6. gyakorlat

Matematikai analízis I.
2015. október 12.

1. A $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ határérték kiszámításával vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e és konvergencia esetén adjuk meg az összegüket!

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$; c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2-4n-3}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+3n}$;

   e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2\,(n+1)^2}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2. Vizsgáljuk meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából! Konvergencia esetén számítsuk ki a sor összegét!

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{n+2}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^{2n-1}}$; e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{9^n}-\frac{2}{9^n}\right)$;

   f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{10^n}$; g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$; h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{4^{2n}}$; h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{2n+1}}$; i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n}-\frac{2}{5^{n+1}}\right)$.

3. A divergencia-kritérium segítségével mutassuk ki az alábbi sorokról, hogy divergensek!

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{8n^3-5}+2n}$; c) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \sqrt{n}$; d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln n$;

   e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[2]{n^4}}{\sqrt[3]{n^6}}$; g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{e}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n$.

4. Mutassuk meg a majoráns kritériummal, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens!

5. Igazoljuk a minoráns kritériummal, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hiperharmonikus sor divergens, ha $0<\alpha<1$!

6. Állapítsuk meg, hogy az alábbi hiperharmonikus sorok közül melyek konvergensek!

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{2}{3}}$;

   e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{5}{4}}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^7}}$; g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[2]{n^4}}{\sqrt[3]{n^6}}$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[10]{n^8}\right)^{-2}$.

7. Az összehasonlító kritériumok segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek!

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3-3}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+5}{n^3-2n^2-5}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n-6}{n^4+3n^2+5}$;

   e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}+1}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n+5n}$; g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

8. A Cauchy-féle gyökkritérium segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek!

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-5}{2n}\right)^n$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4\cdot 7^n}{8^n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)\,3^n}{n^n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-5n-3}{n^2+100n+2}\right)^n$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2+5\right)3^n}{4^n}$; g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{(1.01)^n}$; h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{e^n}{n}$.

9. A D'Alambert-féle hányadoskritérium segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek!

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2+5\right)3^n}{4^n}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(2n+1)\cdot 5^n}$; g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^n}{3^n n!}$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

10. A Leibniz-kritérium felhasználásával vizsgáljuk meg az alábbi sorok konvergenciáját!

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$.

11. Vizsgáljuk meg, hogy abszolút konvergensek, feltételesen konvergensek vagy divergensek-e az alábbi sorok!

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{2n+1}}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^5}{3^n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^n$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+5}{n^2+n}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\,(-2)^n}{5^n}$; g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$; h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$.

12. Alkalmasan választott kritérium segítségével döntsük el az alábbi sorokról, hogy konvergensek-e vagy divergensek!

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7n-2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{50^n}{n!}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^2+2}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$; g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{(1.001)^n}$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}}$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n\cdot n!}$; j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\ln n$; k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[5]{n^{12}}}$; l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$;

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{(1.01)^n}$; n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+6}{4^n-2n}$; o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$; p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n\sqrt{n}}$;

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2n-3}{3n^4+2n^2+1}$; r) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{e^n}$; s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$.