorzata:

$$f(-x) = -x \operatorname{arctg}(-x) = -x \cdot (-\operatorname{arctg} x) = x \operatorname{arctg} x = f(x).$$

A függvény zérushelyét az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásakor kapjuk:

$$x \operatorname{arctg} x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0.$$

Könnyen látható, hogy ha $x > 0$, akkor $\operatorname{arctg} x > 0$, így $f(x) > 0$. f párossága miatt $x < 0$ esetén ugyancsak $f(x) > 0$ áll fenn.

(b) Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} \qquad \text{és} \qquad f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

A stacionárius hely az

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} = 0$$

egyenlet megoldásakor adódik. Vizsgáljuk $f'(x)$ előjelét!

1. eset: Ha $x < 0$, akkor $\operatorname{arctg} x < 0$ és $\dfrac{x}{1+x^2} < 0$, így

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} < 0.$$

2. eset: Ha $x = 0$, akkor $\operatorname{arctg} x = 0$ és $\dfrac{x}{1+x^2} = 0$, így

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

3. eset: Ha $x > 0$, akkor $\operatorname{arctg} x > 0$ és $\dfrac{x}{1+x^2} > 0$, így

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} > 0.$$

Tehát az f függvénynek egyetlen stacionárius helye van:

$$x_1 = 0.$$

Mivel

$$f''(x_1) = f''(0) = 2 > 0,$$

ezért f-nek az $x_1 = 0$ helyen lokális minimuma van:

$$P_{min}(0, 0).$$

A fentiekből azonnal adódik, hogy az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $x < 0$, míg az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha $x > 0$.

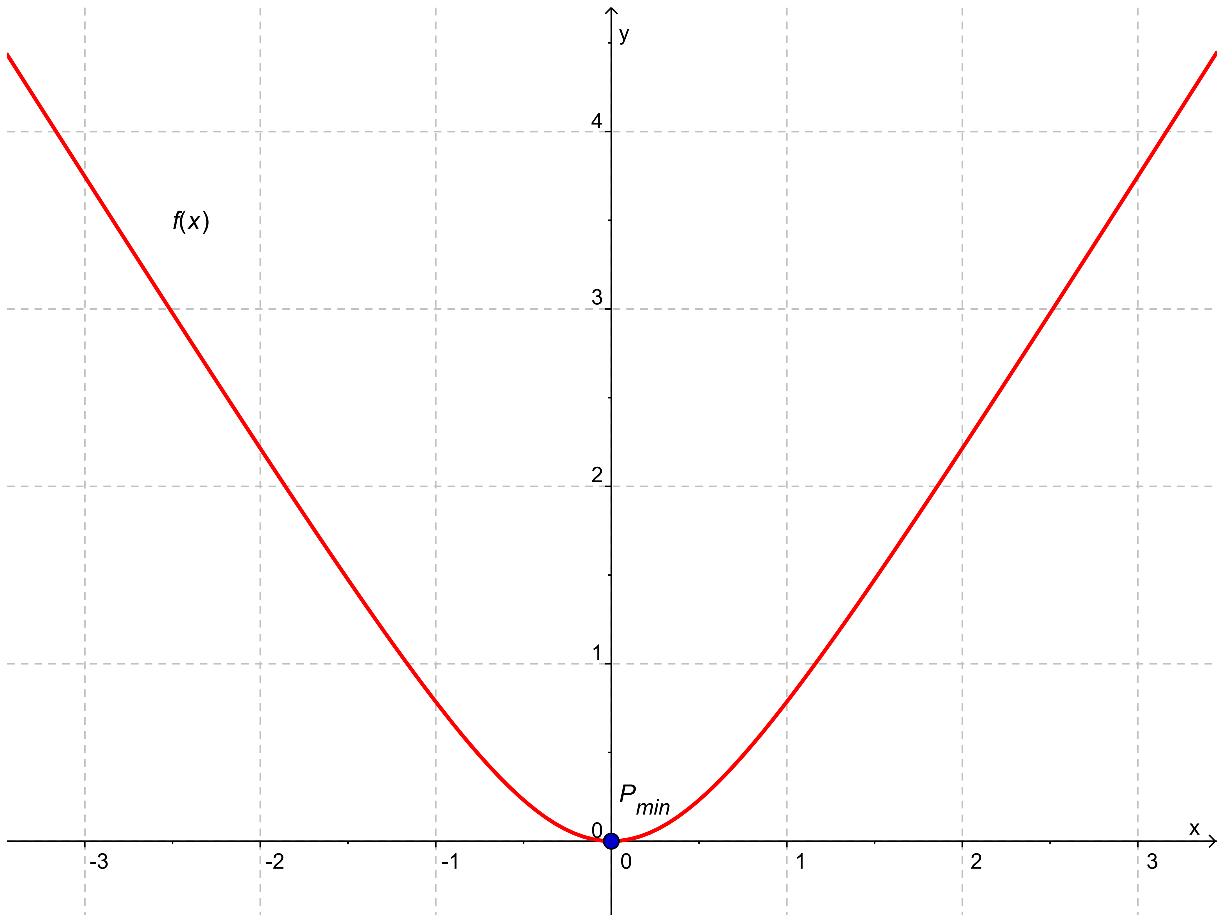
(c) f konvex D_f-en, mert $\forall x \in D_f$ esetén

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0.$$

f-nek tehát nincs inflexiós pontja.

(d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$

(e) $R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. A függvény grafikonja:



5.9.28. $f(x) = x - \operatorname{arctg} 2x$, $D_f = \mathbb{R}$.

(a) A függvény páratlan, mert két páratlan függvény különbsége:

$$f(-x) = -x - \operatorname{arctg} 2(-x) = -x + \operatorname{arctg} 2x = -(x - \operatorname{arctg} 2x) = -f(x).$$

(b) Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = \frac{4x^2-1}{4x^2+1} \qquad \text{és} \qquad f''(x) = \frac{16x}{(4x^2+1)^2}.$$

A stacionárius helyeket az

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} = 0$$

egyenlet megoldásakor kapjuk meg.

$$\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4x^2 = 1,$$

azaz

$$x^2 = \frac{1}{4}.$$

A függvénynek tehát két stacionárius helye van:

$$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Mivel

$$f''(x_1) = f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 < 0,$$

ezért f-nek az $x_1 = -\frac{1}{2}$ helyen lokális maximuma van:

$$P_{max}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Továbbá

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0,$$

ezért f-nek az $x_2 = 0$ helyen lokális minimuma van:

$$P_{min}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $f'(x) = \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} < 0$, vagyis ha $4x^2 - 1 < 0$, azaz ha

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

Az f függvény szigorúan monoton növekvő, ha $f'(x) = \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1} > 0$, vagyis ha $4x^2 - 1 > 0$, tehát

$$x < -\frac{1}{2} \qquad \text{vagy} \qquad x > \frac{1}{2}$$

esetén.

(c) Az inflexiós pont meghatározásához oldjuk meg az

$$f''(x) = \frac{16x}{(4x^2 + 1)^2} = 0$$

egyenletet!

$$\frac{16x}{(4x^2+1)^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 16x = 0,$$

vagyis

$$x_3 = 0.$$

Mivel $f'''(0) \neq 0$, ezért az f függvénynek inflexiós pontja van az $x_3 = 0$ helyen:

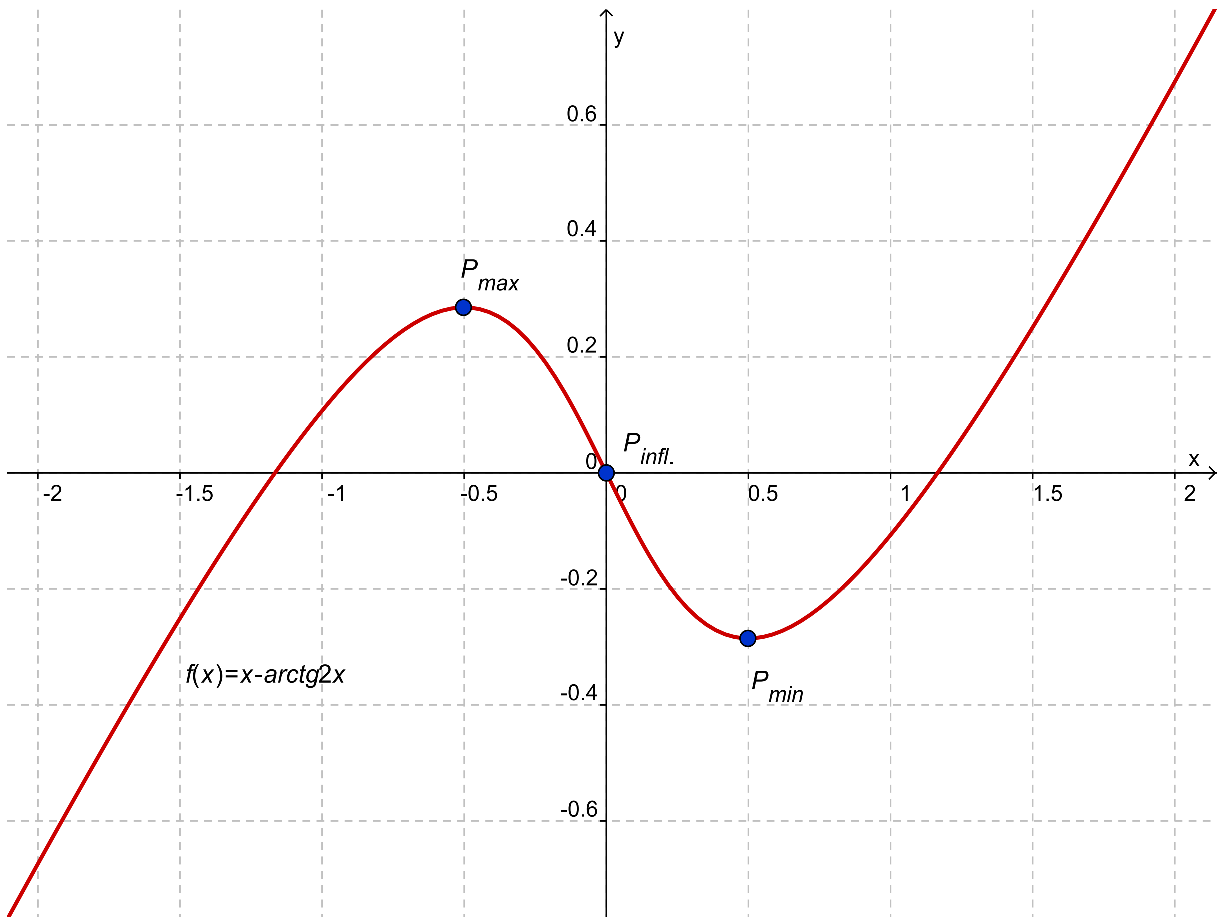
$$P_{infl}(0,0).$$

Az f függvény konvex, ha $f''(x) = \dfrac{16x}{(4x^2+1)^2} > 0$, vagyis ha $16x > 0$, azaz ha $x > 0$, míg f konkáv, ha $f''(x) = \dfrac{16x}{(4x^2+1)^2} < 0$, vagyis ha $16x < 0$, azaz ha $x < 0$.

(d) Határértékek:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

(e) $R_f = \mathbb{R}$. A függvény grafikonja:



5.9.29. $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ és $a, b \in \mathbb{R}$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1 \qquad \text{és} \qquad f''(x) = -\frac{a}{x^2} + 2b.$$

f-nek lokális szélsőértéke van az $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$ helyeken, azaz

$$f'(x_1) = f'(1) = 0 \qquad \text{és} \qquad f'(x_2) = f'(2) = 0,$$

vagyis

$$a + 2b + 1 = 0 \qquad \text{és} \qquad \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$$

egyszerre áll fenn. A két egyenletből álló, két ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer megoldása:

$$a = -\frac{2}{3} \qquad \text{és} \qquad b = -\frac{1}{6}.$$

Mivel

$$f''(x_1) = f''(1) = -a + 2b = \frac{1}{3} > 0,$$

vagyis f-nek az $x_1 = 1$ helyen lokális minimuma van. Továbbá

$$f''(x_2) = f''(2) = -\frac{a}{4} + 2b = -\frac{1}{6} < 0,$$

vagyis f-nek az $x_2 = 2$ helyen lokális maximuma van.

5.9.30. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 27$, $x \in \mathbb{R}$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 0 \qquad \text{és} \qquad f''(x) = 6x - 6.$$

A stacionárius helyeket az

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 0$$

egyenlet megoldásakor kapjuk meg. A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva adódik, hogy a függvénynek két stacionárius helye van:

$$x_1 = 4 \qquad \text{és} \qquad x_2 = -2.$$

Mivel

$$f''(x_1) = f''(4) > 0,$$

ezért f-nek az $x_1 = 4$ helyen lokális minimuma van:

$$P_{min}(4, -53).$$

Továbbá

$$f''(x_2) = f''(-2) < 0,$$

ezért f-nek az $x_2 = -2$ helyen lokális maximuma van:

$$P_{max}(-2, 55).$$

Az inflexiós pont meghatározásához oldjuk meg az

$$f''(x) = 6x - 6 = 0$$

egyenletet!

$$6x - 6 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_3 = 1.$$

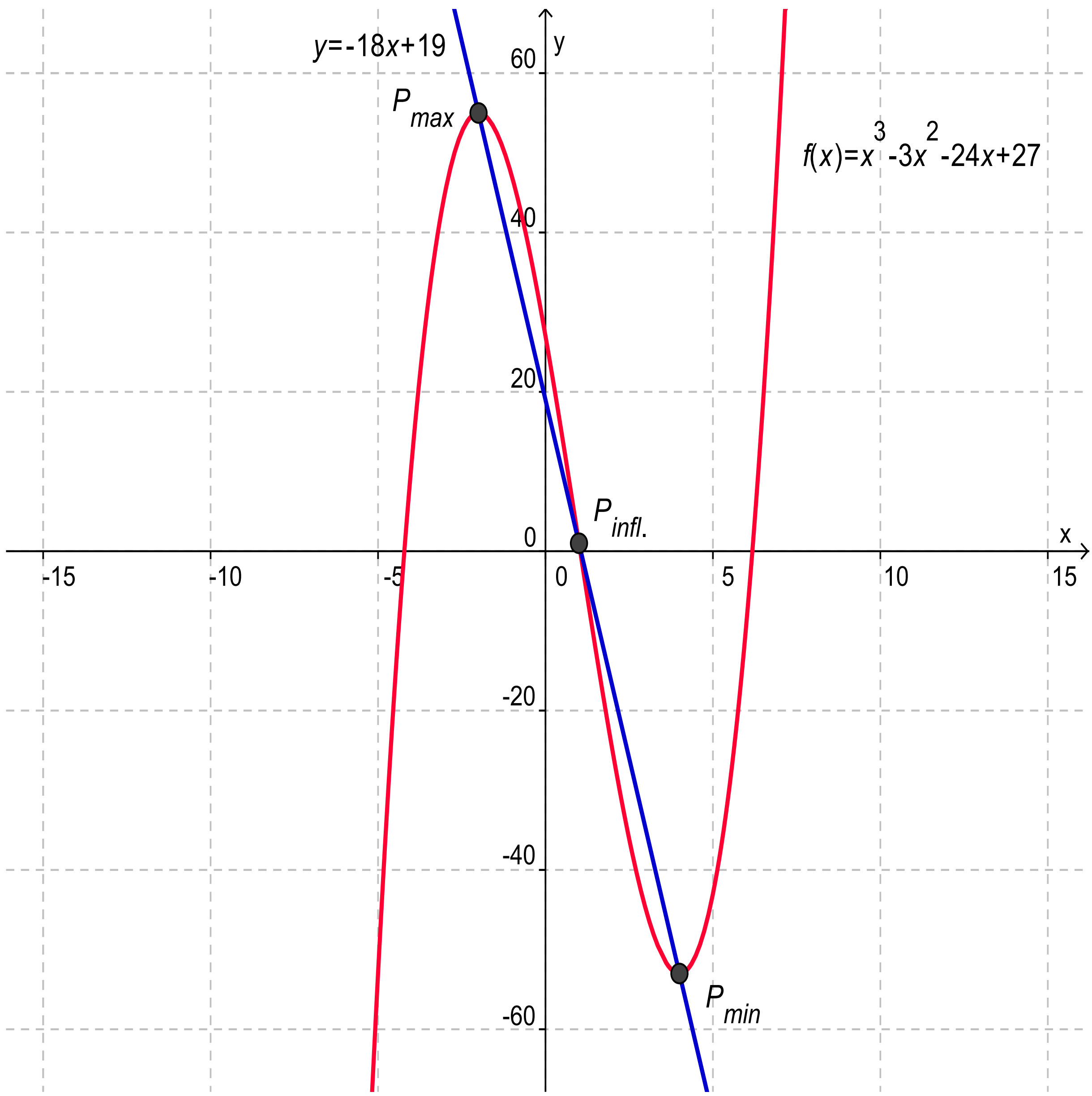
Mivel $f'''(x) = 6 \neq 0$, ezért az f függvénynek inflexiós pontja van az $x_3 = 1$ helyen:

$$P_{infl}\,(1, 1)\,.$$

A lokális szélsőértékpontokat összekötő egyenes egyenlete:

$$e: \quad y = -18x + 19.$$

Nyilvánvaló, hogy $P_{infl} \in e$. A függvény grafikonja:



5.10.1. A keresett számot jelölje x. A feladat az

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

függvény lokális szélsőértékeinek keresése. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \qquad \text{és} \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

A stacionárius helyeket az

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0$$

egyenlet megoldásakor kapjuk meg. Két stacionárius hely adódik:

$$x_1 = 1 \qquad \text{és} \qquad x_2 = -1,$$

de a feltétel miatt az $x_2 = -1$ hely nem jön számításba. Mivel

$$f''(x_1) = f''(1) = 2 > 0,$$

ezért f-nek az $x_1 = 1$ helyen lokális minimuma van:

$$P_{min}(1, 1).$$

Az f függvény $x_1 = 1$-től kezdve szigorúan monoton növekvő, így lokális maximum nincs.

5.10.2. Jelölje x és y a téglalap oldalainak hosszát! Ekkor $x > 0$ és $y > 0$, továbbá a feltétel miatt

$$2x + 2y = 16,$$

azaz

$$x + y = 8 \qquad \text{és} \qquad y = 8 - x.$$

A téglalap területe:

$$T = xy = x(8 - x) = 8x - x^2.$$

Tehát a $T(x) = 8x - x^2$ függvény lokális szélsőértékeit keressük a megadott feltételek mellett. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$T'(x) = 8 - 2x \qquad \text{és} \qquad T''(x) = -2.$$

Az egyetelen stacionárius helyet a

$$T'(x) = 8 - 2x = 0$$

egyenlet megoldásakor kapjuk. Az

$$x = 4$$

helyen lokális maximuma van a $T(x)$ függvénynek, mert $T''(x) = -2 < 0$. Azonnal adódik, hogy ha $x = 4$, akkor $y = 4$, vagyis a téglalap négyzet.

5.10.3. Az $f(x) = x - x^2$ függvény maximumát keressük, ha $x > 0$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = 1 - 2x \qquad \text{és} \qquad f''(x) = -2.$$

Az egyetelen stacionárius helyet az

$$f'(x) = 1 - 2x = 0$$

egyenlet megoldásakor kapjuk. Az

$$x = \frac{1}{2}$$

helyen lokális maximuma van az $f(x)$ függvénynek, mert $f''(x) = -2 < 0$.

5.10.4. $x > 0$ és $y > 0$, továbbá

$$x + y = 300 \qquad \text{és} \qquad y = 300 - x.$$

Az

$$f(x) = x^2 y = x^2(300 - x) = 300x^2 - x^3$$

függvény lokális szélsőértékeit keressük. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = 600x - 3x^2 \qquad \text{és} \qquad f''(x) = 600 - 6x.$$

Az stacionárius helyeket az

$$f'(x) = 600x - 3x^2 = 3x(200 - x) = 0$$

egyenlet megoldásakor kapjuk. Tehát

$$x_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 200.$$

Az $x_1 = 0$ hely nem jön számításba, mert a feladat feltételeinek megfelelően pozitív megoldásokat keresünk. Az $x_2 = 200$ helyen lokális maximuma van az $f(x)$ függvénynek, mert

$$f''(200) = 600 - 1200 = -600 < 0.$$

Azonnal adódik, hogy ha $x = 200$, akkor $y = 100$.

5.10.5. Jelölje (x, y) a keresett számpárt! A feltételek szerint $x > 0$ és $y > 0$, továbbá

$$x + y^2 = 10,$$

azaz

$$x = 10 - y^2.$$

A számpárban álló számok összege:

$$x + y = 10 - y^2 + y.$$

Vagyis az $f(y) = 10 + y - y^2$ függvény lokális maximumát keressük, ha $y > 0$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(y) = 1 - 2y \qquad \text{és} \qquad f''(y) = -2.$$

Az egyetelen stacionárius helyet az

$$f'(y) = 1 - 2y = 0$$

egyenlet megoldásakor kapjuk. Az

$$y = \frac{1}{2}$$

helyen lokális maximuma van az $f(y)$ függvénynek, mert a második derivált mindig negatív. Ha $y = \frac{1}{2}$, akkor

$$x = 10 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{39}{4}.$$

A keresett számpár:

$$\left(\frac{39}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

5.10.6. Jelölje (x, y) a keresett számpárt! A feltételek szerint $x > 0$ és $y > 0$, továbbá

$$x^2 + y^2 = 4,$$

vagyis az $y > 0$ feltétel miatt

$$y = \sqrt{4 - x^2}.$$

A számpárban álló számok köbének szorzata:

$$x^3y^3 = x^3 \cdot \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^3 = x^3(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2} = (4x^3 - x^5)\sqrt{4 - x^2}.$$

Tehát az $f(x) = (4x^3 - x^5)\sqrt{4 - x^2}$ függvény lokális maximumát keressük, ha $x > 0$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = (12x^2 - 5x^4)\sqrt{4 - x^2} - \frac{4x^4 - x^6}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad \text{és} \qquad f''(x) = \frac{30x^5 - 132x^3 + 96x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

A stacionárius helyeket az

$$f'(y) = (12x^2 - 5x^4)\sqrt{4 - x^2} - \frac{4x^4 - x^6}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{6x^6 - 36x^4 + 48x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{6x^2(x^4 - 6x^2 + 8)}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

egyenlet megoldásakor kapjuk.

$$\frac{6x^2(x^4 - 6x^2 + 8)}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 6x^2(x^4 - 6x^2 + 8) = 0.$$

Az egyenlet gyökei:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{2}, \quad x_3 = \sqrt{2}, \quad x_4 = -2, \quad x_5 = 2.$$

Az $x > 0$ feltétel miatt csak az $x_3 = \sqrt{2}$ és az $x_5 = 2$ gyökök jönnek számításba. Ha $x = 2$, akkor $y = 0$ adódna, ami szintén nem lehetséges az $y > 0$ feltétel miatt. Tehát csak az $x = \sqrt{2}$ megoldást kell vizsgálnunk a továbbiakban. Itt lokális maximuma van az $f(x)$ függvénynek, mert

$$f''(\sqrt{2}) = \frac{120\sqrt{2} - 264\sqrt{2} + 96\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -48 < 0.$$

Ha $x = \sqrt{2}$, akkor

$$y = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2}.$$

A keresett számpár:

$$\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right).$$

5.10.7. Jelölje (x, y) a keresett számpárt! A feltételek szerint $x > 0$ és $y > 0$, továbbá

$$x + y = 5,$$

azaz

$$y = 5 - x.$$

Az első komponens négyzetének és a második komponens köbének szorzata:

$$x^2y^3 = x^2\,(5 - x)^3 = x^2(125 - 75x + 15x^2 - x^3) = 125x^2 - 75x^3 + 15x^4 - x^5.$$

Tehát az $f(x) = 125x^2 - 75x^3 + 15x^4 - x^5$ függvény lokális maximumát keressük, ha $x > 0$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = 250x - 225x^2 + 60x^3 - 5x^4 \qquad \text{és} \qquad f''(x) = 250 - 450x + 180x^2 - 20x^3.$$

A stacionárius helyeket az

$$f'(x) = 250x - 225x^2 + 60x^3 - 5x^4 = 5x(50 - 45x + 12x^2 - x^3) = 5x(2 - x)(x - 5)^2 = 0$$

egyenlet megoldásakor kapjuk. Az egyenlet gyökei:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 5.$$

Az $x > 0$ feltétel miatt csak az $x_2 = 2$ és az $x_3 = 5$ gyökök jönnek számításba. Ha $x = 5$, akkor $y = 0$ adódna, ami szintén nem lehetséges az $y > 0$ feltétel miatt. Tehát csak az $x = 2$ megoldást kell vizsgálnunk a továbbiakban. Itt lokális maximuma van az $f(x)$ függvénynek, mert

$$f''(2) = 250 - 450 \cdot 2 + 180 \cdot 4 - 20 \cdot 8 = -90 < 0.$$

Ha $x = 2$, akkor

$$y = 5 - 2 = 3.$$

A keresett számpár:

$$(2, 3).$$

5.10.8. Az egyik részt jelölje x, a másik részt pedig $8 - x$. Az $f(x) = x^2 + (8 - x)^2$ függvény lokális minimumát keressük. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = 2x + 2 \cdot (8 - x) \cdot (-1) = 4x - 16 \qquad \text{és} \qquad f''(x) = 4.$$

A stacionárius helyet az

$$f'(x) = 2x + 2 \cdot (8 - x) \cdot (-1) = 4x - 16 = 0$$

egyenlet megoldásakor kapjuk, azaz

$$x = 4.$$

Ezen a helyen lokális minimuma van az f függvénynek, mert a második derivált mindig pozitív. Tehát a 8-at meg kell felezni ahhoz, hogy a keletkező részek négyzetösszege minimális legyen.

5.10.9. Jelölje x a tűzfallal párhuzamos oldalt, y pedig legyen a tűzfalra merőleges oldalak hossza. Ekkor $x > 0$, $y > 0$ és

$$xy = 600,$$

vagyis

$$y = \frac{600}{x}.$$

A telek kerülete:

$$K = x + 2y = x + \frac{1200}{x}.$$

Tehát a $K(x) = x + \dfrac{1200}{x}$ függvény lokális minimumát keressük, ha $x > 0$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$K'(x) = 1 - \frac{1200}{x^2} \qquad \text{és} \qquad K''(x) = \frac{2400}{x^3}.$$

A stacionárius helyek a

$$K'(x) = 1 - \frac{1200}{x^2} = 0$$

egyenlet megoldásakor adódhnak, azaz

$$x_1 = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3} \qquad \text{és} \qquad x_2 = -\sqrt{1200} = -20\sqrt{3}.$$

Az $x > 0$ feltétel miatt csak az x_1 gyök jön számításba. Itt lokális minimuma van a $K(x)$ függvénynek, mert a második derivált mindig pozitív, ha $x > 0$. Ha

$$x = 20\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{600}{20\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}.$$

A körülkerítendő téglalap alakú terület tűzfallal párhuzamos oldalát tehát $20\sqrt{3}$ méternek, míg a rá merőleges oldalt $10\sqrt{3}$ méternek kell megválasztani, hogy a terület 600 m^2 legyen és a legkevesebb kerítésdrótot használjuk.

5.10.10. Jelölje x a folyóval párhuzamos oldalt, y pedig legyen a folyóra merőleges oldalak hossza. Ekkor $x > 0$, $y > 0$ és

$$x + 2y = 2000,$$

vagyis

$$y = 1000 - \frac{1}{2}x.$$

A telek területe:

$$T = xy = x\left(1000 - \frac{1}{2}x\right) = 1000x - \frac{1}{2}x^2.$$

Tehát a $T(x) = 1000x - \frac{1}{2}x^2$ függvény lokális maximumát keressük, ha $x > 0$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$T'(x) = 1000 - x \qquad \text{és} \qquad T''(x) = -1.$$

A stacionárius hely a

$$T'(x) = 1000 - x = 0$$

egyenlet megoldásakor adódik, azaz

$$x = 1000.$$

Itt lokális maximuma van a $T(x)$ függvénynek, mert a második derivált mindig negatív. Ha

$$x = 1000 \qquad \Rightarrow \qquad y = 500.$$

A körülkerítendő téglalap alakú terület folyóval párhuzamos oldalát 1000 méternek, míg a rá merőleges oldalt 500 méternek kell megválasztani, hogy a terület maximális legyen és 2000 méter kerítéssel három oldalról körül tudjuk keríteni.

5.10.11. Jelölje x a négyzet alakú alap oldalainak hosszát, y pedig jelölje a doboz magasságát. Ekkor $x > 0$, $y > 0$ és

$$x^2 + 4xy = 600,$$

vagyis

$$y = \frac{600 - x^2}{4x}.$$

A doboz térfogata:

$$V = x^2y = x^2 \cdot \frac{600 - x^2}{4x} = 150x - \frac{x^3}{4}.$$

Tehát a $V(x) = 150x - \frac{x^3}{4}$ függvény lokális maximumát keressük, ha $x > 0$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$V'(x) = 150 - \frac{3}{4}x^2 \qquad \text{és} \qquad V''(x) = -\frac{3}{2}x.$$

A stacionárius helyek a

$$V'(x) = 150 - \frac{3}{4}x^2 = 0$$

egyenlet megoldásakor adódnak.

$$150 - \frac{3}{4}x^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = 200,$$

azaz

$$x_1 = -\sqrt{200} = -10\sqrt{2} \qquad \text{és} \qquad x_2 = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

Az $x > 0$ feltétel miatt az x_1 gyök nem jön számításba. Az $x_2 = 10\sqrt{2}$ helyen lokális maximuma van a $V(x)$ függvénynek, mert a második derivált mindig negatív, ha $x > 0$. Ha

$$x = 10\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{400}{40\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}.$$

A doboz négyzet alakú alapjának oldalát $10\sqrt{2}$ centiméternek, míg a magasságát $5\sqrt{2}$ centiméternek kell megválasztani, hogy a térfogat maximális legyen és 600 cm^2 papírt használjunk fel a felül nyitott doboz készítésekor.

5.10.12. Az egyik részt jelölje x, a másik részt pedig $a - x$. Az

$$f(x) = x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$$

függvény lokális minimumát keressük. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(x) = 4x - 2a \qquad \text{és} \qquad f''(x) = 4.$$

A stacionárius helyet az

$$f'(x) = 4x - 2a = 0$$

egyenlet megoldásakor kapjuk, azaz

$$x = \frac{a}{2}.$$

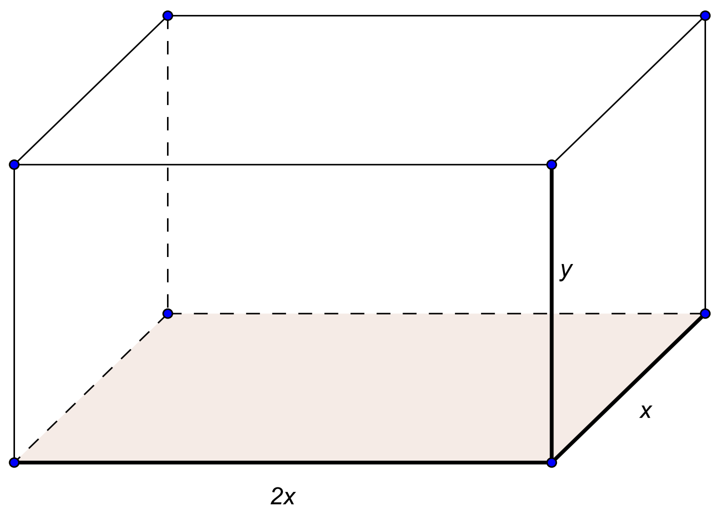
Ezen a helyen lokális minimuma van az f függvénynek, mert a második derivált mindig pozitív. Tehát az a távolságot meg kell felezni ahhoz, hogy a keletkező részekkel, mint oldalakkal szerkesztett négyzetek területének összege minimális legyen.

5.10.13. Az egy csúcsból kiinduló élek egyikét jelölje x, a másikat $2x$, a harmadikat pedig y. Ekkor $x > 0$, $y > 0$ és

$$12x + 4y = 720,$$

azaz

$$y = 180 - 3x.$$



A hasáb térfogata:

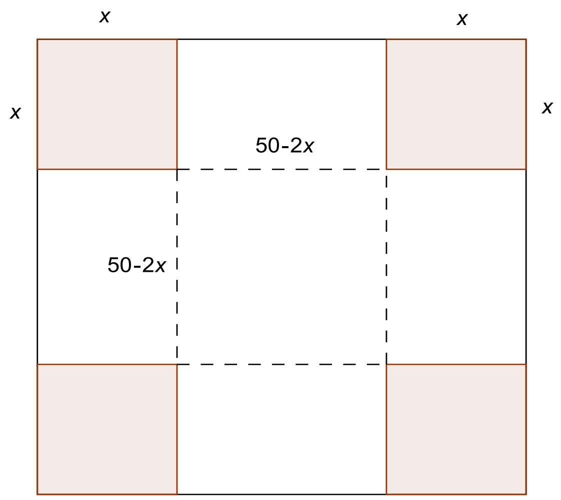
$$V = 2x^2y = 2x^2(180 - 3x) = 360x^2 - 6x^3.$$

Tehát a $V(x) = 360x^2 - 6x^3$ függvény lokális maximumát keressük, ha $x > 0$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$V'(x) = 720x - 18x^2 \qquad \text{és} \qquad V''(x) = 720 - 36x.$$

A stacionárius helyek a
$$V'(x) = 720x - 18x^2 = 18x(40 - x) = 0$$
egyenlet megoldásakor adódnak, azaz
$$x_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 40.$$
Az $x > 0$ feltétel miatt az x_1 gyök nem jön számításba. Az $x_2 = 40$ helyen lokális maximuma van a $V(x)$ függvénynek, mert a második derivált értéke ezen a helyen negatív:
$$V''(x) = 720 - 36 \cdot 40 = -720 < 0.$$
Ha
$$x = 40 \qquad \Rightarrow \qquad 2x = 80 \qquad \text{és} \qquad y = 60.$$
Az egy csúcsból kiinduló éleket tehát 40 mm, 80 mm és 60 mm hosszúságúra kell választani. A hasáb térfogata ekkor 192 cm^3.

5.10.14. Jelölje a kivágandó kis négyzetek oldalának hosszát x. Könnyen látható, hogy a kis négyzetek kivágása után téglatest hajtogatásához teljesülnie kell az alábbi feltételnek:
$$0 < x < 25.$$



A téglatest térfogata:
$$V = (50 - 2x)^2 \cdot x = 4x^4 - 200x^2 + 2500$$
Tehát a $V(x) = 4x^4 - 200x^2 + 2500$ függvény lokális maximumát keressük, ha $x > 0$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!
$$V'(x) = 12x^2 - 400x + 2500 \qquad \text{és} \qquad V''(x) = 24x - 400.$$
A stacionárius helyek a
$$V'(x) = 12x^2 - 400x + 2500 = 0$$

egyenlet megoldásakor adódnak, azaz

$$x_1 = \frac{25}{3} \qquad \text{és} \qquad x_2 = 25.$$

Az $x_2 = 25$ gyök nem jön számításba, mert ekkor nem lehet téglatestet hajtogatni. Az $x_1 = \frac{25}{3}$ helyen lokális maximuma van a $V(x)$ függvénynek, mert

$$V''\left(\frac{25}{3}\right) = 24 \cdot \frac{25}{3} - 400 = 200 - 400 = -200 < 0.$$

A keletkező téglatest térfogata akkor lesz maximális, ha a levágott kis négyzetek oldalainak hossza $\frac{25}{3}$ cm. Ekkor a test térfogata $\frac{250000}{27}$ cm^3.

5.10.20. Legyen y a belső kerítéssel párhuzamos oldalak hossza és jelölje x a másik két oldal hosszát! Ekkor $y > 0$ és $x > 0$, továbbá

$$A = xy,$$

azaz

$$y = \frac{A}{x}.$$

A kerítés hossza:

$$K = 3y + 2x = \frac{3A}{x} + 2x.$$

Tehát a $K(x) = \frac{3A}{x} + 2x$ függvény lokális minimumát keressük. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$K'(x) = -\frac{3A}{x^2} + 2 \qquad \text{és} \qquad K''(x) = \frac{6A}{x^3}.$$

A stacionárius helyek a

$$K'(x) = -\frac{3A}{x^2} + 2 = 0$$

egyenlet megoldásakor adódnak, azaz

$$x^2 = \frac{3}{2}A,$$

vagyis

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}A} \qquad \text{és} \qquad x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}A}.$$

Az x_1 gyök nem jön számításba, mert nem teljesíti az $x > 0$ feltételt. Az x_2 helyen a második derivált pozitív, így itt lokális minimuma van a $K(x)$ függvénynek. Ha $x = \sqrt{\frac{3}{2}A}$, akkor

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}A},$$

és

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{3}.$$

5.10.16. Jelölje x a kivágandó négyzet oldalának hosszát. Nyilvánvaló, hogy $0 < x < 15$. A négyzetek kivágása után meghajtogatott téglatest egy csúcsból kiinduló élei rendre:

$$30 - 2x, \quad 80 - 2x, \quad x.$$

A doboz térfogata:

$$V = (30 - 2x)(80 - 2x)x = 4x^3 - 220x^2 + 2400x.$$

Vagyis a $V(x) = 4x^3 - 220x^2 + 2400x$ függvény lokális maximumát keressük. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$V'(x) = 12x^2 - 440x + 2400 \qquad \text{és} \qquad V''(x) = 24x - 440.$$

A stacionárius helyek a

$$V'(x) = 12x^2 - 440x + 2400 = 0$$

egyenlet megoldásakor adódnak. Az

$$x = \frac{20}{3}$$

az egyetlen olyan stacionárius hely, amely eleget tesz a $0 < x < 15$ feltételnek. Itt a függvénynek lokális maximuma van, mert a második derivált negatív:

$$V''\left(\frac{20}{3}\right) = 24 \cdot \frac{20}{3} - 440 = -280 < 0.$$

A keletkező téglatest térfogata akkor lesz maximális, ha a levágott kis négyzetek oldalainak hossza $\frac{20}{3}$ cm. Ekkor a test térfogatának mérőszáma:

$$V = \frac{50}{3} \cdot \frac{200}{3} \cdot \frac{20}{3} = \frac{200000}{27}.$$

5.10.17. Jelölje a henger alapkörének sugarát r, a magasságát pedig x. Ekkor $r > 0$, $x > 0$ és

$$V = r^2\pi x = 8\pi,$$

azaz

$$x = \frac{8}{r^2}.$$

A felül nyitott henger az alapkörből és a palástból áll, így

$$A = r^2\pi + 2r\pi x = r^2\pi + 2r\pi\frac{8}{r^2} = r^2\pi + \frac{16\pi}{r}.$$

Tehát az $A(r) = r^2\pi + \dfrac{16\pi}{r}$ függvény lokális minimumát keressük, ha $r > 0$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$A'(r) = 2r\pi - \frac{16\pi}{r^2} \qquad \text{és} \qquad A''(r) = 2\pi + \frac{32\pi}{r^3}.$$

A stacionárius hely az

$$A'(r) = 2r\pi - \frac{16\pi}{r^2} = 0$$

egyenlet megoldásakor adódik, azaz

$$r = 2.$$

Mivel

$$A''(2) = 2\pi + \frac{32\pi}{2^3} > 0,$$

így az $A(r)$ függvénynek lokális minimuma van az $r = 2$ helyen. A henger magassága:

$$x = \frac{8}{2^2} = 2.$$

A henger elkészítéséhez 12 dm^2 lemez szükséges.

5.10.18. Jelölje a henger alapkörének sugarát r, a magasságát pedig m. Ekkor $r > 0$, $m > 0$ és

$$V = r^2\pi m = 10,$$

azaz

$$m = \frac{10}{r^2\pi}.$$

A zárt henger két körlapból és a palástból áll, így

$$A = 2r^2\pi + 2r\pi m = 2r^2\pi + 2r\pi\frac{10}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{20}{r}.$$

Tehát az $A(r) = 2r^2\pi + \dfrac{20}{r}$ függvény lokális minimumát keressük, ha $r > 0$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$A'(r) = 4r\pi - \frac{20}{r^2} \qquad \text{és} \qquad A''(r) = 4\pi + \frac{40}{r^3}.$$

A stacionárius hely az

$$A'(r) = 4r\pi - \frac{20}{r^2} = 0$$

egyenlet megoldásakor adódik, azaz

$$r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}.$$

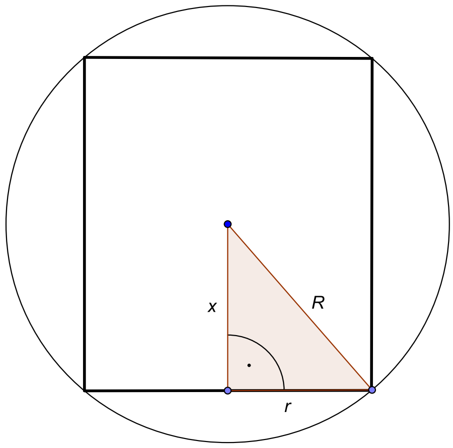
Mivel

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\right) > 0,$$

így az $A(r)$ függvénynek lokális minimuma van az $r = \sqrt[3]{\dfrac{5}{\pi}}$ helyen. A henger magassága:

$$m = \frac{10}{\left(\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\right)^2 \cdot \pi} = \sqrt[3]{\frac{40}{\pi}}.$$

5.10.19. Jelölje az R sugarú gömbbe írt maximális térfogatú henger alapkörének sugarát r, magasságának felét pedig x. Ekkor $r > 0$ és $x > 0$.



Alkalmazhatjuk Pitagorasz-tételét:
$$R^2 = r^2 + x^2,$$
azaz
$$r^2 = R^2 - x^2$$
A henger térfogata:
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot 2x = (R^2 - x^2) \cdot \pi \cdot 2x = 2R^2\pi x - 2\pi x^3.$$
Tehát a $V(x) = 2R^2\pi x - 2\pi x^3$ függvény lokális maximumát keressük, ha $x > 0$. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!
$$V'(x) = 2R^2\pi - 6\pi x^2 \qquad \text{és} \qquad V''(x) = -12\pi x.$$
A stacionárius helyek a
$$V'(x) = 2R^2\pi - 6\pi x^2 = 0$$
egyenlet megoldásakor adódnak, azaz
$$x^2 = \frac{R^2}{3},$$
így
$$x_1 = -\frac{R}{\sqrt{3}} \qquad \text{és} \qquad x_2 = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$
Az x_1 gyök az $x > 0$ feltétel miatt nem jön számításba. Az $x_2 = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ helyen lokális maximuma van a $V(x)$ függvénynek, mert
$$V''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = -12\pi\frac{R}{\sqrt{3}} < 0.$$
A maximális térfogatú henger alapkörének sugara:
$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}R,$$

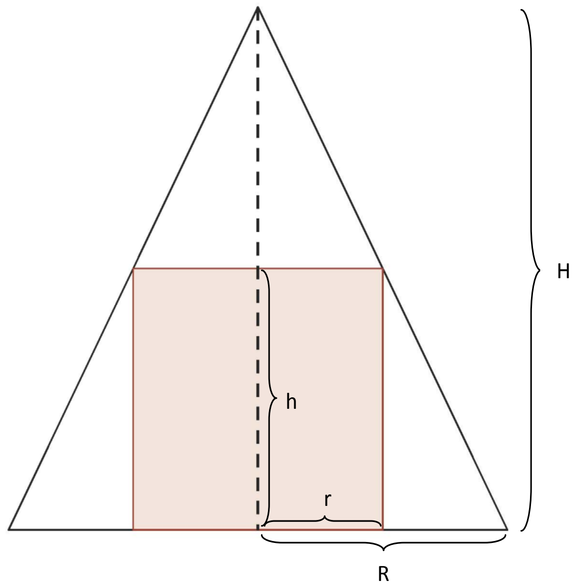
a henger magassága pedig:

$$m = 2x = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

A térfogat:

$$V = \frac{4}{3\sqrt{3}} R^3 \pi.$$

5.10.20. Legyen r a henger alapkörének sugara, h pedig a magassága. Ekkor $0 < r < R$ és $0 < h < H$.



A hasonló háromszögek miatt

$$\frac{r}{H-h} = \frac{R}{H},$$

azaz

$$r = \frac{R}{H}(H-h).$$

A henger térfogata:

$$V = r^2 \pi h = \frac{R^2}{H^2}(H-h)^2 \pi h = R^2 \pi h - \frac{2R^2 h^2 \pi}{H} + \frac{R^2 h^3 \pi}{H^2}.$$

Vagyis a $V(h) = R^2 \pi h - \dfrac{2R^2 h^2 \pi}{H} + \dfrac{R^2 h^3 \pi}{H^2}$ lokális maximumát keressük. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

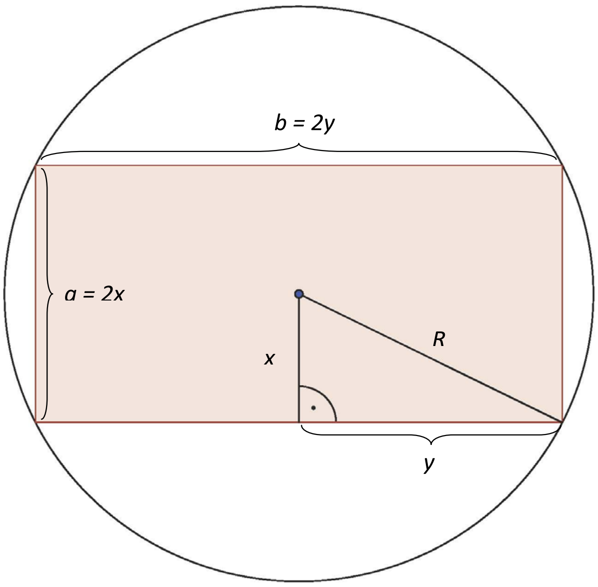
$$V'(h) = 2R^2 \pi - \frac{4R^2 h \pi}{H} + \frac{3R^2 h^2 \pi}{H^2} \qquad \text{és} \qquad V''(h) = -\frac{4R^2 \pi}{H} + \frac{6R^2 h \pi}{H^2}.$$

A

$$V'(h) = 2R^2 \pi - \frac{4R^2 h \pi}{H} + \frac{3R^2 h^2 \pi}{H^2} = \frac{R^2 \pi}{H^2}(H-h)(H-3h) = 0$$

egyenletből adódik, hogy
$$h = \frac{H}{3}$$
az egyetlen olyan stacionárius hely, amely eleget tesz a $0 < h < H$ feltételnek. Itt a függvénynek lokális maximuma van, mert
$$V''\left(\frac{H}{3}\right) = -\frac{4R^2\pi}{H} + \frac{2R^2\pi}{H} = -\frac{2R^2\pi}{H} < 0.$$
Az alapkör sugara:
$$r = \frac{2R}{3}.$$

5.10.21. Az R sugarú körbe írt maximális területű téglalap oldalait jelölje a és b. Továbbá vezessük be az alábbi jelöléseket is:
$$x = \frac{a}{2} \qquad \text{és} \qquad y = \frac{b}{2}.$$
Nyilvánvaló, hogy $x > 0$ és $y > 0$.



Pitagorasz-tétele szerint:
$$x^2 + y^2 = R^2,$$
azaz $y > 0$ miatt
$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$
A téglalap területe:
$$T = ab = 4xy = 4x\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Vagyis a $T(x) = 4x\sqrt{R^2 - x^2}$ függvény lokális maximumát keressük. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$T'(x) = 4\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} \qquad \text{és} \qquad T''(x) = \frac{-16x\sqrt{R^2 - x^2} + (4R^2 - 8x^2)\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}}{R^2 - x^2}.$$

A

$$T'(x) = 4\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 8x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$$

egyenletből

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

az egyetlen olyan stacionárius hely, amely eleget tesz az $x > 0$ feltételnek. Itt a függvénynek lokális maximuma van, mert

$$T''\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = -16 < 0.$$

Ha

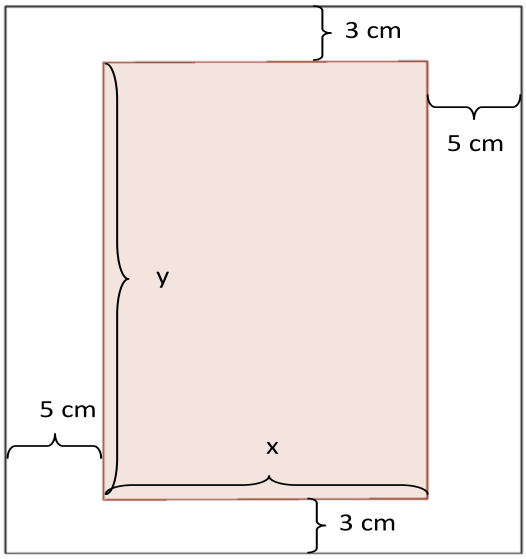
$$x = \frac{R}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{R}{\sqrt{2}},$$

továbbá

$$a = 2x = \sqrt{2}R \qquad \text{és} \qquad b = 2y = \sqrt{2}R.$$

A keresett téglalap tehát négyzet, amelynek területe $2R^2$.

5.10.22. Legyen x a nyomtatott sorok hossza, és legyen y a nyomtatott szöveg függőleges terjedelme. Nyilvánvaló, hogy $x > 0$ és $y > 0$.



A nyomtatott szöveg területe egy oldalon:

$$xy = 60 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{60}{x}.$$

A papír területe (a margókkal együtt):

$$P = (x+10)(y+6) = (x+10)\left(\frac{60}{x}+6\right) = 6\left(20+x+\frac{100}{x}\right).$$

Tehát a $P(x) = 6\left(20+x+\frac{100}{x}\right)$ függvény lokális minimumát keressük. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$P'(x) = 6\left(1-\frac{100}{x^2}\right) \qquad \text{és} \qquad P''(x) = \frac{1200}{x^3}.$$

A

$$P'(x) = 6\left(1-\frac{100}{x^2}\right) = 0$$

egyenletből

$$x = 10$$

az egyetlen olyan stacionárius hely, amely eleget tesz az $x > 0$ feltételnek. Itt a függvénynek lokális minimuma van van, mert a második derivált pozitív:

$$P''(10) = \frac{1200}{10^3} = \frac{6}{5} > 0.$$

A legkevesebb papír felhasználásához egy nyomtatott sor hossza 10 cm.

5.10.23. Az album téglalap alakú lapjainak szélességét jelölje x, a magasságát pedig y. Ekkor $x > 0$ és $y > 0$, valamint

$$xy = 600,$$

azaz

$$y = \frac{600}{x}.$$

A nyomtatott rész területe:

$$T = (x-6)(y-4) = (x-6)\left(\frac{600}{x}-4\right) = 624 - 4x - \frac{3600}{x}.$$

Tehát a $T(x) = 624 - 4x - \frac{3600}{x}$ függvény lokális maximumát keressük. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$T'(x) = -4 + \frac{3600}{x^2} \qquad \text{és} \qquad T''(x) = -\frac{7200}{x^3}.$$

A

$$T'(x) = -4 + \frac{3600}{x^2} = 0$$

egyenletből

$$x = 30$$

az egyetlen olyan stacionárius hely, amely eleget tesz az $x > 0$ feltételnek. Itt a függvénynek lokális maximuma van, mert a második derivált az $x = 30$ helyen negatív:

$$T''(30) = -\frac{7200}{30^3} = -\frac{4}{15} < 0.$$

Ha $x = 30$, akkor

$$y = \frac{600}{30} = 20.$$

Az oldal szélességét tehát 30 cm-nek, a magasságát pedig 20 cm-nek kell választani. A nyomtatott rész területének mérőszáma:

$$T = (30 - 6)(20 - 4) = 24 \cdot 16 = 384.$$

5.10.24. A téglalap alakú falragasz szélességét jelölje x, a magasságát pedig y. Ekkor $x > 0$ és $y > 0$, valamint

$$xy = 80 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{80}{x}.$$

A nyomtatott rész területe:

$$T = (x - 3)(y - 2) = (x - 3)\left(\frac{80}{x} - 2\right) = 86 - 2x - \frac{240}{x}.$$

Tehát a $T(x) = 86 - 2x - \dfrac{240}{x}$ függvény lokális maximumát keressük. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$T'(x) = -2 + \frac{240}{x^2} \qquad \text{és} \qquad T''(x) = -\frac{480}{x^3}.$$

A

$$T'(x) = -2 + \frac{240}{x^2} = 0$$

egyenletből

$$x = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$$

az egyetlen olyan stacionárius hely, amely eleget tesz az $x > 0$ feltételnek. Itt a függvénynek lokális maximuma van, mert a második derivált az $x = 2\sqrt{30}$ helyen negatív:

$$T''(2\sqrt{30}) = -\frac{480}{240\sqrt{30}} = -\frac{2}{\sqrt{30}} < 0.$$

Ha $x = 2\sqrt{30}$, akkor

$$y = \frac{80}{2\sqrt{30}} = \frac{40}{\sqrt{30}} = 4\sqrt{\frac{10}{3}}.$$

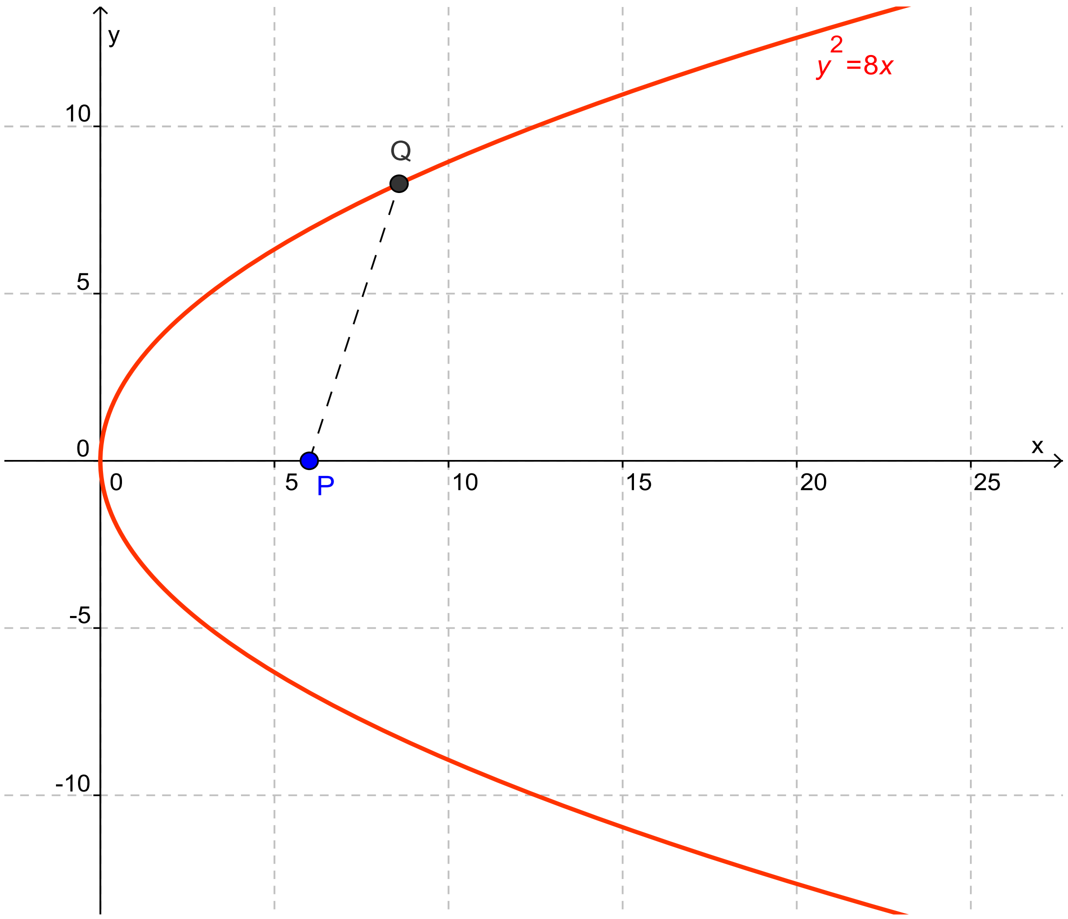
Az falragasz szélességét tehát $2\sqrt{30}$ cm-nek, a magasságát pedig $4\sqrt{\dfrac{10}{3}}$ cm-nek kell választani.

5.10.25. Jelölje d a $P(6,0)$ pont és a parabola $Q(x,y)$ pontja közötti távolságot! Ekkor

$$d = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}.$$

A $Q(x,y)$ pont rajta van az $y^2 = 8x$ parabolán. Vezessük be az $y = a$ jelölést! Ekkor $x = \frac{a^2}{8}$. A $Q\left(\frac{a^2}{8}, a\right)$ pont és a $P(6,0)$ pont távolsága:

$$d = \sqrt{\left(\frac{a^2}{8} - 6\right)^2 + a^2}.$$



d minimuma helyet vizsgálhatjuk az

$$f(a) = d^2 = \left(\frac{a^2}{8} - 6\right)^2 + a^2 = \frac{a^4}{64} - \frac{a^2}{2} + 36.$$

függvény lokális minimumát. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(a) = \frac{a^3}{16} - a \qquad \text{és} \qquad f''(a) = \frac{3a^2}{16} - 1.$$

A stacionárius helyeket az

$$f'(a) = \frac{a^3}{16} - a = 0$$

egyenlet megoldásai adják. Három stacionárius helyet kapunk:

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 4, \qquad a_3 = -4.$$

Mivel

$$f''(0) = -1 < 0,$$

így f-nek az $a_1 = 0$ helyen lokális maximuma van. Továbbá

$$f''(\pm 4) = 2 > 0,$$

tehát az $a_2 = 4$ és az $a_3 = -4$ helyeken lokális minimuma van a vizsgált függvéynek. Vagyis a $P(6,0)$ ponthoz az $y^2 = 8x$ parabola

$$Q_1(2,4) \qquad \text{és} \qquad Q_2(2,-4)$$

pontjai vannak a legközelebb.

5.10.26. Jelölje d a $P(0,1)$ pont és a hiperbola $Q(x,y)$ pontja közötti távolságot! Ekkor

$$d = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}.$$

Az (x,y) pont rajta van az $x^2 - y^2 = 2$ hiperbolán. Ekkor

$$x^2 = 2 + y^2,$$

azaz

$$x = \pm\sqrt{2+y^2},$$

így $Q(\pm\sqrt{2+y^2}, y)$ és a $P(0,1)$ pont távolsága:

$$d = \sqrt{2 + y^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2y^2 - 2y + 3}.$$

d minimuma helyet vizsgálhatjuk az

$$f(y) = d^2 = 2y^2 - 2y + 3.$$

függvény lokális minimumát. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$f'(y) = 4y - 2 \qquad \text{és} \qquad f''(y) = 4 > 0.$$

A stacionárius hely az

$$f'(y) = 4y - 2 = 0$$

egyenlet megoldásakor adódik, azaz

$$y = \frac{1}{2}.$$

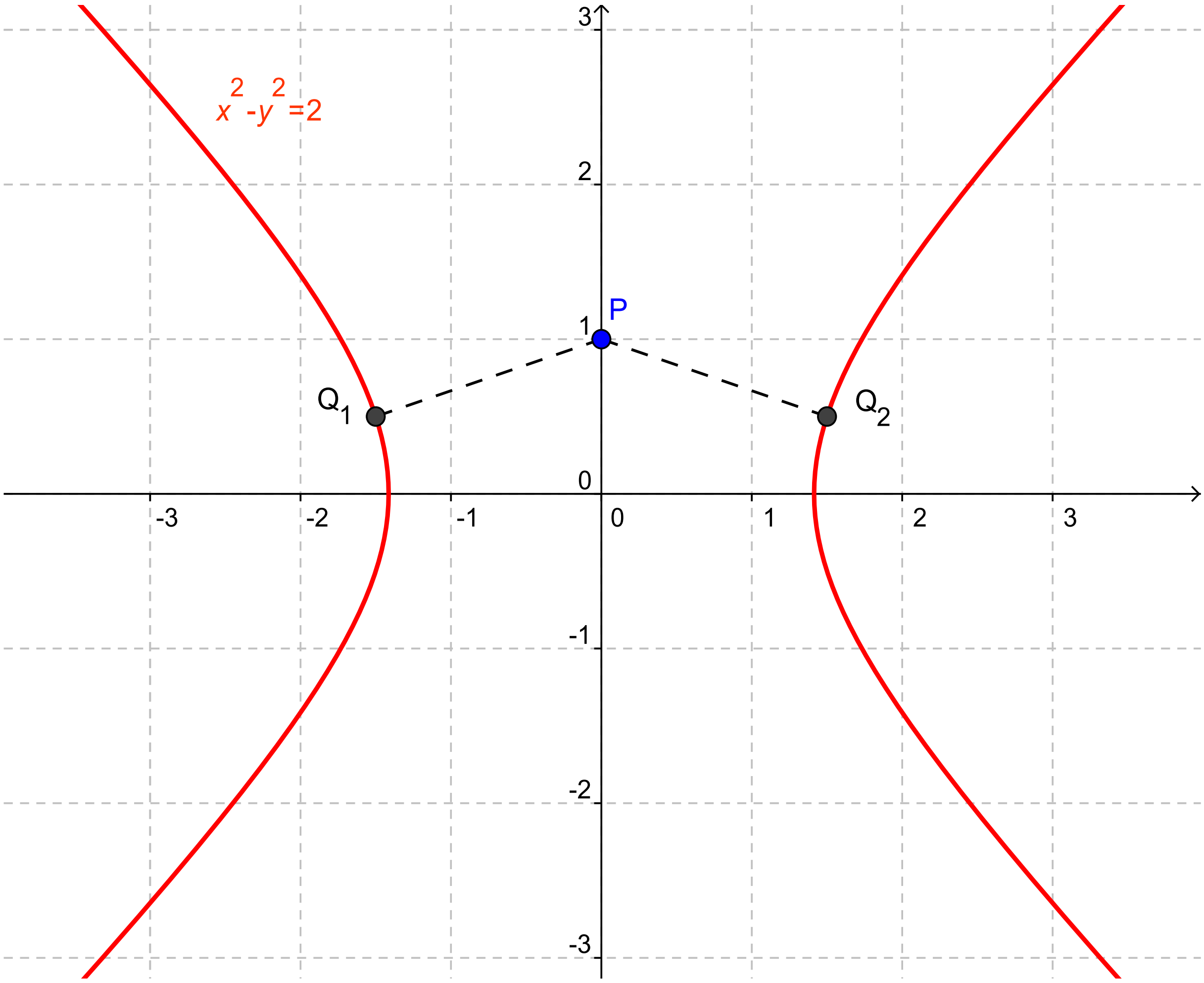
Ezen a helyen lokális minimuma van az $f(y)$ függvénynek, mert a második derivált mindig pozitív. Ha $y = \frac{1}{2}$, akkor

$$x = \pm\sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}.$$

Tehát a $P(0,1)$ ponthoz az $x^2 - y^2 = 2$ hiperbola

$$Q_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad \text{és} \qquad Q_2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

pontjai vannak a legközelebb.



5.10.27. Az ablak egy téglalapból és egy félkörből áll. Jelölje $2x$ a téglalapnak azt az oldalát, amelyre a félkör illeszkedik és jelölje y a téglalap másik oldalának hosszát. Nyilvánvaló, hogy $x > 0$ és $y > 0$, továbbá az ablak kerülete:

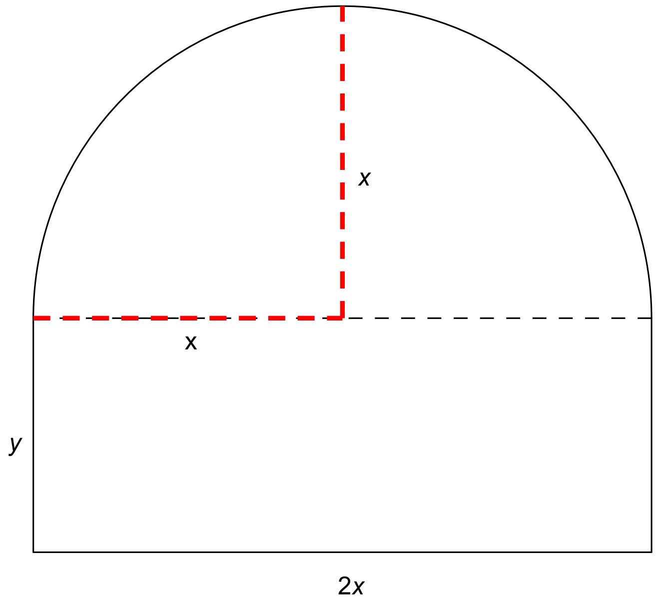
$$K = x\pi + 2x + 2y,$$

azaz

$$y = \frac{K - x\pi - 2x}{2}.$$

Az ablak területe:

$$T = \frac{x^2\pi}{2} + 2xy = \frac{x^2\pi}{2} + 2x \cdot \frac{K - x\pi - 2x}{2} = Kx - 2x^2 - \frac{x^2\pi}{2}.$$



Tehát a $T(x) = Kx - 2x^2 - \dfrac{x^2\pi}{2}$ függvény lokális maximumát keressük. Számoljuk ki az első és a második deriváltat!

$$T'(x) = K - 4x - \pi x \qquad \text{és} \qquad T''(x) = -4 - \pi < 0.$$

A

$$T'(x) = K - 4x - \pi x = K - x(4 + \pi) = 0$$

egyenletből

$$x = \frac{K}{4 + \pi}$$

adódik. Itt a függvénynek lokális maximuma van, mert a második derivált mindig negatív. Ha

$$x = \frac{K}{4+\pi} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{K - \frac{K}{4+\pi} \cdot \pi - 2 \cdot \frac{K}{4+\pi}}{2} = \frac{K}{4+\pi},$$

azaz

$$y = x.$$

Az ablak területe:

$$T = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{K}{4+\pi}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{K}{4+\pi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\left(\frac{K}{4+\pi}\right)^2.$$

5.10.28. Jelölje a derékszögű háromszög két befogójának hosszát x és y. Ekkor $x > 0$, $y > 0$ és az állandó K kerület miatt a háromszög átfogójának hossza:

$$K - x - y.$$

A Pitagorasz-tétel szerint

$$x^2 + y^2 = (K - x - y)^2$$

Deriváljuk az így kapott implicit alakú függvényt! Ekkor $y = y(x)$ miatt

$$2x + 2yy' = 2(K - x - y)(-1 - y'),$$

azaz

$$y' = \frac{y - K}{K - x}.$$

A derékszögű háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2}xy.$$

Az x változó szerinti első derivált:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}xy' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x \cdot \frac{y - K}{K - x} = \frac{1}{2}K \cdot \frac{y - x}{K - x}.$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$\frac{dT}{dx} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y,$$

azaz a derékszögű háromszög befogói egyenlőek, tehát egyenlőszárú derékszögű háromszögről van szó. Ekkor a Pitagorasz-tétel értelmében

$$2x^2 = (K - 2x)^2,$$

azaz $x > 0$ miatt

$$\sqrt{2}x = K - 2x,$$

tehát a befogók hossza:

$$x = \frac{K}{2 + \sqrt{2}}.$$

A K kerületű derékszögű háromszögek közül a legnagyobb területű háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{K}{2 + \sqrt{2}}\right)^2.$$

Irodalomjegyzék

[1] Ábrahám I.: *Analízis*, 3. kötet (Feladatgyűjtemény), Mozaik Kiadó, Szeged, 2005.

[2] Császár Á.: *Valós analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[3] Denkinger G.: *Analízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[4] Denkinger G., Gyurkó L.: *Analízis gyakorlatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

[5] Dömötör F., Huszthy L., Raisz Péterné, Szalontai I., Tóth B.: *Egyváltozós függvények analízise*, Példatár, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 2009.

[6] Gerőcs L., Orosz GY., Paróczay J., Szászné Simon J.: *MATEMATIKA* Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. , Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

[7] Gyemidovics B. P.: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, 1974.

[8] Kocsis I.: *Matematikai feladatgyűjtemény I. (Halmazok, relációk, valós számsorozatok)*, Oktatási segédlet, Debrecen, 2006.

[9] Kovács J., Takács G., Takács M.: *Analízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

[10] Mendelson E.: *Matematikai példatár az analízis témaköréből*, PANEM - McGRAW-HILL, Budapest, 1995.

[11] Monostori I. (szerk.): *Matematika példatár I-II. kötet (A matematika alapjai, Egyváltozós valós függvények)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[12] Nagy B., Szigeti J.: *Matematikai alapismeretek feladatgyűjtemény*, Miskolc, 1986.

[13] Rimán J.: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.

[14] Rontó M., Lengyelné Szilágyi Sz.: *Kalkulus*, Elektronikus jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2011.

[15] Skljarszkij D. O., Csencov N. N., Jaglom I. M.: *Válogatott feladatok az elemi matematika köréből I. (Aritmetika és algebra)*, Typotex Kiadó, 2000.

[16] Sümegi L.: *Matematikai feladatok haladóknak*, Studium, Debrecen, 2000.

[17] Szarka Z., Raisz Péterné, Raisz P.: *Differenciál- és integrálszámítás*, NOVOTNI Kiadó, Miskolc, 2006.

[18] Urbán J.: *Határértékszámítás*, Példatár, MOZAIK Oktatási Stúdió, Szeged, 1994.