

I. zárthelyi dolgozat az Analízis I. c. tárgyból (GEMAN 151B)
I. éves hallgatók részére

1. Legyen $A = \mathcal{P}(\{a, b\})$ és $B = \mathcal{P}(\{b, c\})$.

a) Adja meg az A és B halmazokat elemeik felsorolásával! (2 pont)

b) Határozza meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ és $A \Delta B$ halmazokat! (5 pont)

c) Diszjunktak-e az A és B halmazok? Válaszát indokolja! (3 pont)

2. Legyen $A = \{a \in \mathbb{N} \mid 3 < |a - 5| < 10\}$ és $B = \left\{b \in \mathbb{Z} \mid \left\lfloor \frac{b}{2} + 3 \right\rfloor < 1\right\}$.

a) Legyen $\rho \subset A \times B$ és $a\rho b \Leftrightarrow -a > b$. Adja meg a ρ relációt az elempárok felsorolásával! (3 pont)

b) Függvény-e a ρ reláció? Válaszát indokolja! (2 pont)

c) Legyen $\sigma \subset B \times B$ és $a\sigma b \Leftrightarrow ab > 30$. Adja meg a σ relációt az elempárok felsorolásával! (3 pont)

d) Reflexív-e a σ reláció? Válaszát indokolja! (2 pont)

e) Adja meg a $\sigma^2 \circ \sigma^3$ relációt! (3 pont)

3. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvény bijektív-e! Válaszát indokolja! (6 pont)

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ x - 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

4. Adott az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{n^2 - 1}{4n^2 + 1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat.

a) Monoton-e a sorozat? Válaszát indokolja! (4 pont)

b) Korlátos-e a sorozat? Ha igen, adja meg $\inf\{a_n\}$ és $\sup\{a_n\}$ értékét! (4 pont)

c) Konvergens-e a sorozat? Válaszát indokolja! (2 pont)

5. Cauchy-sorozat-e az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat? Válaszát indokolja! (5 pont)

6. Számítsa ki az alábbi határértékeket, ha léteznek! (6 pont)

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+3} =$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n+3} =$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-3n} =$