Dr. Rontó Miklós

Előadásjegyzet

Dinamikus gazdasági modellek
c. tárgyhoz

Gazdaságinformatikus MSc hallgatóknak
Közgazdász PhD hallgatóknak
Egyetemi szintű közgazdasági programozó matematikus hallgatóknak

(heti 3+1 óra)

Miskolci Egyetem Matematikai Intézet
Analízis Tanszék
2006

Előszó

A gazdaságinformatikus MSc hallgatóknak, egyetemi szintű közgazdasági programozó matematikus, illetve közgazdász doktoranduszoknak szóló előadásjegyzet egyszerű dinamikus közgazdasági modelleket mutat be. A gazdasági modellek ismertetését, tanulmányozását minden esetben a szükséges matematikai módszerek leírása előzi meg.
A differenciálegyenletek, illetve differenciaegyenletek elméletének ismertetése során a matematikai egzaktságot, az elmélet gyakorlatba való átültetését, a könnyű olvashatóságot tartottuk szem előtt. Kiemeltük a definíciókat, tételeket, bizonyításokat, példákat. Az olvasónak el kell hinnie, hogy a közgazdasági részek matematikai modelljeinek megértéséhez szükségképpen meg kell ismerkednie az előadásjegyzetben közölt új matematikai fogalmakkal és tételekkel a differenciál-, illetve differenciaegyenletek területén.
A heti felbontás mind a tananyagban, mind a tartalomjegyzékben is megtalálható, ezzel is segítve a hallgatókat a szükséges ismeretek elsajátításában.
Előre is köszönetet mondok azon kollégáimnak, akik az előadásjegyzet olvasása során tanácsaikkal, javaslataikkal megkeresnek.

Miskolc, 2006. február

A szerző

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék 3
1. Bevezetés a gazdasági modellekbe 5
1.1. A statikus és dinamikus modellekről 5
1.3 Egy áru piacának kétféle dinamikus modellje 8
2. Differenciálegyenletekkel kapcsolatos alapfogalmak, tulajdonságok 13
2.1 Közönséges differenciálegyenlet fogalma 13
2.2 Kezdetiérték-feladat megoldásának létezése és egyértelműsége 16
3. Elemi integrálási módszerrel megoldható differenciálegyenletek 26
3.1 Szétválasztható változójú differenciálegyenletek 27
3.2. Elsőrendű lineáris homogén DE 30
3.3. Elsőrendű lineáris inhomogén DE 31
4. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek 34
4.1 Konstans együtthatós homogén egyenletek 35
4.2 Állandó együtthatójú inhomogén egyenletek 38
5. Egyes differenciálegyenletes gazdasági modellek 44
5.1 Domor klasszikus növekedési modellje 44
5.2 Solow neoklasszikus növekedési modellje 45
5.3 Egy mikroökonómiai kereslet-kínálat modell 47
6. Változó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszerek 52
6.1 Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek alaptulajdonságai 52
6.2 Lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszerek 56
7. Állandó együtthatójú, homogén differenciálegyenlet-rendszerek 61
7.1 Az alapmátrix meghatározása 61
8. Ljapunov-féle stabilitás 69
8.1 Stabilitási fogalmak 70
8.2 Lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszerek stabilitása 74
8.3 Lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszer stabilitása 78
9. Állandó együtthatójú lineáris homogén DER stabilitása 80
9.1. Routh-Hurwitz kritérium a gyökök valós részének negativitására. 84
10. Egyes gazdasági modellek stabilitási vizsgálata 86
10.1 Philips stabilizációs modellje zárt makrogazdaságra 86
10.2 Philips három típusú stabilizációs eljárása 88
11. A Leontief-féle dinamikus input-output modell 94
11.1 Kétszektoros Leontief-féle dinamikus modell vizsgálata 96
12. A differenciálegyenletes dinamikus modellekről 101
12.1 Samuelson differenciaegyenletes akcelerációs modellje egy ország makrogazdaságának fejlődésére 101
13. A Differenciaegyenletek alaptulajdonságai 105
13.1 Kezdetiérték-feladat megoldásának létezése és egyértelműsége 105
13.2 Elsőrendű lineáris differenciaegyenlet 106
13.3 Differenciaegyenletek megoldásainak stabilitása 108
13.4 Másodrendű konstans együtthatós lineáris differenciaegyenletek 109
13.5 Elsőrendű autonóm nemlineáris differenciaegyenlet stabilitásáról 113
14. Egyes differenciaegyenletes gazdasági modellek 117
14.1 A banki kölcsön törlesztésének modellje [1, 126. old] 117
14.2 A kereslet-kínálat pókhálómodellje (a piaci egyensúly) 117
14.3 Goodwin piacmodellje 122
14.4 Samuelson differenciaegyenletes modelljének megoldása 124

14.5 Hicks akcelerációs modellje 128
Irodalom 129

1. Bevezetés a gazdasági modellekbe

1.1. A statikus és dinamikus modellekről

A matematikai közgazdaságtanban kétféle modellt alkalmazunk: **statikus** illetve **dinamikus** matematikai leírásokat.
A statikai modellek matematikai megalapozásának eszközeit a már jól ismert algebrai (lineáris algebrai) módszerek adják. A statikus modellekben a gazdasági folyamatot vagy rendszert leíró mennyiségek csak egy időpontban vagy egy időszakra vonatkozó értékként szerepelnek. Például az általános egyensúlyelmélet alapmodelljében (Arrow és Debren, 1954) a kereslet, a kínálat és az árvektor egy időpontra vonatkozik.
Még egy jó példa a statikus modellekre vonatkozóan az ún. Leontief-féle input-output termelési modell. Ismeretes, hogy ez a modell a gazdaság különböző ágazatai között létező kapcsolatok mérlegei alapján végzett elemzések elméleti-módszertani háttere.
Tegyük fel, hogy a gazdaság *n* szektorból áll, és mindegyik ágazat egyféle árut állít elő. Jelölje x_j $,j=1,2,\ldots n$ a j-edik ágazat termelési szintjét (a j-edik áru mennyiségét), azaz a j-edik áru teljes kibocsátási volumenét (bruttó kibocsátás). Továbbá, legyen c_j a j-edik áru végső felhasználásának volumene (nettó kibocsátása), és $\overline{a}_{ij}$ az i-edik termék a j-edik áru előállításához felhasznált része. Feltételezzük, hogy egy adott időszakra vonatkozóan az ágazati kapcsolati mérleg az alább 1.1 táblázatban van összefoglalva.

Termelés (Output) / Ráfordítás (input)	A termékek ágazatok közötti felhasználása						*Végső felhasználás (nettó kibocsátás)*	*A teljes kibocsátás volumene (Bruttó kibocsátás)*
Az i-edik termék a j-edik áru előállításához felhasznált része	$\overline{a}_{11}$	$\overline{a}_{12}$	$\cdots$	$\overline{a}_{1j}$	$\cdots$	$\overline{a}_{1n}$	c_1	x_1
	$\overline{a}_{21}$	$\overline{a}_{22}$	$\cdots$	$\overline{a}_{2j}$	$\cdots$	$\overline{a}_{2n}$	c_2	x_2
	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	.	.
	$\overline{a}_{i1}$	$\overline{a}_{i2}$	$\cdots$	$\overline{a}_{ij}$		$\overline{a}_{in}$	c_i	x_i
	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	.	.
	$\overline{a}_{n1}$	$\overline{a}_{n2}$	$\cdots$	$\overline{a}_{nj}$	$\cdots$	$\overline{a}_{nn}$	c_n	x_n

1.1. Táblázat

Mivel az 1.1. táblázat mérleg jellegű, ezért nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} = x_i - c_i\ , \quad i=1,2,\ldots n \tag{1.1}$$

Az 1.1 táblázatban szereplő mennyiségeket vagy természetes mérőszámokkal (darab, tonna, liter, méter, stb.), vagy árban leht kifejezni, és ennek megfelelően kétféle ágazati input-output termelési mérleget tudunk megkülönböztetni, nevezetesen

- naturális jellegű mérleget, vagy
- fizetési mérleget.

Nevezzük a

$$c=\mathrm{col}(c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{1.2}$$

oszlopvektort végső felhasználási vektornak, míg az

$$x=\mathrm{col}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.3}$$

oszlopvektort termelés vektornak, és vezessük be az

$$a_{ij} = \frac{\overline{a_{ij}}}{x_j}, \quad i,j = 1,2,...n \tag{1.4}$$

normált mennyiséget, amely az i-edik termék azon része, amely szükséges a j-edik szektorban egy egységnyi termék előállításához.
Alkossuk meg (1.4) segítségével az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

mátrixot, melyet a kibocsátások egységeire vetített ráfordítási (technológiai) mátrixnak nevezünk, míg az

$$A \cdot x = col\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j,\right) \tag{1.6}$$

oszlopvektort a termelés ráfordítási vektorának nevezzük.
Ha (1.4)-ből az $\overline{a_{ij}} = a_{ij}x_j$ értéket behelyettesítjük (1.1)-be, akkor

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = x_i - c_i, \quad i\text{=1,2,...,n}$$

melyből az (1.2) felhasználási vektor, az (1.3) termelési vektor és az (1.6) ráfordítási vektor közötti összefüggést mártrixalgebrai jelölésekkel következőképpen írhatjuk fel:

$$x - Ax = c\text{, vagy } [I - A]x = c, \tag{1.7}$$

ahol I - $n \times m$ egységmátrix.
Ezzel eljutottunk a következő alapfeladathoz:
Az (1.7) egyenletben ismert a végső felhasználási c vektor, és kibocsátások ráfordításaira vetített ráfordítási A mátrix, és a feladat abból áll, hogy meg kell határozni az x termelési vektort.
Az (1.7) alakú modell akkor tekinthető jónak, ha annak az egyenletnek minden adott nemnegatív komponensű végső felhasználási c vektorhoz van x megoldása, amely a termelési vektort adja, azaz

$$\det[I - A] \neq 0 .$$

Ekkor

$$x = (I - A)^{-1} c \;.$$

További természetes követelmény az, hogy pozitív c_i-hez pozitív x_i tartozzon, azaz az $(I - A)^{-1}$ mátrix minden komponense legyen pozitív.
Matematikai szempontból a szóban forgó alapfeladat az

$$[I - A]x = c, \; x \geq 0, \; c \geq 0, \; A \geq 0 \tag{1.8}$$

lineáris algebrai egyenletrendszer nem negatív x megoldásának meghatározásához vezet.
A matematikai közgazdaságtanban az (1.8) alapegyenletet Leontief-féle nyílt, statikus termelési input-output modellnek nevezzük, vagy primális alapegyenletnek mondják.

Az (1.8) Leontief-féle modellt, vagy az általa jellemzett technológiát (ráfordítási A mátrixot) produktívnak nevezik, ha minden nem negatív $c \geq 0$ végső felhasználás (nettó kibocsátás) esetén (1.8)-nak létezik $x \geq 0$ megoldása.
A fizetési mérleg figyelembevételével (az ágazat bevétele egyenlő a termelésre ráfordított kiadással), az (1.8) primális alapegyenlethez célszerű hozzárendelni a

$$p[I - A] = w \ , \quad p \geq 0 \tag{1.9}$$

ún. duális alapegyenletet, ahol

$$p = (p_1, p_2, ..., p_n) \tag{1.10}$$

sorvektor az árak vektora, p_i, i=1,2,...n az i-edik ágazat termékeinek az ára, w_j, j=1,2...n a j-edik ágazat termékeinek előállításáért kifizetett bérkiadás (hozzáadott érték),

$$w = (w_1, w_2, ..., w_n) \tag{1.11}$$

pedig a bér (hozzáadott érték) vektora.
Megjegyezzük, hogy az (1.11) w vektor tartalmazhat egyéb nem termelési ráfordításokat is (például tartalékalap levonást).
Az (1.8) alakú lineáris algebrai egyenletrendszerek vizsgálatánál célszerű nem negatív mátrixokra vonatkozó technikát, nevezetesen az ún. Perron-Frobenius tételeket (lásd 544.oldal, Zalai Ernő „Matematikai közgazdaságtan”, Budapest, 2000, 836 oldal).
Lineáris algebrai egyenletrendszer megoldására vezethető vissza a következő feladat is:

1.1 **Példa.** Vaslemezből háromféle alkatrészt szükséges kivágni: az I. típusból 100 darabot, a II. típusból 130 darabot, III. típusból 45 darabot. Mindemellett háromféle szabási lehetőség áll fenn. Egy lemezből kapható alkatrészek száma háromféle szabás mellett az 1.2 Táblázatban van feltüntetve.
Határozzuk meg, hány darab vaslemezre van szükség az összes alkatrész előállításához.

Az alkatrész típusa	Szabás			Szükséges alkatrész
	1	2	3	
I.	3	2	1	180
II.	2	4	1	205
III.	3	1	2	175

1.2 táblázat

Megoldás. Legyen x_1, x_2, x_3 a vaslemezek száma, melyek megmunkálása rendre az 1., 2. illetve a 3. szabási módszerrel történik.
Nyilvánvaló, hogy $x_j \geq 0$, $\quad j = 1,2,3$.
Akkor az 1., 2., 3. szabási módszerrel kapott I. típusú alkatrészek száma rendre
$3x_1, 2x_2, x_3$ és ennek alapján

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 180$$

Hasonlóképpen a II. és III. típusú alktrészek esetén kapjuk, hogy

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 205$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 175$$

Tehát a feladat matematikai modellje a

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 180 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 205 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 175 \end{cases} \tag{1.12}$$

lineáris algebrai egyenletrendszer.
Ellenőrizni lehet, hogy az (1.12) egyenletrendszernek egyetlen egy megoldása létezik:

$$x_1 = 35\,; \quad x_2 = 30\,; \quad x_3 = 15\,,$$

melyből az következik, hogy a szükséges alkatrészek elkészítéséhez 35 lemezt az 1., 30 lemezt a 2., és 5 lemezt a 3. szabási módszer szerint szükséges megmunkálni.

A közgazdaságtanban a statikus modelleken kívül léteznek ún. dinamikus matematikai modellek is. A dinamikus modellek olyan rendszerek, folyamatok leírását szolgálják, amelyek időben játszódnak le. Ezekben a modellekben a rendszert, gazdasági folyamatot leíró mennyiségek (állapothatározók) jövőbeni értékeinek alakulása lényeges függ a jelen pillanatban tapasztalt értékektől. Például, a gazdasági piacon a kereslet és kínálat adott időpontban tapasztalt értékei, ezek összefüggése határozzák meg az árakat, és ezzel befolyást gyakorolnak a termelésre, illetve a jövőbeni kereslet-kínálat alakulására.
Az időtényező bevezetésével kapcsolatban a közgazdaságtanban fontos szerepet játszott Neumann János tevékenysége is.
A gazdaságtanban, mint a természettudományok más területein is, az időnek kétféle kezelése lehetséges: folytonos, vagy diszkrét. A folytonos és diszkrét idő értelmezésekor megkülönböztetjük, hogy a vizsgálataink során felhasznált matematikai módszerek az időt folytonos, vagy diszkrét változóként kezelik. Megjegyezzük, hogy folytonos idő esetében a közgazdaságtan dinamikus modelljeinek megalapozását matematikai szempontból a differenciálegyenletek elmélete adja, míg diszkrét idő levezetése során alkalmazásra kerülnek az ún. differenciaegyenletek elmélete.
Ezért előkészítésként ismertetjük a szükséges minimum matematikai ismereteket a differeciál- és differenciaegyenletek elméletéből. Mielőtt ezt megtennénk, bemutatunk egy konkrét dinamikus gazdasági modellt.

1.3 Egy áru piacának kétféle dinamikus modellje

Állítsuk elő egy áru piacának dinamikus matematikai modelljét két esetben. Először legyen az idő egy diszkrét változó:

$$t = 1,2,... \tag{1.13}$$

Ez esetben egy ún. differenciaegyenlethez jutunk. Később belátjuk, ha az időt folytonos változónak tekintjük, akkor a matematikai leírás egy differenciálegyenlethez vezet.
Ismeretes, hogy a piacot az áru keresletével (*D*), kínálatával (*S*), és árával (*P*) jellemezhetjük.
A mikroökonómia törvényei szerint a *D* kereslet a *P* ár csökkenő függvénye, míg az *S* kínálat a *P* ár növekvő függvénye.
Jelölje $D(t)$, $S(t)$, $P(t)$ rendre a kereslet, kínálat, ár értékét a diszkrét (1.13) *t* időpillanatban.
Lineáris dinamikus modell esetében az áru piaca a következő formulákkal írható le:

$$\begin{cases} D(t) = a - b \cdot P(t) \\ S(t) = -c + d \cdot P(t-1) \end{cases}, \tag{1.14}$$

ahol *a*, *b*, *c*, *d* pozitív konstansok.
Az (1.14) formulák azt jelentik, hogy a keresletet a *t* pillanatnyi ár határozza meg, a kínálatot viszont az előző *t*-1 időpontban tapasztalt ár.
Például, képzeljük el, hogy egy mezőgazdasági termékről van szó, ha az idei ár magas, akkor a termelő többet vet, telepít, ültet és ezzel növeli a jövő kínálatot.
A gazdasági piacon a pillanatnyi árat az a szabály határozza meg, hogy a kereslet legyen egyenlő a kínálattal:

$$D(t) = S(t), \tag{1.15}$$

vagyis az

$$a - b \cdot P(t) = -c + d \cdot P(t-1)$$

egyenlőség határozza meg, amelyet egyszerű átalakítással

$$P(t) = -\frac{d}{b} \cdot P(t-1) + \frac{a+c}{b}, \quad t = 1,2,... \tag{1.16}$$

alakra hozhatunk.
A későbbiekben bevezetendő differenciaegyenlet alapfogalom értelmében azt mondhatjuk, hogy az (1.16) alakú egyenlet nem más, mint egy elsőrendű explicit lineáris differenciaegyenlet.
Az (1.16) képletből látszik, hogy ha a piacon kétszer egymás után ugyanaz volt az ár

$$P(t-1) = P(t) = P_E, \tag{1.17}$$

akkor kialakul egy P_E egyensúlyi ár, amely ugyanaz is marad, és amelyre

$$P_E = \frac{a+c}{b+d}. \tag{1.18}$$

Számoljuk ki (1.16) szerint a t diszkrét pillanatnyi $P(t)$-t, és az egyensúlyi P_E ár különbségét:

$$P(t) - P_E = -\frac{d}{b} P(t-1) + \frac{a+c}{b} - P_E \quad ,$$

$$P(t) - P_E = -\frac{d}{b} P(t-1) + \left[\frac{a+c}{b} - \frac{a+c}{b+d}\right] =$$

$$= -\frac{d}{b} P(t-1) + \frac{[ab + ad + cb + cd - ab - cb]}{b(b+d)} = -\frac{d}{b} P(t-1) + \frac{d}{b} \cdot \frac{(a+c)}{(b+d)} =$$

$$= -\frac{d}{b}[P(t-1) - P_E].$$

Tehát

$$P(t) - P_E = -\frac{d}{b}[P(t-1) - P_E] \ . \tag{1.19}$$

A kereslet és kínálat egyenlőségéből következő (1.19) összefüggés azt mondja, hogy ha a piac nincs egyensúlyban, akkor az ár váltakozva az egyensúlyi árnál nagyobb, illetve kisebb.
Felmerül egy természetes kérdés, hogy közelít-e az (1.13) időpontokban az áru $P(t)$ ára P_E egyensúlyi árhoz, vagy távolodik tőle?
Az első esetben az áru piaca **stabilis**, a második esetben **instabilis**.
Vezessük be (1.19)-ben a

$$\begin{aligned} P(t) &:= x(t) + P_E, \\ x(t) &:= P(t) - P_E \end{aligned} \tag{1.20}$$

helyettesítést. Ekkor az (1.19) egyenlet

$$x(t) = -\frac{d}{b} x(t-1), \quad t = 1,2,..., \tag{1.21}$$

alakú lesz.
Tehát (1.21)-ből az

$$x(1) = -\frac{d}{b}x(0),\ x(2) = -\frac{d}{b}x(1) = \left(-\frac{d}{b}\right)^2 x(0),\ x(3) = \left(-\frac{d}{b}\right)^3 x(0),\ldots,$$
$$x(t) = \left(-\frac{d}{b}\right)^t x(0),\ldots \tag{1.22}$$

mértani sorozatot kapjuk, melynek kvóciense $\left(-\frac{d}{b}\right)$.

Ha $\left|-\frac{d}{b}\right| < 1$, akkor ismeretes, hogy a mértani sorozat csökkenő, és ekkor $x(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, azaz ha $d < b$, akkor

$$P(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} P_E\ . \tag{1.23}$$

Ha $d > b$, ($\left|-\frac{d}{b}\right| > 1$), akkor $|x(t)| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, vagy

$$|P(t)| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{1.24}$$

Végül, ha $d = b$, akkor (1.22)-ből

$$x(1) = -x(0),\ x(2) = x(0),\ x(3) = -x(0),\ \ldots,\ x(t) = (-1)^t x(0),\ \ldots \tag{1.25}$$

és akkor $x(t)$ és vele együtt $P(t)$ periodikusan változik $\tau = 2$ periódussal.
Összefoglalva mondhatjuk, hogy az (1.16) differenciaegyenlet a piac dinamikáját fejezi ki, melyből a következő összefüggéseket kaphatjuk:

$$P(t+1) = -\frac{d}{b}P(t) + \frac{a+c}{b},$$
$$P(t) = -\frac{d}{b}P(t-1) + \frac{a+c}{b},\ -\frac{d}{b}P(t-1) = P(t) - \frac{a+c}{b},$$
$$P(t+1) - P(t) = -\frac{d}{b}P(t) - \frac{d}{b}P(t-1) = -\frac{d}{b}P(t) - \left[P(t) - \frac{a+c}{b}\right]$$
$$P(t+1) - P(t) = -\left(\frac{d}{b} + 1\right)P(t) + \frac{a+c}{b}\ . \tag{1.26}$$

Az (1.26) formula azt mondja meg, hogy a pillanatnyi ár hogyan határozza meg a következő időponthoz tartozó árat, azaz a $P(t+1) - P(t)$ árváltozást.
Írjuk fel egy áru piacának dinamikus matematikai modelljét egy másik esetben, mikor a folyamatot nem a diszkrét (1.13) időpontokban figyeljük, hanem az időváltozót folytonosnak tekintjük. Egy hétköznapi hasonlattal élve, a folyamatról nem fényképfelvétel-sorozatot készitünk bizonyos időpontokban, hanem mozgófilmet forgatunk.
Amikor az idő folytonosan változik, értékei a valós számok. Ekkor nincs értelme adott időpont „előtti” és „következő” időpontról beszélni.
Ekkor a matematikai analízisbeli ismereteink alapján az (1.26) formula baloldalán álló

$$P(t+1) - P(t)$$

„változás” szerepét a

$$t \mapsto P(t)$$

valós értékű függvény (árfüggvény) deriváltja, differenciálhányadosa veszi át:

$$P'(t)=\frac{dP(t)}{dt}:=\lim\frac{P(t+h)-P(t)}{h} \quad . \tag{1.27}$$

A $P'(t)$ deriváltat itt úgy interpretálhatjuk, mint a $P(t)$ ár változásának t pontbeli pillanatnyi sebességét, azaz egyre rövidebb időszakokon vett átlagsebességeinek határértékét.
Ha a $P'(t)$ derivált pozitív, akkor az ár nő, ha negatív, akkor az ár csökken.
Walras ismert törvénye szerint, ha a kereslet nagyobb, mint a kínálat, akkor az ár nő, ha a kereslet kisebb, mint a kínálat, akkor az ár csökken.
Lineáris esetben Walras törvénye a következő alakban írható fel:

$$\frac{dP(t)}{dt}=k\big(D(t)-S(t)\big), \quad k>0 \quad . \tag{1.28}$$

Folytonos időváltozó esetén kínálat és a kereslet leírására nem az (1.14) formulák, hanem a

$$\begin{aligned} D(t)&=a-b\cdot P(t),\\ S(t)&=-c+d\cdot P(t) \end{aligned} \tag{1.29}$$

összefüggések szolgálnak, ahol $a,b,c,d>0$ pozitív konstansok.
Az (1.29) formulák figyelembevételével az (1.28) Walras-törvény

$$\frac{dP(t)}{dt}=k[a-b\cdot P(t)+c-d\cdot P(t)]=k[(a+c)-(b+d)P(t)]$$

illetve

$$\frac{dP(t)}{dt}+k(b+d)P(t)=k(a+c) \tag{1.30}$$

alakot vesz fel.
Az (1.30) egyenlet egy ún. elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet, amelyben $P=P(t)$ függvény az ismeretlen, és ennek az ismeretlen függvénynek előfordul az egyenletben a differenciálhányadosa is.
Megjegyezzük, hogy az előbbi modellben az (1.26) egyenletben a $P'(t)$ differenciálhányados helyett a

$$P(t+1)-P(t) \tag{1.31}$$

differencia szerepelt, és ezért neveztük az egyenletet differenciaegyenletnek és nem differenciálegyenletnek.
A későbbiekben részletesen megismerkedünk az elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldási módszerével.
Most azonban figyelembevéve, hogy az (1.30) differenciálegyenlet együtthatói állandók, egy speciális eljárást közlünk a szóban forgó egyenlet megoldására.
Vezessük be z

$$A=k(b+d)\,; \quad B=k(a+c)$$

jelöléseket, melyekkel (1.30)

$$\frac{dP(t)}{dt}+A\cdot P(t)=B \tag{1.32}$$

alakot vesz fel.
Szorozzuk meg (1.32) mindkét oldalát az e^{At} függvénnyel.
Ekkor az

$$e^{At}\cdot P'(t)+Ae^{At}P(t)=\left[e^{At}\cdot P(t)\right]'$$

összefüggés figyelembevételével az

$$\left[e^{At} \cdot P(t)\right]' = B \cdot e^{At} \tag{1.33}$$

egyenlőséget kapjuk, ahonnan integrálással az

$$\int_0^t \left[e^{At} \cdot P(t)\right]' dt = \int_0^t B \cdot e^{At} dt \ ,$$

illetve az

$$e^{At} P(t) - P(0) = \frac{B}{A} \cdot e^{At} \Big|_0^t = \frac{B}{A}\left(e^{At} - 1\right) \tag{1.34}$$

formulát kapjuk. Ebből a keresett megoldás:

$$P(t) = P(0) \cdot e^{-At} + \frac{B}{A}\left(1 - e^{-At}\right). \tag{1.35}$$

Az (1.35) formulából látszik, hogy a

$$P_E = \frac{B}{A} = \frac{a+c}{b+d} \tag{1.36}$$

egyensúlyi ár (v.ö. (1.18)-al) ár stabilis, ha

$$A = k(b+d) > 0\,, \tag{1.37}$$

a paraméterek tetszőleges értékénél, mivel tudjuk, hogy k, b, d mind pozitív konstansok, és ekkor

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to \infty} \left[P(0) \cdot e^{-At} + \frac{B}{A}\left(1 - e^{-At}\right) \right] = \frac{B}{A}\,.$$

2. Differenciálegyenletekkel kapcsolatos alapfogalmak, tulajdonságok

A természetben lejátszódó jelenségek, fizikai, kémiai, közgazdasági folyamatok, mechanikai mozgások és szélesebb értelemben bármilyen, a térben illetve az időben változásban, mozgásban lévő folyamat absztrakt matematikai modellje a természettudományi törvények által, igen gyakran valamilyen tipusú differenciálegyenlet.

2.1 Közönséges differenciálegyenlet fogalma

Definíció (közönséges differenciálegyenlet fogalma)

A közönséges differenciálegyenlet (a továbbiakban rövidítve DE) olyan függvényegyenlet, melyben ismert állandókon, függvényeken kívül szerepel egy ismeretlen egyváltozós függvény és annak különböző rendű deriváltjai a független változó ugyanazon értékénél.
A DE rendjét az ismeretlen függvénynek az egyenletben előforduló legmagasabb rendű deriváltja határozza meg.
Így például az

$$y' - 2y = t \ , \ \frac{dy}{dx} + 3ty = 0$$

egyenletek elsőrendűek, míg az

$$y'' + t^2 y' + 3t^3 y = t^4 \ , \ y'' + 3y' - 4\sin y = \sin t$$

egyenletek másodrendűek az ismeretlen $t \mapsto y(t)$ függvényre vonatkozóan.
A DE-t lineárisnak nevezzük, ha az lineáris az ismeretlen függvényre és deriváltjaira nézve.
Ha a DE együtthatói konstansok, akkor az egyenlet állandó együtthatójú, másképpen változó együtthatójú.
Például, $y''' + \sin ty' + y = e^t$ harmadrendű, lineáris változó együtthatójú DE, míg $y'' + 4y = 0$ másodrendű állandó együtthatójú lineáris DE.
Az $x \mapsto y(x)$ ismeretlen függvényre vonatkozóan $y' = p(x)y + q(x)$, vagy ekvivalens felírásban

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x) \tag{2.1}$$

az elsőrendű lineáris inhomogén DE általános alakja, ahol

$$p : I = (a,b) \to R \ , \ q : I(a,b) \to R \ , \ -\infty \le a < b \le \infty \tag{2.2}$$

az (a,b) intervallumon értelmezett folytonos függvények.
A (2.1) DE-ben $q(x)$-et zavarófüggvénynek szokták nevezni.
Ha $q(x) \equiv 0$, akkor a

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y \tag{2.3}$$

homogén DE-ről beszélünk.
Gyakran az elsőrendű DE-et

$$y' = f(x,y) \tag{2.4}$$

alakban írják fel, ahol

$$f : T \to R$$

a $T \subset R^2$ tartományon értelmezett adott folytonos függvény.
Például, ez a tartomány lehet egy nyílt téglalap:

$$T = \{(x,y) \in I_x \times I_y\}, \quad I_x = (a,b), \quad I_y = (c,d).$$

A (2.4) DE-et megoldani egy $J_x \subset I_x$ intervallumon annyit jelent, hogy meg kell határozni az összes olyan folytonosan differenciálható függvényt a DE értelmezési tartományából, amely J_x intervallumon azonosan kielégíti a DE-et.

Definíció (DE megoldásának fogalma)

Az $y = \varphi(x)$ függvényt a (2.4) DE egy megoldásának (megoldásfüggvényének), partikuláris megoldásának nevezzük valamely J_x intervallumon, ha

1. *A φ függvény differenciálható a J_x intervallumon;*
2. $(x,\varphi(x)) \in T$, $x \in J_x$ *esetén;*
3. *A φ függvény kielégíti a J_x intervallumon a (2.4) DE-et, azaz* $\dfrac{d\varphi(x)}{dx} = f(x,\varphi(x))$, $x \in J_x$ *esetén.*

A $\varphi : J_x \to R$ megoldásfüggvény grafikonját a DE integrálgörbéjének (megoldásgörbéjének) nevezzük.

A (2.4) elsőrendű DE-nek és megoldásának szemléletes geometriai jelentése van.
Ha $y = \varphi(x)$ a (2.4) DE megoldása valamely J_x intervallumon, akkor

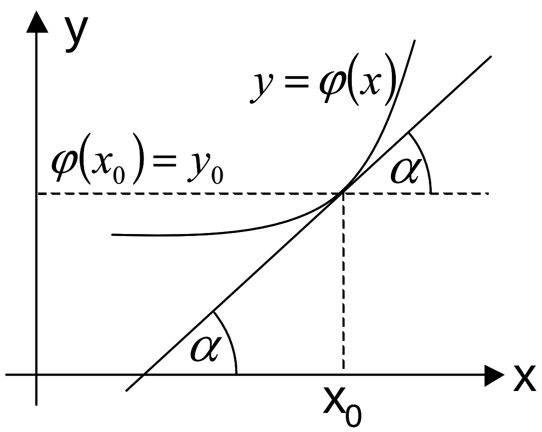
$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)), \quad \forall x \in J \tag{2.5}$$

Innen az adódik, hogy az $y = \varphi(x)$ grafikonja

$$(x_0, \varphi(x_0))$$

pontához húzott érintőjének iránytangense (lásd a 2.1 ábrát)

$$\mathrm{tg}\alpha = \varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) \tag{2.6}$$



2.1 ábra

Ez azt jelenti, hogy ha az $y = \varphi(x)$ megoldásról csak annyit tudunk, hogy az $x_0 \in J_x$ pontban a $\varphi(x_0) = y_0$ értéket veszi fel, akkor grafikonjának az $(x_0, y_0) \in T$ pontbeli érintőjét meg tudjuk adni (2.6) szerint.

Ezt úgy kell elképzelni, mintha a T tartomány minden $(x_0, y_0) \in T$ pontjában állna egy közlekedési rendőr, és mutatná, hogy milyen irányba és milyen sebességgel kell továbbhaladnunk annak érdekében, hogy a (2.4) DE azon $y = \varphi(x)$ megoldásgörbéje mentén maradjunk, mely az $(x_0, y_0 = \varphi(x_0))$ ponton haladnak át.

A gyakorlatban olyan differenciálegyenletek is felmerülnek, amelyekben több ismeretlen függvény szerepel. Ilyen például az $x \mapsto y_i(x)$, $\quad i = 1,2,...,n$ ismeretlen függvényekre felírt n egyenletből álló

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \quad\vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{2.7}$$

elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer (DER), ahol $T \in R^{n+1}$ és az

$$f_i : T \to R \,,\, i = \{1,2,...,n\}$$

függvények adottak.

Definíció (differenciálegyenlet-rendszer megoldásának fogalma)

Az

$$y_1 = \varphi_1(x)\,,\, y_2 = \varphi_2(x)\,, ...\,,\, y_n = \varphi_n(x) \tag{2.8}$$

függvényeket a (2.7) DER egy megoldásának nevezzük valamely J_x intervallumon, ha

1. *a $\varphi_1\,, \varphi_2\,, ...\,, \varphi_n$ függvények differenciálhatóak a J_x intervallumon;*
2. *$(x\,, \varphi_1(x)\,, \varphi_2(x)\,, ...\,, \varphi_n(x)) \in T$ minden $x \in J_x$ esetén;*
3. *A $\varphi_1\,, \varphi_2\,, ...\varphi_n$ függvények kielégítik a (2.7) DER-t minden $x \in J_x$ esetén:*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x\,, \varphi_1(x)\,, ...\,, \varphi_n(x)) \\ y_2' = f_2(x\,, \varphi_1(x)\,, ...\,, \varphi_n(x)) \\ \quad\vdots \\ y_n' = f_n(x\,, \varphi_1(x)\,, ...\,, \varphi_n(x)) \end{cases}.$$

Bevezetve az

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

oszlopvektorokat, a (2.7) DER-t rövidebb alakban is fel tudjuk írni:

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}). \tag{2.9}$$

Definíció (DE-hez tartozó kezdetiérték-feladat)

A (2.4) alakú $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlethez tartozó kezdetiérték-feladatnak azt a feladatot nevezzük, amikor adott az f függvény értelmezési $T \subset R^2$ tartományának egy konkrét (x_0, y_0) pontja, és a (2.4) DE-nek azt az $y = \varphi(x)$ megoldását keressük valamely I intervallumon, amelyre $x_0 \in I$ és $\varphi(x_0) = y_0$ teljesül (a keresett megoldásfüggvény görbéje áthalad az adott (x_0, y_0) ponton).

A kezdetiérték-feladat jelölése:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Gyakran a (2.10) feladat megoldásfüggvényére az $y = y(x, x_0, y_0)$ jelölést használják.

Definíció (differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó kezdetiérték-feladat)
A (2.7) alakú differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó kezdetiérték-feladat azt jelenti, hogy az adott $f_1, f_2, \dots, f_n$ *függvények értelmezési* $T \subset R^{n+1}$ *tartományához tartozó adott*

$$(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \in T \subset R^{n+1}$$

ponthoz keressük a (2.7)

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1,2,\dots,n$$

DER egy olyan

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \dots, \quad y_n = \varphi_n(x)$$

megoldását valamely I intervallumon, amelyre

$$x_0 \in I \ \textit{és} \ \varphi_1(x_0) = y_{10}, \varphi_2(x_0) = y_{20}, \dots, \varphi_n(x_0) = y_{n0}$$

teljesül.

2.2 Kezdetiérték-feladat **megoldásának létezése és egyértelműsége**

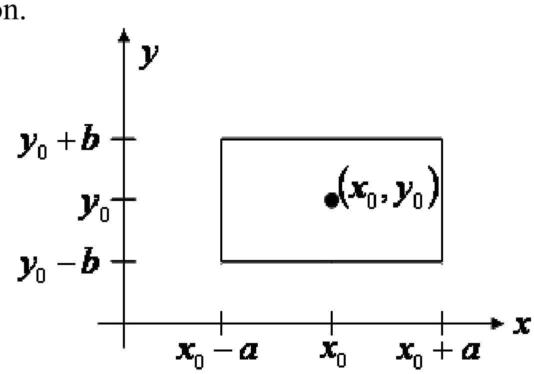
Először egy skaláris, azaz egydimenziós DE-hez rendelt kezdetiérték-feladatot vizsgálunk:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

a zárt korlátos

$$T = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset R^2 \tag{2.12}$$

téglalap alakú tartományon.



2.2 ábra

Elméleti szempontból fontos eldönteni, hogy milyen feltételek mellett létezik megoldása a (2.11) kezdetiérték-feladatnak (egzisztencia-probléma), illetve milyen feltételek biztosítják a megoldás egyértelműségét (unicitás probléma).
Lemma (a kezdetiérték-feladat ekvivalens felírásáról)
A

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.13}$$

kezdetiérték-feladat megoldása ekvivalens az

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s)) ds \tag{2.14}$$

egyenlet (ún. integrálegyenlet) megoldásával.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$y = \varphi^*(x)$, melyre $\varphi^*(x_0) = y_0$

a (2.13) feladat megoldása egy $I = [x_0 - h, x_0 + h] \subset [x_0 - a, x_0 + a]$ intervallumon, azaz

$$\frac{d\varphi^*(x)}{dx} = f(x, \varphi^*(x)) \text{ minden } x \in I \text{ esetén.} \tag{2.15}$$

Integrálva a (2.15) egyenlőséget $[x_0, x]$-n és felhasználva, hogy $\varphi^*(x_0) = y_0$, kapjuk, hogy

$$d\varphi^*(x) = f(x, \varphi^*(x))dx \rightarrow \int_{x_0}^{x} d\varphi^*(x) = \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi^*(s))ds \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi^*(x) - \varphi^*(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi^*(s)ds) \rightarrow \varphi^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi^*(s))ds .$$

Most pedig tegyük fel, hogy $y = \varphi^*(x)$ olyan folytonos függvény,

$$\varphi : [x_0, x] \rightarrow R \ ,$$

melyre

$$\varphi^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi^*(s))ds \tag{2.16}$$

teljesül minden $x \in I \subset [x_0 - a, x_0 + a]$ esetén.

Állítjuk ekkor, hogy $y = \varphi^*(x)$ egyben a (2.13) kezdetiérték-probléma megoldása az $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, $h \le a$ intervallumon.

Mivel $\varphi^*(x)$ és az f függvény folytonos az $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ intervallumon, ezért az

$$f(s, \varphi^*(s)) \quad , s \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

függvény is folytonos.

Ekkor a felső változó határral vett

$$\int_{x_0}^{x} f(s, \varphi^*(s))ds$$

integrálfüggvény differenciálható x szerint, és

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi^*(s))ds = f(x, \varphi^*(x)). \tag{2.17}$$

Ezért (2.16) alapján a φ^* függvény is differenciálható, és

$\frac{d\varphi^*}{dx} = f(x, \varphi^*(x))$ minden $x \in I \subset [x_0 - h, x_0 + h]$ esetén, továbbá (2.16)-ból az is következik, hogy $\varphi^*(x_0) = y_0$.

Ezzel állításunkat igazoltuk.

Tétel (kezdetiérték-feladat megoldásának egzisztenciája és unicitása)

Tegyük fel, hogy a (2.11) kezdetiérték-feladatra a (2.12) zárt, korlátos T tartományban teljesül a következő két feltétel:

(i) Az $f(x, y)$ függvény folytonos, következésképpen korlátos

$|f(x,y)| \leq M$ *minden* $(x,y) \in T$ *esetén* *(2.18)*

(ii) *Az* $f(x,y)$ *függvény az y változóban eleget tesz az ún. globális Lipschitz-féle feltételnek, azaz található olyan* $K > 0$ *konstans, melyre minden* $(x,y_1) \in T$ *és* $(x,y_2) \in T$ *esetén*

$$|f(x_1,y_1) - f(x,y_2)| \leq K|y_1 - y_2|. \tag{2.19}$$

Akkor:

1. *A (2.11) kezdetiérték-feladatnak az*

$$I_h = [x_0 - h, x_0 + h], \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \tag{2.20}$$

intervallumon létezik egy és csak egy

$$y = \varphi^*(x)$$

megoldása;

2. *Ez a megoldás határfüggvénye az egyenletesen konvergens*

$$\varphi_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{m-1}(s))ds\,, \quad \varphi_0(x) = y_0\,, \tag{2.21}$$

ún. Picard-féle függvénysorozatnak, azaz

$$\varphi^*(x) = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) \quad , \quad x \in I_h\,; \tag{2.22}$$

3. *Érvényes az*

$$|\varphi^*(x) - \varphi_m(x)| \leq \frac{MK^m}{(m+1)!}|x - x_0|^{m+1} \leq \frac{MK^m}{(m+1)!} h^{m+1} \tag{2.23}$$

hibabecslés.

Megjegyzés. *Ha a* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ *parciális derivált folytonos a T téglalap alakú tartományban, következésképpen korlátos* $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq K$ *, akkor aa (2.1) Lipshitz-féle feltétel mindig teljesül.*

Valóban legyen $(x,y_1) \in T$ és $(x,y_2) \in T$;
Becsüljük az $f(x,y_1) - f(x,y_2)$ különbséget. Adott, hogy rögzített $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ -re z $f(x,y)$ függvény folytonosan differenciálható. Így a Lagrange-féle középérték tétel szerint van olyan ξ az y_1 és y_2 között, hogy

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)\cdot(y_1 - y_2). \tag{2.24}$$

Innen felhasználva, hogy $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq K$ következik a (2.19) Lipshitz-féle feltétel.

A Tétel bizonyítása. Az előző Lemma szerint szóban forgó kezdetiérték-feladat megoldásinak egzisztencia és unicitás tételét elegendő a (2.14) integrálegyenletre bizonyítani. Tehát elegendő találni egy folytonos

$$\varphi^* : [x_0 - h, x_0 + h] \to R$$

függvényt, melyre minden $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$-ra (2.16) teljesül és

$$\left|\varphi^*(x) - y_0\right| \le b \text{ minden } x \in [x_0 - h, x_0 + h]\text{-ra.} \qquad (2.25)$$

A keresett φ^* függvény a sorozatos közelítés módszerével, az **ún. Picard-féle közelítésekkel konstruáljuk.**
Definiáljuk a

$$\varphi_m(x) : [x_0 - h, x_0 + h] \Rightarrow R$$

függvényeket a következőképpen:

$$\varphi_{m+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_m(s))ds\,, \qquad (2.26)$$

ahol a nulladik közelítés $\varphi_0(x) = y_0$.
A $\varphi_0(x)$ függvény folytonos $[x_0 - h, x_0 + h]$-n és
$(x, \varphi_0(x)) \in T$ minden $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$-ra.
Tegyük fel, hogy $\varphi_m(x)$ függvény folytonos $[x_0 - h, x_0 + h]$-n és
$(x, \varphi_k(x)) \in T$ minden $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$-ra.
Ekkor a (2.26) formulával definiált $\varphi_{m+1}(x)$ függvény is folytonos $[x_0 - h, x_0 + h]$-n.
Felhasználva a (2.18)-ban szereplő $|\varphi(x, y)| \le M$ egyenlőséget és azt, hogy $(x, \varphi_m(x)) \in T$ minden $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ esetén, a

$$\left|\varphi_{m+1}(x) - \varphi_0\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_m(s))ds\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|f(s, \varphi_m(s))ds\right| \le$$

$$\le M\left|x - x_0\right| \le M \cdot h \le M \cdot \frac{b}{M} \le b$$

minden $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ esetén.
Így teljes indukcióval beláttuk, hogy a

$$\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$$

függvénysorozat jól definiált, minden tagja folytonos $[x_0 - h, x_0 + h]$-n, és $(x, \varphi_k(x)) \in T$ minden $[x_0 - h, x_0 + h]$ és $m \in \{0,1,2,...\}$ esetén.
Szintén teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy

$$\left|\varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x)\right| \le \frac{M}{K} \cdot \frac{K^{m+1}(x - x_0)^{m+1}}{(m+1)!}\,, \quad (x \in [x_0 - h, x_0 + h])\,. \qquad (2.27)$$

Ha $k = 0$, akkor (2.26)-ból

$$\left|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\right| = \left|\varphi_1(x) - y_0\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} \left|f(s, y_0)ds\right|\right| \le M\left|x - x_0\right|.$$

Tegyük fel, hogy

$$\left|\varphi_m(x) - \varphi_{m-1}(x)\right| \le \frac{M}{K} \cdot \frac{K^m (x - x_0)^m}{(m!)}\,, \quad (x \in [x_0 - h, x_0 + h]) \qquad (2.28)$$

teljesül. Akkor a (2.19) Lipshitz-féle feltételt felhasználva

$$|\varphi_{m+1}(x)-\varphi_m(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_m(s))ds - \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_{m-1}(s))ds\right| =$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x} [f(s,\varphi_m(s)) - f(s,\varphi_{m-1}(s))]ds\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(s,\varphi_m(s) - f(s,\varphi_{m-1}(s)))|ds\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} K|\varphi_m(s)-\varphi_{m-1}(s)|ds\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} K\cdot\frac{M}{K}\frac{K^m(s-x_0)^m}{m!}ds\right| =$$

$$= \left|M\cdot\frac{K^m}{m!}\cdot\frac{(s-x_0)^{m+1}}{m+1}\Bigg|_{x_0}^{x}\right| = \left|M\frac{K^m}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}\right| = \frac{M}{K}\cdot\frac{K^{m+1}}{(m+1)!}\cdot|x-x_0|^{m+1} \quad .$$

Tehát teljes indukció módszere alapján (2.27) minden $m \in \{0,1,...\}$ esetén teljesül.
Most bebizonyítjuk, hogy a

$$\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{\infty} \tag{2.29}$$

függvénysorozat egyenletesen konvergens az $[x_0-a, x_0+a]$ intervallumon.
Ugyanezt a konvergenciát elegendő a

$$\varphi_0(x)+(\varphi_1(x)-\varphi_0(x))+...+(\varphi_m(x)-\varphi_{m-1}(x))+... = \varphi_0(x)+\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)) \tag{2.30}$$

fügvénysorra igazolni, mivel (2.30) m-edik részösszege pontosan $\varphi_m(x)$.
Az $[x_0-h, x_0+h]$ intervallumon (2.27) alapján

$$|\varphi_j(x)-\varphi_{j-1}(x)| \le \frac{M}{K}\cdot\frac{K^j}{j!}(x-x_0)^j \le \frac{M}{K}\cdot\frac{K^j}{j!}h^j \quad . \tag{2.31}$$

Tehát a (2.30) függvénysor majoráns sora

$$y_0+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{M}{K}\cdot\frac{K^j}{j!}h^j = y_0+\frac{M}{K}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(K\cdot h)^j}{j!} \quad . \tag{2.32}$$

A (2.32) pozitív tagú numerikus sor összegfüggvényét az ismert

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^j}{j!}+... = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}$$

sorbafejtés felhasználásával könnyen fel tudjuk írni:

$$y_0+\frac{M}{K}\cdot\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(K\cdot h)^j}{j!}\right] = y_0+\frac{M}{K}\cdot\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(K\cdot h)^j}{j!}-1\right] = y_0+\frac{M}{K}\cdot\left[e^{hK}-1\right] \tag{2.33}$$

A (2.33) majoráns sor konvergenciájából az ún. Weierstrass-féle konvergenciakritérium szerint (majoráns kritérium) a (2.30) függvénysor és vele együtt a (2.29) függvénysorozat egyenletesen konvergens az $[x_0-h, x_0+h]$ intervallumon.
Legyen

$$\varphi^*(x) = \lim_{m\to\infty}\varphi_m(x) \quad . \tag{2.34}$$

Az egyenletes konvergencia és a $\varphi_n(x)$ függvények folytonossága miatt $\varphi^*(x)$ folytonos $[x_0-h, x_0+h]$-n.
Továbbá az

$$\left|\varphi_m(x)-y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_{m-1}(s))ds\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} \left|f(s,\varphi_{m-1}(s))\right|ds\right| \le$$
$$\le M \cdot \left|x-x_0\right| \le M \cdot h \le b \quad , \quad (x \in [x_0-h, x_0+h]) \tag{2.35}$$

összefüggésből könnyű belátni, hogy határátmenettel kapjuk, hogy

$$\left|\varphi^*(x)-y_0\right| \le b\,,\ (x \in [x_0-h, x_0+h]) \tag{2.36}$$

azaz

$(x, \varphi^*(x)) \in T$ minden $x \in [x_0-h, x_0+h]$ esetén.

A (2.19) Lipshitz feltétel alapján

$$\left|f(s,\varphi_m(s)) - f(s,\varphi^*(s)) \le K\left|\varphi_m(s)-\varphi^*(s)\right|\right|,\ s \in [x_0-h, x_0+h] \tag{2.37}$$

melyből $\left|\varphi_m(s)-\varphi^*(s)\right| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ miatt következik, hogy az

$$\{f(s,\varphi_m(s))\}_{m=0}^{\infty}$$

függvénysorozat egyenletesen konvergens az $f(s,\varphi^*(s))$ függvényhez:

$$\lim_{m\to\infty} f(s,\varphi_m(s)) = f(s,\varphi^*(s))\ ,\ s \in [x_0-h, x_0+h] \tag{2.38}$$

A (2.26) reláció alapján

$$\varphi^*(x) = \lim_{m\to\infty} \varphi_{m+1}(x) = \lim_{m\to\infty}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_m(s))ds \right) =$$
$$= y_0 + \lim_{m\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_m(s))ds \quad , \quad x \in [x_ö - h, x_0+h] \tag{2.39}$$

A (2.38) egyenlőség figyelembevételével határátmenet és az integrálás sorrendje felcserélhető és ezért

$$\lim_{m\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_m(s))ds = \int_{x_0}^{x} \lim_{m\to\infty} f(s,\varphi_m(s))ds = \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi^*(s))ds$$

és (2.39)-ből

$$\varphi^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi^*(s))ds\ ,\ x \in [x_0-h, x_0+h]$$

azaz valóban találtunk egy $\varphi^* : [x_0-h, x_0+h] \to R$ függvényt, amelyre minden $x \in [x_0-h, x_0+h]$ esetén (2.16) teljesül és $(x, \varphi^*(x)) \in T$.

A (2.11), (2.12) kezdetiérték-feladat megoldásának egyértelműségét indirekt úton igazoljuk. Feltételezzük, hogy az $[x_0-h, x_0+h]$ intervallumon a (2.11), (2.12) kezdetiérték-feladatnak létezik két különböző

$$y = \varphi^*(x) \text{ és } y = z^*(x)\ ,\ \varphi^*(x) \not\equiv z^*(x) \tag{2.40}$$

megoldása, melyekre

$$\varphi^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi^*(s))ds$$
$$z^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, z^*(s))ds \tag{2.41}$$

teljesül.
Végezzük el az

$$|\varphi_m(x) - z^*(x)|$$

különbség becslését, ahol $\varphi_m(x)$ a (2.26) Picard-féle közelítésekkel meghatározott függvény.
A (2.26), (2.41) formulák és a Lipschitz-feltétel alapján

$$|\varphi_m(x) - z^*(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{m-1}(s))ds - \int_{x_0}^{x} f(s, z^*(s))ds \right| =$$
$$= \left| \int_{x_0}^{x} [f(s, \varphi_{m-1}(s)) - f(s, z^*(s))]ds \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, \varphi_{m-1}(s)) - f(s, z^*(s))|ds \right| \le$$
$$\le K \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi_{m-1}(s) - z^*(x)|ds \right|, \tag{2.42}$$

azaz

$$|\varphi_m(x) - z^*(x)| \le K \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi_{m-1}(s) - z^*(x)|ds \right|. \tag{2.42}$$

Továbbá (2.41)-ből

$$|\varphi_0(x) - z^*(x)| = |y_0 - z^*(x)| \le \left| \int_{x_0}^{x} f(s, z^*(s))ds \right| \le M|x - x_0|. \tag{2.43}$$

Ezek után már iterációs eljárással (2.42)-ből kapjuk
m=1 esetén:

$$|\varphi_1(x) - z^*(x)| \le K \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi_1(s) - z^*(s)|ds \right| \le K \left| \int_{x_0}^{x} M|x - x_0|ds \right| \le MK \frac{(x - x_0)^2}{2!}, \tag{2.44}$$

m=2 esetén hasonlóképpen:

$$|\varphi_2(x) - z^*(x)| \le MK^2 \frac{(x - x_0)^3}{3!},$$

vagy teljes matematikai indukcióval:

$$|\varphi_m(x) - z^*(x)| \le MK^m \frac{(x - x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \tag{2.45}$$

A (2.45) egyenlőtlenség jobb oldala zérushoz tart, mint egy konvergens sor általános tagja.
Valóban

$$\frac{M}{K} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[K \cdot (x - x_0)]^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{M}{K} \left[e^{K|x - x_0|} - 1 \right].$$

Ezért (2.45) bal oldala szintén zérushoz tart:

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = z^*(x),\ (x \in [x_0 - h, x_0 + h]). \tag{2.46}$$

De korábban már igazoltuk (2.34) szerint, hogy

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = y^*(x),\ (x \in [x_0 - h, x_0 + h])\ . \tag{2.47}$$

Így (2.46), (2.47) alapján

$$\varphi^*(x) \equiv z^*(x)\ ,\ x \in [x_0 - h, x_0 + h]\ . \tag{2.48}$$

Másrészt (2.40) értelmében

$$\varphi^*(x) \not\equiv z^*(x)\ .$$

Ellentmondás. Ezzel az egzisztencia és unicitás tételt bebizonyítottuk.

2.1 Példa

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = x - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases},\ (x,y) \in T = [-1,1]\times[-1,1]\ ,\ x_0 = 0\ ,\quad y_0 = 0 \tag{2.49}$$

kezdetiérték-feladatra írjuk fel a második Picard-féle közelítést. Milyen intervallumon konvergensek a Picard-féle közelítések? Végezzük el a harmadik közelítés hibabecslését.

Megoldás. A (2.49) feladatban

$$f(x,y) = x - y^2\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y\ ,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |-2y| \le 2\ ,$$

ezért a Lipschitz-féle feltétel a $K = 2$ konstanssal teljesül.

Továbbá

$$M = \max_{(x,y)\in T} |f(x,y)| = \max_{x\in[-1,1],\, y\in[-1,1]} \left(|x| + \left|y^2\right|\right) = 2\ ,\ a = 1,\ b = 1$$

és (2.20) szerint

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Tehát az $I_h = [x_0 - h, x_0 + h] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon érvényesek az egzisztencia és unicitás tétel (2.21), (2.22), (2.23) állításai. A (2.21) formula szerint

$$\varphi_1(x) = 0 + \int_0^x (s - 0)\,ds = \frac{x^2}{2}\ ;\ \varphi_2(x) = \int_0^x \left(s - \frac{s^4}{4}\right) ds = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}\ .$$

A harmadik közelítés hibabecslése (2.23) szerint $m = 3$, $K = 2$, $h = \frac{1}{2}$ esetén

$$\left|\varphi^*(x) - \varphi_3(x)\right| < \frac{1}{24}\ .$$

2.3 Létezés és egyértelműség differenciálegyenlet-rendszerekre

Tekintsük a (2.7) differenciálegyenlet- rendszerhezhez rendelt

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_1(x_0) = y_{10}\ ,\ y_2(x_0) = y_{20}\ , ... y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases} \equiv \frac{d\overline{y}}{dx} = f(x, \overline{y})\ ,\ \overline{y}(x_0) = \overline{y}_0 \tag{2.50}$$

kezdetiérték-feladatot, ahol $T \subset R^{n+1}$ az $f_i : T \to R$, $i \in \{1,2,...,n\}$ függvények értelmezési tartománya és

$$(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}) \in T \tag{2.51}$$

adott pont.
A skaláris $(n = 1)$ esethez hasonlóan bizonyítható az alábbi eredmény.

Tétel (kezdetiérték-feladat megoldásának létezése és egyértelműsége differenciálegyenlet-rendszerekre)
Tegyük fel, hogy a (2.50) kezdetiérték-feladatra a

$$T = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_{10} - b, y_{10} + b] \times [y_{20} - b, y_{20} + b] \times ... \times [y_{n0} - b, y_{n0} + b] \in R^{n+1} \tag{2.52}$$

zárt, korlátos tartományban teljesül a következő két feltétel:

(i) *Az* $f_i(x, y_1, ..., y_n)$, $i = \{1,2,...,n\}$ *függvények folytonosak, következésképpen korlátosak*

$$|f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)| \le M\ ,\ M > 0\,;$$

(ii) *Az* $f_i(x, y_1, ..., y_n)$, $i = \{1,2,...,n\}$ *függvények eleget tesznek a globális Lipschitz-féle feltételnek, azaz található olyan* $K > 0$ *konstans, melyre minden*
$(x, y_1, y_2, ..., y_n) \in T$ *és* $(x, z_1, z_2, ..., z_n) \in T$ *esetében*

$$|f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) - f_i(x, z_1, z_2, ..., z_n)| \le K \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| \tag{2.53}$$

(vagy ha a $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, y_1, y_2, .., y_n)$ *parciális deriváltak folytonosan T-n minden* $i, k \in \{1,2,...,n\}$

esetén és $\left| \dfrac{\partial f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)}{\partial y_k} \right| \le K$*).*

Akkor:

1. *A (2.50) kezdetiérték-feladatnak az*

$$I_h = [x_0 - h, x_0 + h]\,,\ h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \tag{2.54}$$

intervallumon létezik egy és csak egy $\overline{y} = \overline{\varphi}(x)$ *megoldása;*

2. *Ez a megoldás határfüggvénye az egyenletesen konvergens Picard-féle függvénysorozatnak:*

$$\overline{\varphi}^*(x) = \lim_{m\to\infty} \overline{\varphi}_m(x) = \lim_{m\to\infty}\left[\overline{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \bar{f}\left(s, \overline{\varphi}_{m-1}(s)\right) ds\right]; \qquad (2.55)$$

3. Érvényes az

$$\left|\overline{\varphi}_i^*\left(x - \overline{\varphi}_m(x)\right)\right| \le M\,\frac{(nK)^m}{(m+1)!}\left|x - x_0\right|^{m+1} \le M\,\frac{(nK)^m}{(m+1)!}\alpha^{m+1}\,, \quad i \in \{1,2,\ldots,n\} \qquad (2.56)$$

hibabecslés.

3. Elemi integrálási módszerrel megoldható differenciálegyenletek

Általános esetben a

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad f : T \to R, \quad T = I_x \times I_y \subset R^2 \tag{3.1}$$

alakú elsőrendű differenciálegyenlet megoldásfüggvényét nem tudjuk előállítani zárt alakban. Azonban a (3.1) DE-k között léteznek speciális típusú egyenletek, amelyek mindig megoldhatók.

A továbbiakban a közönséges differenciálegyenletek megoldásai között kétféle megoldásfüggvényt különböztetünk meg**: általánost** és **partikulárist.**

Az általános megoldást az jellemzi, hogy pontosan annyi számú tetszőlegesen választható egymástól független állandót tartalmaz, ahányad rendű az adott DE.

Definíció (általános megoldás fogalma)

Az egyparaméteres $\varphi : T_1 = I_x \times \dot{I}_c \to R$ *,* $y = \varphi(x,c)$ *függvényt véges vagy végtelen*

$$T_1 = I_x \times I_c \subset R^2$$

értelmezési tartománnyal akkor nevezzük a (3.1) elsőrendű DE általános megoldásának a $T = I_x \times I_y$ *tartományon, ha:*

1. $(x, \varphi(x,c)) \in T$ *minden* $(x,c) \in T_1$ *esetén;*

2. $\dfrac{\partial \varphi(x,c)}{\partial x} \equiv f(x, \varphi(x,c))$ *minden* $(x,c) \in T_1$ *esetén;*

3. Az $y = \varphi(x,c)$ *egyenlet egyértelműen megoldható c-re:* $c = \Psi(x,y)$ *minden* $(x,c) \in T_1$ *esetén.*

Megemlítjük, hogy az általános megoldás fogalma a gyakorlatban lineáris DE-ek esetén alkalmazható eredményesen.

3.1. Példa. Írjuk fel a

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \ , \ (x,y) \in T = R \times R \tag{3.2}$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az integrálszámításból tudjuk, hogy egy adott $f : R \to R$, $f = f(x)$ függvény primitív függvénye egyenlő

$$y(x) = \int f(x)dx + c\ ,\ c \in R\ , \tag{3.3}$$

melyre

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{3.4}$$

Tulajdonképpen a (3.4) alakú DE megoldása a (3.3) primitív függvénnyel adódik, amely egyben a szóban forgó DE általános megoldása is. A (3.2) példánkban $f(x) = x^3$, ezért (3.3) szerint az általános megoldás

$$y = \varphi(x,c) = \int x^3 dx + c = \frac{x^4}{4} + c\ ,$$

ahol $c \in R$ tetszőleges valós állandó.

Ebben az esetben az általános megoldás definíciójában szereplő tartományokat a következőképpen választhatjuk:

$$T = R \times R \quad (I_x = R\ , I_y = R);$$

$$T_1 = R \times R \quad (I_x = R\,, I_c = R).$$

Megjegyzés.
A partikuláris megoldás nem tartalmaz szabadon választható állandókat és úgy kapható meg az általános megoldásból, hogy az abban szereplő állandóknak konkrét számbeli értéket adunk, melyek bizonyos algebrai egyenletek megoldásaként adódnak. Általában a partikuláris megoldás meghatározása céljából az adott DE-hez megfelelő számú mellékfeltételt kell előírni (annyit, amennyi a DE rendje).
Most már mondhatjuk, hogy a (2.11) alakú

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

kezdetiérték-feladat megoldása annyit jelent, hogy meg kell határozni a $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely teljesíti az előírt $y(x_0) = y_0$ kezdetifeltételeket.

3.2 Példa. Oldjuk meg a

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x \\ y(0) = 2\,,\ y'(0) = 3 \end{cases} \qquad x \in I_x = [0,1],\ y \in R \tag{3.6}$$

kezdetiérték-feladatot.

Megoldás. Először keressük meg az adott DE $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ általános megoldását (az általános megoldásnak két tetszőlegesen választható c_1 és c_2 állandót kell tartalmaznia, mivel a DE másodrendű).
A primitív függvény segítségével kapjuk, hogy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 6x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + c_1 \Rightarrow y = \varphi(x, c_1, c_2) = x^3 + c_1 x + c_2\,,$$

ahol $c_1, c_2 \in R$ tetszőleges állandók.
Továbbá az általános $y = \varphi(x, c_1, c_2) = x^3 + c_1 x + c_2$ megoldásban úgy választjuk meg a c_1, c_2 állandókat, hogy teljesüljenek az adott kezdeti feltételek:

$$\begin{matrix} y = f(x, c_1, c_2)\big|_{x=0} = 2 \\ y' = \varphi'_x(x, c_1, c_2)\big|_{x=0} = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^3 + c_1 x + c_2\big|_{x=0} = 2 \\ 3x^2 + c_1\big|_{x=0} = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_2 = 2\,, \\ c_1 = 3\,. \end{matrix}$$

Tehát a (3.6) kezdetiérték-feladat megoldása, azaz keresett partikuláris megoldást az

$$y = \varphi(x, c_1, c_2) = x^3 + c_1 x + c_2$$

általános megoldásból kapjuk, ha $c_2 = 2$ és $c_1 = 3$:

$$y_{partikuláris}(x) = x^3 + c_1 x + c_2\big|_{\substack{c_1 = 3 \\ c_2 = 2}} = x^3 + 3x + 2\,.$$

3.1 Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Definíció (szétválasztható változójú egyenlet)
A

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)\ ,\ f : I_x \to R\ ,\ g : I_y \to R \tag{3.7}$$

alakra hozható differenciálegyenlet szétválasztható változójúnak nevezzük, feltételezve, hogy az adott

$$f : \dot{I}_x \to R \ , \ g : I_y \to R$$

függvények folytonosak rendre az $I_x, I_y \subset R$ *nyílt intervallumon.*

Írjuk át (3.7) ekvivalens differenciál alakban

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \to dy = f(x) \cdot g(x) dx \,. \tag{3.8}$$

Feltételezzük, hogy

$$g(y) \neq 0 \text{, minden } y \in I_y \text{ esetén.} \tag{3.9}$$

Ha (3.9) teljesül, akkor (3.8) következőképpen írható át

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \,, \tag{3.10}$$

ahol a bal oldalon csak *y*-tól, a jobb oldalon csak *x*-től függő differenciál található. Az analízisből ismert

$$d\left[\int f(x) dx\right] = f(x) \ , \ d\left[\int_{x_0}^{x} f(s) ds\right] = f(x) dx \tag{3.11}$$

összefüggések alapján (3.10) átrendezésével kapjuk, hogy

$$\begin{gathered} f(x) dx - \frac{dy}{g(y)} = 0 \to d\left[\int f(x) dx\right] - d\left[\frac{1}{g(y)} dy\right] = 0 \to \\ \to d\left[\int f(x) dx - \int \frac{1}{g(y)} dy\right] = 0 \to \int f(x) dx - \int \frac{1}{g(y)} dy = c \,, \quad c \in R \,. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Bevezetve az alábbi jelöléseket

$$\int f(x) dx = F(x) \ , \ \int \frac{1}{g(y)} dy = G(y) \tag{3.13}$$

(3.12) a következő egyenlőséget kapjuk:

$$F(x) - G(y) = c \,, \quad c \in R \tag{3.14}$$

Tétel (szétválasztható változójú DE általános implicit alakú megoldásáról)

Ha (3.7)-ben $f : I_x \to R$ *,* $g : I_y \to R$ *folytonos függvények és* $g(y) \neq 0$*, ha* $y \in I_y$*, akkor a szétválasztható változójú DE általános megoldása (implicit alakban) a következőképpen írható fel:*

$$\int f(x) dx - \int \frac{1}{g(y)} dy - c = 0 \,, \quad c \in R, \tag{3.15}$$

vagy a (3.13) jelölések alkalmazásával:

$$F(x) - G(y) - c = 0 \,, \quad c \in R \,. \tag{3.16}$$

Bizonyítás. Kimutatjuk, hogy minden folytonosan differenciálható $y = \varphi(x)$ függvény, amely egy konkrét $c = c_0$ érték mellett azonosan kielégíti (3.15)-t, azaz melyre

$$\int f(x) dx - \int \frac{\varphi(x) dx}{g(\varphi(x))} - c_0 \equiv 0 \tag{3.17}$$

egyben a (3.7) DE megoldása.

A (3.17) azonosságot differenciálva kapjuk, hogy

$$f(x)dx - \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))}dx \equiv 0 .$$

Az utóbbi megszorozva $g(\varphi(x))$-el, a szükséges

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x) \cdot g(\varphi(x)) \tag{3.18}$$

azonossághoz jutunk.

Fordítva, ha egy folytonosan differenciálható $y = \varphi(x)$ függvényre fennáll a (3.18) azonosság, akkor bizonyos $c = c_0$ értékre teljesül a (3.17) azonosság is. Valóban elvégezve az alábbi átrendezést és az azonosság mindkét oldalát integrálva kapjuk, hogy

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x) \cdot g(\varphi(x)) \to f(x)dx \equiv \frac{\varphi'(x)dx}{g(\varphi(x))} \to \int \to$$

$$\to \int f(x)dx \equiv \int \frac{\varphi'(x)dx}{g(\varphi(x))} + c_0 \to \int f(x)dx - \int \frac{d\varphi}{g(\varphi)} - c_0 = 0$$

3.3. Példa. Keressük meg a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{(3x + xy)} \;, \; x \in I_x = (-3, +\infty), \quad y \in I_y = (1, +\infty)$$

DE általános megoldását, majd válasszuk ki azt a partikuláris megoldást, amelynek görbéje áthalad a $P\left(0, \sqrt{37}\right)$ ponton.

Megoldás. Először felírjuk az általános megoldást:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{3y + xy} \to \left(y^2 - 1\right)dx = y(3 + x)dy \to : /\left(y^2 - 1\right)(3 + x) \to \frac{y}{y^2 - 1}dy = \frac{1}{x + 3}dx \to \int \to$$

$$\to \int \frac{y}{y^2 - 1}dy = \int \frac{1}{x + 3}dx \to \frac{1}{2}\ln\left(y^2 - 1\right) = \ln(x + 3) + \frac{1}{2}\ln c \to \ln\frac{y^2 - 1}{c} = 2\ln(x + 3) \to$$

$$\to y^2 - 1 = c(x + 3)^2 \to y^2 = 1 + c(x + 3)^2 \;, \quad c \in R_0^+ \;.$$

A partikuláris megoldást akkor kapjuk meg az általános (implicit alakú)

$$y^2 = 1 + c(x + 3)^2$$

megoldásból, ha figyelembe vesszük az adott kezdeti feltételt:

$$y(0) = \sqrt{37} \;.$$

Ekkor

$$y^2 - 1 - c(x + 3)^2\Big|_{\substack{x=0 \\ y=\sqrt{37}}} = 0 \to 37 - 1 - c \cdot 9 = 0 \to 9c = 36 \to c = 4 \to$$

$$\to y^2_{\text{kezdetiérték}}(x) = c(x + 3)^2 + 1\Big|_{c=4}$$

Tehát a keresett partikuláris megoldás (implicit alakban):

$$y^2 = 4(x + 3)^2 + 1 .$$

3.2. Elsőrendű lineáris homogén DE

Az elsőrendű lineáris homogén DE általános alakja

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0\ ,\ x\in I_x \tag{3.19}$$

ahol $p:I_x\to R$ adott együttható függvény.

Keressük a (3.19) DE általános megoldását a

$$T=\{x\in I_x\ ,\ y\in I_y=(-\infty,\infty)\} \tag{3.20}$$

tartományban.

A (3.19) egyenlet szétválasztható változójú, melynek megoldási módszere ismert:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0\to dy=-p(x)ydx\to\frac{dy}{y}=-p(x)dx\ ,\ y\neq 0\to$$

$$\to\int\frac{dy}{y}=-\int_{y\neq 0}p(x)dx\to\begin{array}{l}\ln y=-\int p(x)dx+\ln c_1\ ,\ y>0\ ,\ c_1\in R_0^+=(0,+\infty)\\ \ln(-y)=-\int p(x)dx+\ln(-c_2)\ ,\ y<0\ ,\ c_2\in R_0^-=(-\infty,0)\end{array}\to$$

$$\to y(x)=y_{h.á.}(x)=\begin{cases}c_1e^{-\int p(x)dx}\ ,\ y>0\ ,\ c_1\in R_0^+=(0,+\infty)\ ,\\ c_2e^{-\int p(x)dx}\ ,\ y<0\ ,\ c_2\in R_0^-=(-\infty,0)\ .\end{cases} \tag{3.21}$$

Nyilvánvaló, hogy $y\equiv 0$ függvény is megoldása (ún. triviális megoldása) a (3.19) egyenletnek. Tehát, a (3.19) lineáris homogén DE általános megoldása a (3.20) tartományon a (3.21) formulák alapján a következőképpen írható fel:

$$y=y_{h.á.}(x)=c\cdot e^{-\int p(x)dx}\ ,\quad c\in R\ , \tag{3.22}$$

ahol a tetszőleges *c* konstans felvehet mind pozitív, mind negatív értéket illetve egyenlő is lehet nullával.

Könnyű belátni, hogy a

$$\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0\\ y(x_0)=y_0\end{array} \tag{3.23}$$

kezdetiérték-feladat megoldása (3.22)-ből kapható, ha abban $c=y_0$:

$$y=y_{\text{kezdetiérték}}(x)=y_0\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)ds}\ . \tag{3.24}$$

3.4. **Példa**: Oldjuk meg a

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=0\\ y(2)=-4\end{cases},\quad (x,y)\in T=I_x\times I_y=(0,+\infty)\times(-\infty,0) \tag{3.25}$$

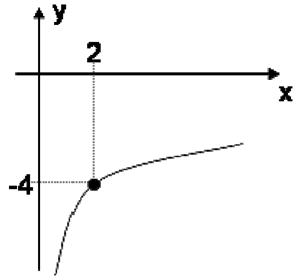
kezdetiérték-feladatot.

Megoldás. A változók szétválasztásával először keressük az általános megoldást:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0\rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\rightarrow\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}\rightarrow$$
$$\rightarrow\ln(-y)=-\ln x+\ln(-c_1),\ c_1\in R_0^-=(-\infty,0)\rightarrow$$
$$\rightarrow\ln\frac{y}{c_1}=-\ln x\rightarrow y=\frac{c_1}{x},\quad c_1\in(-\infty,0)\quad,x\in(0,+\infty).$$

Figyelembe véve az adott $y(2)=-4$ kezdeti feltételt az $y=y_á(x)=\frac{c_1}{x}$ megoldásban meghatározzuk a megfelelő c konstans számbeli értékét:

$$y(2)=-4:-4=\frac{c_1}{2}\rightarrow c_2=-8\rightarrow y_{\text{kezdetiérték}}(x)=\frac{-8}{x}\quad.$$



Ugyan az a megoldás megkaphatjuk a (3.24) formula szerint is

$$y=y_{\text{kezdetiérték}}(x)=y_0\cdot e^{-\int\limits_{x0}^{x}p(x)dx}=-4\cdot e^{-\int\limits_{2}^{x}\frac{1}{s}ds}=-4\cdot e^{-\ln s|_2^x}=$$
$$=-4\cdot e^{-\ln x+\ln 2}=-4\cdot e^{-\ln x}\cdot e^{\ln 2}=-8e^{\ln\frac{1}{x}}=-\frac{8}{x};$$

3.3. Elsőrendű lineáris inhomogén DE

Az elsőrendű lineáris inhomogén DE általános alakja

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x),\quad x\in I_x \tag{3.26}$$

ahol $p:I_x\rightarrow R$ és $q:\dot{I}_x\rightarrow R$ adott folytonos függvények egy közös $\dot{I}_x$ értelmezési tartománnyal.
Kiindulva a megfelelő (3.19) homogén DE (3.22) alakú általános megoldásából, az (3.20) inhomogén DE általános megoldását az ún „**állandó variálásának módszerével**" keressük

$$y=c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}=c(x)\cdot Y(x)\quad,Y(x)=e^{-\int p(x)dx} \tag{3.27}$$

alakban, azaz (3.22)-ben a c konstanst az x változó tetszőleges differenciálható $c(x)$ függvényének tekintjük.
A (3.27) alakú függvényt differenciáljuk és behelyettesítjük a (3.26) inhomogén egyenletbe:

$$\frac{dc(x)}{dx}\cdot Y(x)+c(x)\cdot\frac{dY(x)}{dx}+p(x)\cdot c(x)\cdot Y(x)=q(x),$$

melyből

$$\frac{dc(x)}{dx}\cdot Y(x)+c(x)\cdot\left[\frac{dY(x)}{dx}+p(x)\cdot Y(x)\right]=q(x)\quad. \tag{3.28}$$

Mivel $Y(x)=e^{-\int p(x)dx}$ a (3.19) homogén DE egyik partikuláris megoldása (a (3.22) általános megoldásból c=1 esetén kapható meg), ezért

$$\frac{dY(x)}{dx}+p(x)\cdot Y(x)\equiv 0 .$$

Ennek alapján a $c(x)$ ismeretlen függvényre (3.28)-ból a

$$\frac{dc(x)}{dx}Y(x)=q(x)$$

szétválasztható változójú DE-et kapjuk, melynek megoldási menetét már ismerjük:

$$\frac{dc(x)}{dx}\cdot Y(x)=q(x)\rightarrow dc=q(x)\cdot Y^{-1}(x)dx\rightarrow \int dc=\int q(x)\cdot Y^{-1}(x)dx\rightarrow$$

$$\rightarrow c(x)=\int q(x)\cdot Y^{-1}(x)dx+c\ ,\ c\in R \text{ tetszőleges állandó } \rightarrow$$

$$\rightarrow c(x)=\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+c \quad , \quad c\in R \ . \tag{3.29}$$

Az így meghatározott (3.29) alakú $c(x)$-et visszahelyettesítjük (3.27)-be és így megkapjuk a (3.26) inhomogén DE általános megoldását:

$$y=y_{i.á.}(x)=\underbrace{c\cdot e^{-\int p(x)dx}}_{=y_{h.á.}(x)}+e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx} , \quad c\in R \ . \tag{3.30}$$

Könnyű észrevenni, hogy (3.30) jobb oldalán az első tag nem más a megfelelő DE homogén megoldása.
Kimutatjuk, hogy a második tag, melyre vezessük be az alábbi jelölést:

$$e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}=y_{i.p.}(x), \tag{3.31}$$

a (3.26) lineáris inhomogén DE egyik $y_{i.p.}(x)$ partikuláris megoldása és akkor (3.30) alapján azt kapjuk, hogy a lineáris inhomogén (3.26) DE általános megoldása egyenlő a megfelelő lineáris (3.19) homogén DE általános megoldásával és az inhomogén DE egyik tetszőleges partikuláris megoldásának összegével:

$$y_{i.á.}(x)=y_{h.á.}(x)+y_{i.p.}(x)=c\cdot e^{-\int p(x)dx}+y_{i.p.}(x). \tag{3.32}$$

Valóban behelyettesítéssel az inhomogén DE-be kapjuk, hogy

$$\frac{d\left(y_{h.á.}(x)+y_{i.p.}(x)\right)}{dx}+p(x)\left(y_{h.á.}(x)+y_{i.p.}(x)\right)=q(x)\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{dy_{h.á.}(x)}{dx}+p(x)\cdot y_{h.á.}(x)+\frac{dy_{i.p.}(x)}{dx}+p(x)\cdot y_{i.p.}(x)=q(x),$$

ezért

$$\frac{dy_{i.p.}(x)}{dx}+p(x)\cdot y_{i.p.}(x)\equiv q(x). \tag{3.33}$$

3.5. **Példa** Oldjuk meg a

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+\cos x\cdot y=e^{-\sin x}\\ \qquad y(0)=3\end{cases} , (x,y)\in T=(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty) \tag{3.34}$$

kezdetiérték-feladatot.

Megoldás. Először a változók szétválasztásával meghatározzuk a megfelelő elsőrendű lineáris homogén DE megoldását:

$$\frac{dy}{dx} + \cos x \cdot y = 0 \to \frac{dy}{y} = -\cos x dx \to \int \to$$

$$\to y = y_{h.á}(x) = \begin{cases} c_1 e^{-\sin x} & , y \geq 0 , c_1 \in R^+ = [0, +\infty) \\ c_2 e^{-\sin x} & , y < 0 , c_2 \in R_0^- = (-\infty, 0) \end{cases} \to$$

$$\to \ y = y_{h.á}(x) = c \cdot e^{-\sin x} \ , c \in R \ ,$$

$$\to \text{Behelyettesítés az inhomogén DE - be} \to \frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{dx}} e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \to$$

$$\to \frac{dc}{dx} = 1 \to c(x) = x + c_1 \ , c_1 \in R \to$$

$$\to y = y_{i.á.} = (x + c_1) \cdot e^{-\sin x} = \underbrace{c_1 \cdot e^{-\sin x}}_{y_{h.á}(x)} + \underbrace{x \cdot e^{-\sin x}}_{y_{i.p.}(x)} , c_1 \in R \to \tag{3.36}$$

$$\to y = y_{i.á.} = y_{h.á.}(x) + y_{i.p.}(x) \ .$$

Megjegyezzük, hogy a (3.36) megoldást közvetlenül a (3.30) formula segítségével is kiszámíthattuk volna.
Felhasználval az adott $y(0) = 3$ kezdeti feltételt, a (3.36) általános megoldásból könnyen meg tudjuk kapni a (3.34) kezdetiérték-feladat megoldását:

$$y(0) = 3 \to 3 = c_1 \cdot e^{-\sin 0} + 0 \cdot e^{-\sin 0} \to 3 = c_1 \to$$

$$y_{\text{kezdetiérték}}(x) = 3 \cdot e^{-\sin x} + x \cdot e^{-\sin x} \ .$$

4. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Tekintsük a

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_0(x)y=q(x)\ ,\ x\in \dot{I}_x \tag{4.1}$$

alakú másodrendű változó együtthatójú lineáris differenciálegyenletet.
Ha $q(x\equiv 0)$, akkor (4.1) homogén egyenletnek mondjuk, ellenkező esetben inhomogén egyenletről van szó.
Tegyük fel, hogy a $p_1, p_0, q : I_x \to R$ függvények folytonosak.

Definíció (alaprendszer fogalma)
A másodrendű lineáris homogén

$$y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=0\ ,\ p_1,p_0\in C(\dot{I}_x) \tag{4.2}$$

differenciálegyenlet két tetszőleges

$$y=y_1(x)\ ,\ y=y_2(x)\ , \tag{4.3}$$

az $\dot{I}_x$ *intervallumon lineáris független megoldását (olyan megoldásokat, melyekre*

$$y_1(x_0)\cdot y_2'(x_0)-y_2(x_0)\cdot y_1'(x_0)\neq 0, \tag{4.4}$$

ahol $x_0\in \dot{I}_x$ *az* $\dot{I}_x$ *értelmezési tartomány tetszőleges pontja),*
a (4.2) másodrendű homogén differenciálegyenlet egyik alaprendszerének nevezzük.

Tétel (a homogén DE általános megoldásának felírásáról)
Ha a (4.3) függvények a (4.2) DE egyik alaprendszerét alkotják, akkor az egyenlet általános megoldása a következő alakban írható fel:

$$y=y_{h.á.}(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\ ,\ x\in I_x\ , \tag{4.5}$$

ahol c_1, c_2 *tetszőleges valós állandók.*
Bizonyítás. Egyszerű behelyettesítéssel, felhasználva a differenciálás szabályait, igazolhatjuk, hogy a (4.5) alakú függvény a (4.2) DE megoldása.
Valóban

$$\begin{aligned}&(c_1y_1''+c_2y_2'')+p_1(x)(c_1y_1'+c_2y_2')+p_0(x)(c_1y_1+c_2y_2)=\\&=c_1(y_1''+p_1(x)y_1'+p_0(x)y_1)+c_2(y_2''+p_1(x)y_2'+p_0(x)y_2)\equiv 0\ .\end{aligned}$$

Továbbá, legyen

$$y=\varphi(x)$$

(4.2) egy tetszőleges megoldása, és tekintsük az

$$\begin{cases}y_1(x_0)\cdot c_1+y_2(x_0)\cdot c_2=\varphi(x_0)\\ y_1'(x_0)\cdot c_1+y_2'(x_0)\cdot c_2=\varphi'(x_0)\end{cases}\ ,\ x_0\in I_x \tag{4.6}$$

lineáris inhomogén algebrai egyenletrendszert a c_1, c_2 ismeretlenekre nézve. Mivel a (4.6) egyenletrendszer mátrixának determinánsa

$$y_1(x_0)\cdot y_2'(x_0)-y_2(x_0)\cdot y_1'(x_0)\neq 0,$$

ezért (4.6)-nak létezik pontosan egy

$$c_1=c_1^*\ ,\ c_2=c_2^*$$

megoldása.

Ezért, a két tetszőleges c_1, c_2 állandót tartalmazó (4.5) alakú függvény az általános megoldás definíciója szerint, valóban a (4.1) másodrendű lineáris homogén DE általános megoldását adja.
Általános esetben a változó együtthatójú (4.1) DE alaprendszerét nem tudjuk meghatározni. Azonban, ha a homogén lineáris differenciálegyenlet együtthatói állandók, akkor mindig létezik elemi függvényekből álló alaprendszer, melynek alapján az általános (4.5) megoldás mindig felírható zárt alakban.

4.1 Konstans együtthatós homogén egyenletek

Állítsuk elő az

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \ , \ a_1, a_0 \in R \ , \ x \in I_x = (-\infty, +\infty) \tag{4.7}$$

állandó együtthatójú homogén DE egyik alaprendszerét.
Keressük a (4.7) DE megoldását

$$y = e^{\lambda x} \tag{4.8}$$

alakban, ahol λ egyelőre ismeretlen állandó (valós vagy komplex).
Mivel

$$y' = \left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda \cdot e^{\lambda x} \ , \quad y'' = \left(e^{\lambda x}\right)'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \ ,$$

a (4.7) DE-be való behelyettesítés eredményeként kapjuk, hogy

$$e^{2\lambda}\left(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\right) = 0 \,. \tag{4.9}$$

Mivel $e^{\lambda x} \neq 0$, $x \in R$, (4.8) és (4.9)-ből az következik, hogy az

$$y = e^{\lambda_j x} \ , \quad x \in (-\infty, +\infty) \tag{4.10}$$

alakú függvény akkor és csak akkor megoldása a (4.7)-nek, ha $\lambda = \lambda_j$ a

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{4.11}$$

egyenlet gyöke.
A (4.11) másodfokú algebrai egyenletet a (4.7) állandó együtthatójú DE **karakterisztikus egyenletének nevezzük.**
A (4.11) karakterisztikus egyenletnek a komplex számok halmazán pontosan két gyöke létezhet:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \ , \tag{4.12}$$

melyek az a_1, a_0 együtthatóktól függően lehetnek valósak vagy komplexek.
Három esetet fogunk megkülönböztetni.
1. eset: Két különböző valós gyök esete
Ha $a_1^2 - 4a_0 > 0$, akkor a (4.11) karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van:

$$\lambda_1 := -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \ , \quad \lambda_2 := -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \tag{4.13}$$

Az előbbi megállapítás szerint az $y_1(x) := e^{\lambda_1 x}$ és $y_2(x) := e^{\lambda_2 x}$ függvények megoldásai (4.7) – nek.
Másrészt (4.4) figyelembevételével $x_0 = 0$ esetén

$$y_1(0) \cdot y_2'(0) - y_1'(0) \cdot y_2(0) = 1 \cdot \lambda_2 - 1 \cdot \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0 \ ,$$

tehát a (4.7) DE egyik alaprendszere

$$y = y_1(x) = e^{\lambda_1 x}\ , \quad y = y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \tag{4.14}$$

és (4.5) alapján

$$y_{h.á.} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}\ , \quad c_1, c_2 \in R\ . \tag{4.15}$$

2. eset Kétszeres valós gyök esete.

Ha $a_1^2 - 4a_0 = 0$, akkor a (4.11) karakterisztikus egyenletnek egy kétszeres valós gyöke van:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}\ . \tag{4.16}$$

Ekkor az

$$y_1(x) := e^{\lambda x}\ ,\ \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} \tag{4.17}$$

függvény megoldása (4.7)-nek és az alaprendszer egyik függvényét adja. De mi lesz az alaprendszer másik eleme?

Erre úgy jöhetünk rá, ha megfigyeljük, hogy mi történik, amikor az 1. eset a 2. esetbe megy át, vagyis $\lambda_1 \neq \lambda_2$, λ_1 rögzített, és $\lambda_2 \to \lambda_1$.

Számoljuk ki az $y = e^{\lambda_2 x}$ függvénynek a λ_2 változó szerinti parciális deriváltját

$$\lim_{\lambda_1 \to \lambda_1} \frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} \frac{x \cdot e^{\lambda_2 x}}{1} = x \cdot e^{\lambda_1 x} \tag{4.18}$$

Sejthető, hogy a (4.18) határérték is megoldása (4.7)-nek, mivel minden rögzített λ_1, λ_2-re a lim jel mögött álló függvény megoldása (4.7)-nek.

Ezért legyen az alaprendszer második függvénye

$$y_2(x) := x \cdot e^{\lambda x}\ , \quad \lambda = \lambda_1 = \lambda_2\ . \tag{4.19}$$

A (4.19) függvényt és deriváltjait behelyettesítve (4.7)-be kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&y_2'(x) = e^{\lambda x} + x \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x},\\
&y_2''(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x} + \lambda \cdot e^{\lambda x} + \lambda^2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 \cdot x \cdot e^{\lambda x}\\
&2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1\left(e^{\lambda x} + x \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x}\right) + a_0 \cdot x \cdot e^{\lambda x} =\\
&= e^{\lambda x} \cdot \left[\underbrace{(2\lambda + a_1)}_{=0} + \underbrace{\left(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\right)}_{=0} \cdot x\right] e^{\lambda x} = 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

mivel $\lambda = -\frac{a_1}{2}$ a (4.17) karakterisztikus egyenlet gyöke, vagyis (4.19) tényleg megoldás.

Mivel

$$y_1(0) \cdot y_2'(0) - y_2(0) \cdot y_1'(0) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \lambda = 1 \neq 0\ ,$$

ezért az

$$y_1(x) = e^{\lambda x} \quad , \quad y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x} \quad , \quad \lambda = -\frac{a_1}{2} \tag{4.21}$$

függvények alaprendszert alkotnak, és ezért

$$y_{h.á.}(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} \quad , \lambda_1 = -\frac{a_1}{2}, \quad c_1, c_2 \in R\ . \tag{4.22}$$

3. eset Komplex gyökök esete

Ha $a_1 - 4a_0 < 0$, akkor a (4.11) karakterisztikus egyenletnek nincs valós megoldása. Ez esetben két komplex gyök

$$\lambda_1 = \underbrace{-\frac{a_1}{2}}_{=a} + i\underbrace{\sqrt{a_0^2 - \frac{a_1^2}{4}}}_{=b} = a + i \cdot b \quad \lambda_2 = \underbrace{-\frac{a_1}{2}}_{=a} - i\underbrace{\sqrt{a_0^2 - \frac{a_1^2}{4}}}_{=b} = a - i \cdot b \quad , i^2 = -1 \qquad (4.23)$$

jelenik meg.

Ekkor az ún. valós változójú komplex függvények

$$\tilde{y}_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(a+ib)x}, \quad \tilde{y}_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{(a-ib)x} \qquad (4.24)$$

a (4.7) DE megoldásai.

Az analízisből ismert

$$e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx, \qquad (4.25)$$

ún. Euler-formula segítségével (4.24) megoldásfüggvényeknek fel tudjuk írni a valós és képzetes részét:

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) = \underbrace{e^{ax} \cos bx}_{u(x)} + i \cdot \underbrace{e^{ax} \sin bx}_{v(x)} =$$

$$= u(x) + i \cdot v(x),$$

$$\tilde{y}_2(x) = e^{(a-ib)x} = e^{ax} \cdot e^{-ibx} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx) = \underbrace{e^{ax} \cos bx}_{u(x)} - i \cdot \underbrace{e^{ax} \sin bx}_{v(x)} = \qquad (4.26)$$

$$= u(x) - i \cdot v(x).$$

Közvetlen behelyettesítéssel ellenőrizni tudjuk, hogy a két valós

$$u(x) = e^{ax} \cos bx \quad \text{és} \quad v(x) = e^{bx} \sin bx \qquad (4.27)$$

függvény a (4.7) DE megoldása (4.23) esetén.

Valóban

$$u(x) = e^{ax} \cos bx; \quad u'(x) = a \cdot e^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx;$$

$$u''(x) = a^2 e^{ax} \cos bx - abe^{ax} \sin bx - abe^{ax} \sin bx - b^2 e^{ax} \cos bx =$$

$$= a^2 e^{ax} \cos bx - 2abe^{ax} \sin bx - b^2 e^{ax} \cos bx,$$

$$a^2 e^{ax} \cos bx - 2abe^{ax} \sin bx - b^2 e^{ax} \cos bx + a_1\left(e^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx\right) + a_0 e^{ax} \cos bx =$$

$$= e^{ax} \cos bx\left[a^2 - b^2 + a_1 a + a_0\right] + e^{ax} \sin bx\left[-2ab - a_1 b\right] = \begin{array}{l} a = -\dfrac{a_1}{2} \\ b = \sqrt{a_0 - \dfrac{a_1^2}{4}} \end{array} =$$

$$= e^{ax} \cos bx\left[\frac{a_1^2}{4} - a_0 + \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{2} + a_0\right] + e^{ax} \sin bx\left[+2\frac{a_1}{2}b - a_1 b\right] =$$

$$= e^{ax} \cos bx \cdot 0 + e^{ax} \sin bx \cdot 0 \equiv 0.$$

Ezért komplex gyökök esetén

$$y_{h.á.} = c_1 \cdot u(x) + c_2 \cdot v(x) = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx, \qquad (4.28)$$

ahol $a = -\frac{a_1}{2}; \quad b = \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} \quad , c_1, c_2 \in R$.

4.1. Példa Írjuk fel az

$$y'' + y' - 6y = 0$$

DE alaprendszerét és általános megoldását.
Megoldás. A (4.11) karakterisztikus egyenlet ez esetben

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2 \, , \lambda_2 = 3 \ .$$

Az egyik alaprendszer (4.14) szerint

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x} \ ; \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-3x}$$

és (4.15) alapján

$$y_{h.á.}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \ , \quad c_1, c_2 \in R \ .$$

4.2 Példa. Határozzuk meg az

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

DE általános megoldását.
Megoldás. A karakteriszikus egyenlet gyökei

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -2 \ .$$

Ezért kétszeres gyökök esetén (4.17), (4.19) szerint

$$y_1(x) = e^{\lambda x} = e^{-2x} \ ; y_2(x) = x \cdot e^{-2x}$$

és $y_{h.á.}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} \ , \quad c_1, c_2 \in R \ .$
4.3. Példa. Oldjuk meg az

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

differenciálegyenletet.
Megoldás. A $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyöke a

$$\lambda_1 = -2 + 3i \text{ és } \lambda_2 = -2 - 3i$$

komplex konjugált gyökpár.
A (4.27) formulák alapján az alaprendszer függvényei

$$y_1(x) = u(x) = e^{ax} \cos bx = e^{-2x} \cos 3x;$$
$$y_2(x) = v(x) = e^{ax} \sin bx = e^{-2x} \sin 3x$$

melyek segítségével és (4.28) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$y_{h.á.}(x) = c_1 e^{-2x} \cos bx + c_2 e^{-2x} \sin 3x \ , \quad c_1, c_2 \in R \ .$$

4.2 Állandó együtthatójú inhomogén egyenletek

Tekintsük ismét a

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = q(x) \ , \ x \in \dot{I}_x \tag{4.29}$$

alakú változó együtthatójú lineáris differenciálegyenletet, és a hozzá tartozó

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x) = 0 \quad , \quad x \in I_x \tag{4.30}$$

homogén egyenletet.
Elöljáróban ismertetjük a homogén és inhomogén egyenlet megoldásainak egyes olyan összefüggéseit, amelyekre szükség lesz a továbbiakban.

Tétel (az inhomogén egyenlet két megoldásának különbségéről)
Ha

$$y=\varphi_1(x)\ ,\ y=\varphi_2(x)$$

megoldásai a (4.29) inhomogén egyenletnek, akkor különbségük

$$y=\Psi(t):=\varphi_1(x)-\varphi_2(x) \tag{4.31}$$

a megfelelő (4.30) homogén DE megoldása.
Bizonyítás. Helyettesítsük be a (4.31) függvényt (4.30)-ba:

$$\Psi''(t)+p_1(x)\Psi'(t)+p_0(x)\Psi(t)=(\varphi_1''(x)-\varphi_2''(x))+p_1(x)(\varphi_1'(x)-\varphi_2'(x))+p_0(x)(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))=$$
$$\underbrace{[\varphi_1''(x)+p_1(x)\varphi_1'(x)+p_0(x)\varphi_1(x)]}_{=q(x)}+\underbrace{[\varphi_2''(x)+p_1(x)\varphi_2''(x)+p_0(x)\varphi_2(x)]}_{=q(x)}=q(x)-q(x)=0$$

és pontosan ezt kellett bebizonyítani.
A következő állítás az inhomogén DE általános megoldásának szerkezetét írja le.
Tétel (az inhomogén egyenlet általános megoldásának alakjáról)
Az inhomogén (4.29) DE általános megoldása egyenlő a megfelelő homogén DE általános és az inhomogén DE egy tetszőleges megoldásának az összegével:

$$y=y_{i.á.}(x)=y_{h.á.}(x)+y_{i.p.}(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_{i.p.}(x)\ , \tag{4.32}$$

ahol $y_1(x)$, $y_2(x)$ *a homogén DE egyik alaprendszere.*
Bizonyítás. Először is meg kell győződnünk, hogy (4.32) bármely $c_1,c_2\in R$ konstansra a (4.29) inhomogén DE megoldása.
A (4.29) egyenletbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$\begin{aligned}
&y''_{i.á.}(x)+p_1(x)y'_{i.á.}(x)+p_0(x)y_{i.á.}(x)=(c_1,y_1(x)+c_2y_2(x)+y_{i.p.}.(x))''+\\
&+p_1(x)(c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_{i.p.}(x))'+p_0(x)(c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_{i.p.}(x))=\\
&=c_1\underbrace{[y_1''+p_1(x)y_1'+p_0(x)y_1]}_{=0}+c_2\underbrace{[y_2''+p_1(x)y_2'+p_0(x)y_2]}_{=0}+\\
&+\underbrace{[y''_{i.p.}(x)+p_1(x)y'_{i.p.}(x)+p_0(x)y_{i.p.}(x)]}_{=q(x)}=q(x)\,.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Tehát (4.32) valóban a (4.29) inhomogén DE megoldása.
Még azt kell bebizonyítani, hogy az inhomogén DE tetszőleges $y=\varphi(x)$ megoldása megkapható a (4.32) összefüggésből a c_1,c_2 állandók valamely konkrét értékén, azaz léteznek olyan

$$c_1=\overline{c}_1\ ,\ c_2=\overline{c}_2 \tag{4.34}$$

értékek, melyekre

$$y=\varphi(x)=\overline{c}_1y_1(x)+\overline{c}_2y_2(x)+y_{i.p.}(x) \tag{4.35}$$

Az előbbi tétel szerint a

$$[\varphi(x)-y_{i.p.}(x)] \tag{4.36}$$

különbség megoldása a (4.30) homogén DE-nek. Ezek szerint léteznek olyan (4.34) konstansok, hogy

$$\varphi(x)-y_{i.p.}(x)=\overline{c}_1y_1(x)+\overline{c}_2y_2(x) \tag{4.37}$$

ahonnan egyszerű átrendezéssel a kívánt (4.35) azonosság következik.
Alkalmazzuk ezeket az ismereteket (a (4.32) formulát) az

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = q(x) \ , \ a_1, a_0 \in R \ , \ x \in \dot{I}_x = (-\infty, \infty) \tag{4.38}$$

állandó együtthatójú DE általános megoldásának a meghatározására.
A megfelelő

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \ , \ a_1, a_0 \in R \ , \ x \in \dot{I}_x = (-\infty, \infty) \tag{4.39}$$

homogén DE $y_{h.á.}(x)$ általános megoldását az $y_1(x)$, $y_2(x)$ alaprendszer ismeretében már fel tudjuk írni (lásd a (4.14), (4.15) és (4.21), (4.22) illetve (4.27), (4.28) formulákat).
Tehát, hogy alkalmazni tudjuk a (4.32) tulajdonságot, már csak az inhomogén DE egy tetszőleges $y_{i.p.}(x)$ partikuláris megoldását kell tudni kiszámolni.
A (4.38) inhomogén DE egyik $y_{i.p.}(x)$ partikuláris megoldásának meghatározására speciális $q(x)$ alakú jobb oldal esetén gyakran az ún. **határozatlan együtthatók módszerét** alkalmazzák, amelyet még **próbafüggvény-módszernek is neveznek**.
A most ismertetendő módszer végrehajtása során nem kell integrálnunk, csupán deriválni és algebrai műveleteket kell végeznünk. Igaz viszont, hogy csak speciális $q(x)$ jobb oldalak, és csak állandó együtthatós egyenlet esetében működik a szóban forgó módszer.
Tekintsük a (4.38) DE speciális esetét

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = e^{ax}(A_1 \cos bx + A_2 \sin bx), \tag{4.40}$$

ahol a_1, a_0, a, A_1 adott állandók.
Keressük a (4.40) inhomogén DE partikuláris megoldását

$$y = y_{i.p.}(x) = e^{ax}(B_1 \cos bx + B_2 \sin bx) \tag{4.41}$$

alakban, ahol a B_1, B_2 együtthatók egyelőre ismeretlen konstansok.
A (4.41) kifejezés deriválása után

$$\begin{aligned}
y' &= a \cdot e^{ax} \cdot (B_1 \cos bx + B_2 \sin bx) + e^{ax}(-B_1 b \sin bx + B_2 b \cos bx) = \\
&= (a \cdot B_1 + b \cdot B_2)e^{ax} \cos bx + (a \cdot B_2 - b \cdot B_1)e^{ax} \sin bx \ ; \\
y'' &= a(aB_1 + bB_2)e^{ax} \cos bx - b(aB_1 + bB_2)e^{ax} \sin bx + \\
&+ a(aB_2 - bB_1)e^{ax} \sin bx + b(aB_2 - bB_1)e^{ax} \cos bx = \\
&= (a^2 B_1 + abB_2 + abB_2 - b^2 B_1)e^{ax} \cos bx + (-abB_1 + b^2 B_2 + a^2 B_2 - abB_1)e^{ax} \sin bx = \\
&= (a^2 B_1 + 2abB_2 - b^2 B_1)e^{ax} \cos bx + (a^2 B_2 - 2abB_1 - b^2 B_2)e^{ax} \sin bx \ .
\end{aligned} \tag{4.42}$$

A (4.41), (4.42) formulák a (4.40) egyenletbe behelyettesítés eredménye:

$$\begin{aligned}
&(a^2 + 2abB_2 - b^2 B_1)e^{ax} \cos bx + (a^2 B_2 - 2abB_1 - b^2 B_2)e^{ax} \sin bx + \\
&+ (a_1 a B_1 + a_1 b B_2)e^{ax} \cos bx + (a_1 a B_2 - a_1 b B_1)e^{ax} \sin bx + a_0 e^{ax}(B_1 \cos bx + B_2 \sin bx) = \\
&= e^{ax}(A_1 \cos bx + A_2 \sin bx) \ , \\
&\{[a^2 B_1 + 2abB_2 - b^2 B_1 + a_1 a B_1 + a_1 b B_2 + a_0 B_1] \cos bx + \\
&+ [a^2 B_2 - 2abB_1 - b^2 B_2 + a_1 a B_2 - a_1 b B_1 + a_0 B_2] \sin bx\} = \\
&= e^{ax}(A_1 \cos bx + A_2 \sin bx) \ , \quad x \in I_x = (-\infty, \infty) \ .
\end{aligned} \tag{4.43}$$

A B_1, B_2 számokat tehát úgy kellene megválasztani, hogy (4.43) teljesüljön minden x-re.
Egyenlővé téve a $\cos bx$ és $\sin bx$ melletti együtthatókat a (4.43) egyenletben, a következő algebrai egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}\cos bx &: \begin{cases} \left(a^2 - b^2 + a_1 a + a_0\right)B_1 + \left(2ab + a_1 b\right)B_2 = A_1 , \\ \left(-2ab - a_1 b\right)B_1 + \left(a^2 - b^2 + a_1 a + a_0\right)B_2 = A_2 . \end{cases} \\ \sin bx &: \end{aligned} \tag{4.44}$$

A

$$d_1 := a^2 - b^2 + a_1 a + a_0 \ , \ d_2 := 2ab + a_1 b \tag{4.45}$$

jelölések bevezetésével (4.44)-et a következőképpen írhatjuk át:

$$\begin{cases} d_1 B_1 + d_2 B_2 = A_1 , \\ -d_2 B_1 + d_1 B_2 = A_2 . \end{cases} \tag{4.46}$$

A (4.46) algebrai inhomogén egyenletrendszernek a B_1 és B_2 ismeretlenekre egyetlen egy megoldása van, ha

$$\det\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ -d_2 & d_1 \end{pmatrix} = d_1^2 + d_2^2 \neq 0 \quad , \tag{4.47}$$

azaz ha d_1 és d_2 valamelyike különbözik nullától.
Tehát, ha (4.47) teljesül, akkor (4.46) algebrai egyenletrendszerből egyértelműen meg tudjuk határozni a B_1 és B_2 állandókat, miután fel tudjuk írni a partikuláris megoldást (4.41) alakban.
De mi a teendő, ha $d_1 = d_2 = 0$, és (4.47) nem teljesül?
Ekkor

$$d_2 = b(2a + a_1) = 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow b = 0 \\ \rightarrow a = -\dfrac{a_1}{2} \end{array} \quad . \tag{4.48}$$

Ha $b = 0$, akkor

$d_1 = a^2 + a_1 a + a_0 = 0$, azaz az a paraméter a (4.11) karakterisztikus egyenlet gyöke.

Bizonyítás nélkül ismertetjük, hogy $d_1 = d_2 = 0$ esetén létezik a (4.40) inhomogén DE-nek:
1.

$$y = y_{i.p.}(x) = x \cdot B_1 e^{ax} \ , \ B_1 = const = ?, \tag{4.49}$$

alakú megoldása, ha $b = 0$ és a (4.40) jobb oldalán szereplő a paraméter a (4.11) karakterisztikus egyenlet egyszeres gyöke;
2.

$$y = y_{i.p.}(x) = x^2 B_1 e^{ax} \ , \ B_1 = const = ? \tag{4.50}$$

alakú megoldása, ha $b = 0$ és az a konstans (4.40)-ben a (4.11) karakterisztikus egyenlet kétszeres gyöke;
3.

$$y = y_{i.p.}(x) = x \cdot e^{ax}\left(B_1 \cos bx + B_2 \sin bx\right) \ , \ B_1 = ?, B_2 = ? \tag{4.51}$$

alakú megoldása, ha

$$\gamma = a + ib$$

a (4.11) karakterisztikus egyenlet egyszeres komplex gyöke.
A konkrét esetekben az egyes partikuláris megoldásokat úgy határozzuk meg, hogy a megfelelő alakú (4.41), (4.49), (4.50) vagy (4.51) partikuláris megoldást behelyettesítjük az adott (4.40) inhomogén DE-be és a kapott azonosság két oldalán lévő együtthatókat egyenlővé téve, meghatározzuk a keresett B_1, B_2 együtthatók számbeli értékét.

Megjegyzés. Ha az adott inhomogén DE jobb oldalán két zavaró függvény összege szerepel, azaz

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = q_1(x) + q_2(x), \tag{4.52}$$

és $y_1(x)$, $y_2(x)$ rendre az

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_0 y &= q_1(x) \quad , x \in I_x \\ y'' + a_1 y' + a_0 y &= q_2(x) \quad , x \in I_x \end{aligned} \tag{4.53}$$

differenciálegyenlet megoldása, akkor a (4.52) DE megoldása

$$y_3(x) = y_1(x) + y_2(x) \ . \tag{4.54}$$

Ezt a tulajdonságot közvetlen behelyettesítéssel tudjuk bizonyítani.

4.4. Példa Oldjuk meg az

$$y'' - 3y' - 4y = e^{2x} + \sin x \tag{4.55}$$

differenciálegyenletet.

Megoldás. A (4.32) formula szerint

$$y = y_{i.á.}(x) = y_{h.á.}(x) + y_{i.p.}(x).$$

Ezért először a megfelelő homogén DE $y_{h.á.}(x)$ általános megoldását keressük.

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

melynek gyökei $\lambda_1 = -1$, $\quad \lambda_2 = 4$.

Ezért (4.14), (4.15) alapján

$$y_{h.á.}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} \ , \ c_1, c_2 \in R \tag{4.55}$$

Az inhomogén (4.55) partikuláris megoldását külön-külön (4.52)-(4.54) alapján a

$$q_1(x) = e^{2x} \text{ és } q_2(x) = \sin x$$

zavarófüggvényekre keressük.

A $q_1(x) = e^{2x}$ zavarófüggvényt akkor kapjuk meg (4.40)-ből, ha abban $a = 2$, $A_1 = 1$, $b = 0$, és ekkor a e^{2x} függvényhez tartozó partikuláris megoldás alakja (4.41) szerint:

$$y = y_{i.p.}(x) = B_1 e^{2x} \quad , B_1 = const = ? \tag{4.56}$$

A $q_2(x) = \sin x$ függvényt az

$$a = 0, \ A_1 = 0, \ A_2 = 1 \ , \ b = 1$$

értékein kapjuk meg (4.40)-ből. Ekkor a $q_2(x) = \sin x$ -hez tartozó partikuláris megoldás alakja (4.41) szerint

$$y = y_{i.p.}(x) = B_2 \cos x + B_3 \sin x \quad , \quad B_2 = ?, B_3 = ? \tag{4.57}$$

A (4.54) formula alapján a partikuláris megoldást

$$y = y_{i.p.} = B_1 e^{2x} + (B_2 \cos x + B_3 \sin x) \tag{4.58}$$

alakban írjuk fel. Ekkor

$$\begin{aligned} y' &= 2B_1 e^{2x} - B_2 \sin x + B_3 \cos x, \\ y'' &= 4B_1 e^{2x} - B_2 \cos x - B_3 \sin x. \end{aligned}$$

A (4.58) próbafüggvényt és deriváltjait (4.55)-be behelyettesítve, az együtthatók összehasonlításával:

$$4B_1e^{2x} - B_2\cos x - B_3\sin x - 3\left(2B_1e^{2x} - B_2\sin x + B_3\cos x\right) - 4B_1e^{2x} - 4\left(B_2\cos x + B_3\sin x\right) =$$
$$= e^{2x} + \sin x \ ,$$
$$e^{2x}: \ -6B_1 = 1 \rightarrow A_1 = -\frac{1}{6} \ ,$$

$$\begin{matrix} \cos x: \\ \sin x: \end{matrix} \begin{cases} -B_2 - 3B_3 - 4B_2 = 0 \rightarrow & -5B_2 - 3B_3 = 0 \\ -B_3 + 3B_2 - 4B_3 = 1 \rightarrow & 3B_2 - 5B_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} B_2 = \frac{3}{34}, \\ B_3 = -\frac{5}{34}, \end{matrix} \qquad (4.59)$$

melyek alapján

$$y_{i.p.}(x) = -\frac{1}{6}e^{2x} + \frac{3}{34}\cos x - \frac{5}{34}\sin x \, ,$$

és $$y_{i.á.}(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} - \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{3}{34}\cos x - \frac{5}{34}\sin x \ , \ c_1, c_2 \in R \ .$$

Megjegyezzük, hogy ugyanezt a (4.59) algebrai egyenletrendszert (4.46)-ból is megkapnánk, mivel (4.45) szerint

$$d_1 := a^2 - b^2 + a_1a + a_0 = -1 - 4 = -5,$$
$$d_2 := 2ab + a_1b = -3.$$

5. Egyes differenciálegyenletes gazdasági modellek

A továbbiakban egyes olyan folytonos idejű dinamikus gazdasági rendszerek vizsgálatával foglalkozunk, melyek differenciálegyenletek segítségével modellezhetőek.
Először a klasszikus és a neoklasszikus növekedéselmélet első modelljéről lesz szó.
Ismeretes, hogy a neoklasszikus elmélet 1870 körüli kialakulásától a XX. század közepéig nem sok figyelmet fordított a növekedés kérdéseinek. A Harrod-féle diszkrét idejű modell (1939, 1948) mellett Domar (1946, 1957) folytonos idejű modellje az első növekedési modellek között foglal helyet. Az említett modellek azonban klasszikusak lévén, alig kapcsolódtak a modern közgazdaságtan főrészét képező neoklasszikus közgazdaságtanhoz.
Megemlítjük, hogy Solow (1956) alkotta meg a neoklasszikus növekedési modellt.
Mi csak az úttörő jellegű modellosztályokkal tudunk foglalkozni.

5.1 Domar klasszikus növekedési modellje

Ebben a modellben három makrováltozó szerepel.
Jelölje a t időpontban
$Y(t)$ a **termelést,** $I(t)$ a **beruházást**, $C(t)$ a **fogyasztást.** A modell egyenletei a következők:
GDP-azonosság:

$$Y(t) = C(t) + I(t)\ ,\ \ C(t) = Y(t) - I(t) \qquad (5.1)$$

Termelésnövekedés:

$$\frac{dY(t)}{d(t)} = a \cdot I(t)\ ,\ a>0 \qquad (5.2)$$

Fogyasztási függvény: $C(t) = (1\text{-}s)\ Y(t) = Y(t) - sY(t)$, ahol $0 \le s \le 1$. (5.3)

Amint látjuk, Domar feltételezte olyan $a>0$ és $0 \le s \le 1$ állandók létezését, melyekre az (5.2) termelési növekedés áll fenn, és ha összevetjük (5.1) és (5.3), akkor kiderül, hogy az $Y(t)$ termelés csak egy hányada megy fogyasztásra, a maradék pedig az

$$I(t) = sY(t)\quad ,\ 0 \le s \le 1 \qquad (5.4)$$

beruházás.
Ha (5.4) behelyettesítjük (5.2)-be, akkor azt kapjuk, hogy a termelés dinamikáját az alábbi állandó együtthatójú homogén lineáris DE írja le:

$$\frac{dY(t)}{dt} = a \cdot s \cdot Y(t) \qquad ,\qquad a>0,\ 0 \le s \le 1\ . \qquad (5.5)$$

Az (5.5) alakú DE általános megoldását a (3.22) formula szerint kapjuk:

$$Y_a(t) = C \cdot e^{\int asdt} = C \cdot e^{ast}\ ,\ C \in R\ , \qquad (5.6)$$

ahol

$$a \cdot s = \gamma \qquad (5.7)$$

a növekedési ütem.
Ha a t=0 időpontban adott az $Y(0)=Y_0$ termelési mutató, akkor az (5.5) DE-hez rendelt

$$\frac{dY(t)}{dt} = a \cdot s \cdot Y(t),\ a>0,\ 0 \le s \le 1 \qquad (5.8)$$

$$Y(0)=Y_0$$

kezdetiérték feladathoz jutunk, melynek megoldása (3.24) alapján

$$Y(t) = Y_0 \cdot e^{ast}\ . \qquad (5.9)$$

Tehát az (5.5) DE-tel leírt klasszikus növekedési modell pályája exponenciális.

Tegyük fel, hogy a munkaerő növekedési üteme ν, a termelékenység növekedési üteme pedig μ. .
Teljes foglalkoztatás esetén ekkor :

Növekedési ütem = Munkaerő növekedési ütem + Termelékenység növekedés ütem

$$a \cdot s = \gamma = \nu + \mu \quad ,$$

azaz

$$a \cdot s = \nu + \mu \tag{5.10}$$

Mi biztosítja az (5.10) egyenlőséget?
A **klasszikus** elmélet szerint ez csak véletlenül teljesül, és a szóban forgó modellt ezért bírálják leginkább. Ezt a problémát oldja meg a **neoklasszikus** megközelítés.
5.1 Példa
Oldjuk meg az (5.8) kezdetiérték-feladatot, ha a=0.25, s=0.2, $Y(0)=Y_0=100$.
Megoldás:
Az (5.9) formula szerint

$$Y(t) = Y_0 \cdot e^{ast} = 100 \cdot e^{0.05t},$$

és például a t=10 időpontban

$$Y(10) = 100 \cdot e^{0.05 \cdot 10} = 100 \cdot e^{0.5} = 100 \cdot 1.6487 = 164.87$$

5.2 Solow neoklasszikus növekedési modellje

A neoklasszikus megközelítés pontosabban veszi figyelembe a termelési tényezők közti összefüggéseket.
A Solow-féle növekedési modell az alábbi feltételezésen alapszik:

1. Tegyük fel, hogy a termelés a tőkén kívül a munkától is függ, és az L(t) munkaerő a t időpontban egyenlő

$$L(t) = L_0 \cdot e^{\nu t}, \ \nu > 0 \ . \tag{5.11}$$

Mivel a ν munkaerő növekedési üteme pozitív, a munkaerő állandóan növekszik.

2. A termelés rögzített hányadosát fordítják beruházásra, azaz mint (5.4)-ben

$$I(t) = s \cdot Y(t), \ 0 \le s \le 1 \ . \tag{5.12}$$

Így a K(t) tőke növekedésére a t időpontban teljesül

$$\frac{dK(t)}{dt} = I(t) = s \cdot Y(t) \ . \tag{5.13}$$

3. Az Y(t) termelés a K(t) tőke és az L(t) munkaerő függvénye. Legyen a termelési függvény

$$Y(t) = F(K(t), L(t)), \tag{5.14}$$

ahol F elsőfokú homogén függvény.

Térjünk át az egy főre jutó $y(t) = \dfrac{Y(t)}{L(t)}$ kibocsátásra (termelésre) és $k(t) = \dfrac{K(t)}{L(t)}$ tőkére.
Ekkor (5.14) figyelembevételével

$$y(t) = \frac{1}{L(t)} \cdot Y(t) = \frac{1}{L(t)} \cdot F(K(t), L(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, \frac{L(t)}{L(t)}\right) = F(k(t),1) = f(k(t)). \tag{5.15}$$

Továbbá a differenciálás szabálya szerint és (5.13) figyelembevételével

$$\frac{dk(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{K'(t)\cdot L(t) - K(t)\cdot L'(t)}{L^2(t)} = \frac{K'(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)}\cdot\frac{L'(t)}{L(t)} =$$
$$= s\cdot\frac{Y(t)}{L(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)}\cdot\frac{K(t)}{L(t)} = s\cdot y(t) - \frac{L'(t)}{L(t)}\cdot\frac{K(t)}{L(t)}\,. \qquad (5.16)$$

Mivel (5.11)-ből

$$L'(t) = L_0\cdot\nu\cdot e^{\nu t}\,,\ \frac{L'(t)}{L(t)} = \nu\,, \qquad (5.17)$$

ezért (5.16)-ból az (5.15) összefüggés alapján

$$\frac{dk(t)}{dt} = s\cdot y(t) - \nu\cdot k(t) = s\cdot f(k(t)) - \nu\cdot k(t)\,. \qquad (5.18)$$

Tehát a

$$\frac{dk}{dt} = s\cdot f(k) - \nu\cdot k \qquad (5.19)$$

nemlineáris elsőrendű DE-hez vezet a Solow-féle neoklasszikus növekedési modell.
Tegyük még fel, hogy az (5.15) f(k) kétszer folytonosan differenciálható, $f(0)=0$ és

$$f'' < 0 < f'\ ,\ \lim_{k\to 0^+} f'(k) = \infty\,,\ \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0\ . \qquad (5.20)$$

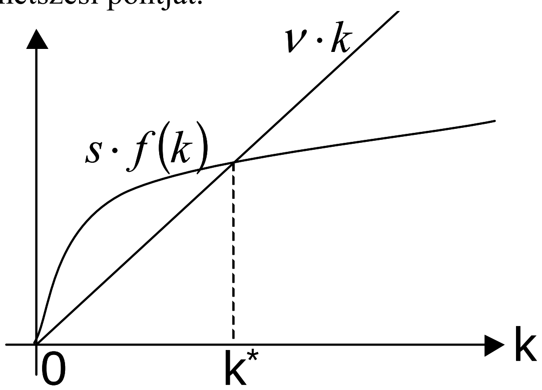
Ezen feltételek mellett az (5.19) DE-nek egyetlen egy k* pozitív egyensúlyi helyzete van, amelyre

$$s\cdot f(k^*) - \nu\cdot k^* = 0\,, \qquad (5.21)$$

azaz az (5.19) DE-nek létezik állandó $k=k^*$ megoldása, melyre

$$\frac{dk^*}{dt} = 0 = s\cdot f(k^*) - \nu\cdot k^*\ . \qquad (5.22)$$

Ezt az állandó k^* megoldást az (5.19) DE egyensúlyi helyzetének nevezik.
Ha az (5.20) feltételek teljesülnek, akkor az 5.1 ábra szemlélteti az $s\cdot f(k)$ és $\nu\cdot k$ görbét illetve egyenest és azok metszési pontját.



5.1 ábra

A k* egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabil abban az értelemben, hogy bármely $k_0>0$ esetén a

$$\frac{dk}{dt} = s\cdot f(k) - \nu\cdot k\,,$$
$$k_0 = k_0 > 0 \qquad (5.23)$$

kezdetiérték feladat $k(t)$ megoldása monoton módon tart a k^* egyensúlyi helyzethez, ha $t \to \infty$, azaz

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = k^* \ . \tag{5.24}$$

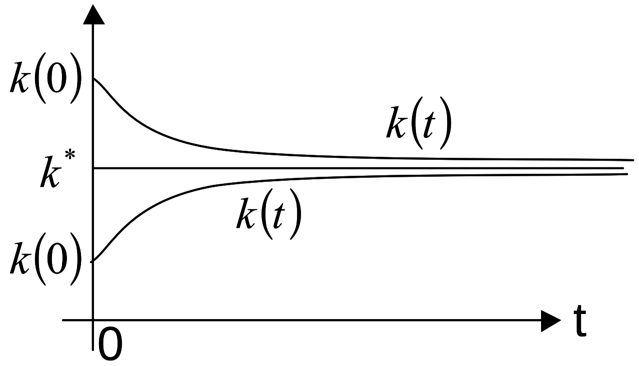
Ha $k_0=k^*$, akkor $k(t)=k^*$.
Ha

$$0<k_0<k^* \ ,$$

akkor $k'(t)>0$

minden olyan $t\geq$ 0-ra, amelyre $0<k(t)<k^*$ teljesül, és $k(t)$ definiálva van minden $t\geq$ 0-ra, $0<k(t)<k^*$ és $k'(t)>0$, ha $t\geq 0$.

A $k^* \subset k_0$ eset hasonló (lásd az 5.2 ábrát)



5.2 ábra

5.3 Egy mikroökonómiai kereslet-kínálat modell

A mikroökönómiából tudjuk, hogy egy piac akkor van egyensúlyban, ha a kínálat és a kereslet megegyezik.
Tegyük fel, hogy egy adott áru kereslete és kínálata csak az áru árától függ. Vizsgáljuk a következő problémát: hogyan változik az ár az idő függvényében, azaz milyen az ár dinamikája?
Ennek a kérdésnek a megválaszolásához tudnunk kell, mi van, ha a rendszer nincs egyensúlyban, azaz, ha a kínálat különbözik a kereslettől. A kereslet-kínálat dinamikus modelljében Walras feltételezte, hogy az ár növekszik, ha a kereslet nagyobb a kínálatnál, és csökken, ha a kereslet kisebb a kínálatnál.
Hogyan tudjuk matematikai eszközökkel formalizálni a fentieket?
Jelölje $p(t)$ az árat a t időpontban. Tegyük fel, hogy a $p(t)$ ár a t időnek differenciálható függvénye.
Jelölje $D(p)$, illetve $S(p)$ a p árhoz tartozó keresletet, illetve kínálatot. Ekkor Walras modellje a

$$\frac{dp(t)}{dt} = f(D(p(t)) - S(p(t)) \tag{5.25}$$

függvényegyenlettel formalizálható, ahol f olyan folytonos valós függvény, amelyre

$$f(0)=0 \text{ és } x\,f(x)>0 \text{ minden } x\neq 0 \text{ esetén.} \tag{5.26}$$

Az (5.25) egyenlet azt jelenti, hogy a $p(t)$ ár a t időszak olyan differenciálható függvénye, amelyre az (5.25) nemlineáris DE teljesül. Az f függvény tulajdonságaiból az következik, hogy ha valamely t-re

$$D(p(t))=S(p(t)) \ , \qquad \text{akkor } \frac{dp(t)}{dt} = 0 \,, \tag{5.27}$$

ha $\quad D(p(t))>S(p(t))$, $\qquad$ akkor $\qquad \dfrac{dp(t)}{dt}>0$, $\qquad$ (5.28)

míg $D(p(t))<S(p(t))$ esetén $\qquad \dfrac{dp(t)}{dt}<0$. $\qquad$ (5.29)

Tehát a Walras-féle feltételek teljesülnek.
A $p(t)$ árfüggvény megadásához, azaz az (5.25) DE megoldásához ismernünk kell az f, D, S függvényeket.
Tegyük fel, hogy az f függvény nemlineáris :

$$f\left(D\left(p(t)\right)\right)=k\cdot D\left(p(t)\right)\ , \tag{5.30}$$

$$D\left(p(t)\right)=\alpha+\beta\cdot p(t)\ ,\ \ S\left(p(t)\right)=\gamma+\delta\cdot p(t), \tag{5.31}$$

ahol $k>0$, α, β, γ, δ adott valós számok, úgy, hogy $\beta\neq\delta$.
Tegyük fel, hogy a t_0 időpillanatban az ár $p(t_0)=p_0$. Célunk a $p(t)$ árfüggvény megadása $t\geq t_0$ esetén. Az (5.30), (5.31) feltevések alapján az (5.25) egyenlet elsőrendű lineáris inhomogén DE alakját veszi fel:

$$\frac{dp(t)}{dt}=k\left[\alpha+\beta\cdot p(t)-\gamma-\delta\cdot p(t)\right],\quad t\in\left[t_0,\infty\right], \tag{5.32}$$

melyből

$$\frac{dp(t)}{dt}-k\left(\beta-\delta\right)\cdot p(t)=k(\alpha-\gamma)\,. \tag{5.33}$$

Az (5.33) DE a (3.26) alakú DE speciális esete, amikor együtthatói állandók.
Vezessük be a következő jelöléseket:

$$a_0:=-k\cdot\left(\beta-\delta\right)\ ,\ \ A_1:=k\cdot\left(\alpha-\gamma\right) \tag{5.34}$$

melyek figyelembe vételével (5.33) a

$$\frac{dp(t)}{dt}+a_0\cdot p(t)=A_1 \tag{5.35}$$

elsőrendű inhomogén DE-be megy át a $p(t_0)=p_0$ kezdeti feltételek mellett. Oldjuk meg az (5.35) DE-t a 3.3 alfejezetben ismertetett módszer szerint (lásd a (3.34) példát is).
Először a változók szétválasztásának módszerével felírjuk a megfelelő homogén DE megoldását:

$$\frac{dp}{dt}+a_0\cdot p=0\ \rightarrow\ \frac{dp}{p}=-a_0\cdot dt\ \rightarrow\ \int\ \rightarrow\ \ln p=-a_0\cdot t+\ln c, c\in R_0^+=\left(0,+\infty\right)\ \rightarrow$$

$$\ln\frac{p}{c}=-a_0t\ \rightarrow\ p_{h.á.}(t)=c\cdot e^{-a_0t}, c\in R_0^+\,.$$

A következő lépésben az állandók variálásának módszerével az inhomogén (5.35) egy partikuláris megoldását:

$p(t)=p_{i\cdot p}(t)=c(t)\cdot e^{-a_0t}\ \rightarrow\ \dfrac{dp}{dt}=c\cdot e^{-a_0t}-a_0\cdot c(t)\cdot e^{-a_0t}\ \rightarrow$ Behelyettesítés az inhomogén DE-be $\rightarrow\ \dfrac{dc}{dt}\cdot e^{-a_0t}-a_0\cdot c(t)\cdot e^{-a_0t}+a_0\cdot c(t)\cdot e^{-a_0t}=A_1\ \rightarrow\ \dfrac{dc}{dt}=A_1\cdot e^{a_0t}\ \rightarrow\ dc=A_1\cdot e^{a_0t}\cdot dt$

$$\rightarrow\ \int dc=\int A_1\cdot e^{a_0t}\cdot dt\ \rightarrow\ c(t)=\tfrac{A_1}{a_0}\cdot e^{a_0t}+c_1\ \rightarrow$$

$$p(t) = p_{i.á.}(t) = c_1 \cdot e^{-a_0 t} + \frac{A_1}{a_0}, c_1 \in R, \rightarrow \ p(t) = c_1 \cdot e^{k(\beta-\delta)t} + \frac{k \cdot (\gamma - \alpha)}{k \cdot (\beta - \delta)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ p(t) = p_{i.á.}(t) = c \cdot e^{k(\beta-\delta)t} + \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta}, c \in R, \rightarrow$$

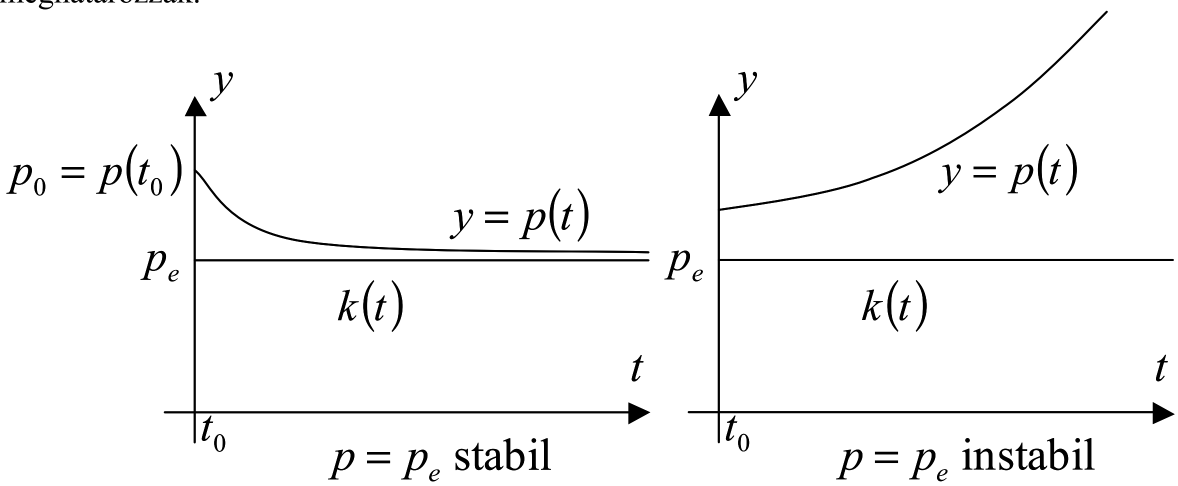
a $p(t_0) = p_0$ kezdeti feltételek figyelembevételével $\rightarrow \ p_0 = c \cdot e^{k(\beta-\delta)t_0} + \dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta} \rightarrow$

$$\rightarrow \ c = \left[p_0 + \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} \right] \cdot e^{-k(\beta-\delta)t_0} \rightarrow$$

$$p(t) = \left[p_0 + \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} \right] \cdot e^{-k(\beta-\delta)t_0} \cdot e^{k(\beta-\delta)t} + \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta} \rightarrow$$

$$p(t) = \left[p_0 + \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} \right] \cdot e^{-k(\beta-\delta)(t-t_0)} + \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta}, \beta - \delta = p_e, \beta \neq \delta \ . \tag{5.36}$$

Tehát az (5.36) $p(t)$ függvényt az (5.33) DE és a $p(t_0)=p_0$ kezdeti feltétel egyértelműen meghatározzák.



5.3. ábra

Az ár egyensúlyban van, nem változik, mint t függvénye, ha $\dfrac{dp(t)}{dt} = 0$ minden $t \geq t_0$ esetén, azaz ha

$$p(t) \equiv p_e \equiv \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta} \tag{5.37}$$

az (5.32)-ből adódó

$$k[\alpha + \beta + p(t) - \gamma - \delta \cdot p(t)] = 0 \tag{5.38}$$

egyenlet megoldása.

Ha $\beta - \delta < 0$, akkor (5.36)-ban

$$e^{k(\beta-\delta)t} \underset{t \to \infty}{\rightarrow} 0$$

és így (5.36)-ból

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta} = p_e \ . \tag{5.39}$$

Ekkor a $p(t)$ ár a p_e egyensúlyi árhoz tart és azt mondjuk, hogy a p_e egyensúlyi ár **stabil.**

Ha $\beta-\delta>0$és még $p_0\neq p_e$ is teljesül, akkor $p(t)$ nem korlátos és (5.36)-ból következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty}|p(t)|=\infty \ . \tag{5.40}$$

Ebben az esetben a p_e egyensúlyi árat **instabilna**k nevezzük.

5.2 Példa. Legyen egy adott árunak az ára a t időpontban $p(t)$, ahol a p függvény a t kétszer folytonosan differenciálható függvénye. Jelölje $D(p(t))$ illetve $S(p(t))$ a p árhoz tartozó keresletet illetve kínálatot.
Feltételezzük, hogy a keresletet a

$$D = D(p(t)) = 3p'' - p' - p + 25 \ , \tag{5.41}$$

míg a kínálatot az

$$S = S(p(t)) = 4p'' + p' + p + 5 \ , \tag{5.42}$$

összefüggés határozza meg, ahol az árfüggvény p' első deriváltja az ár kialakításának irányzatát fejezi ki, a második p'' derivált, pedig az ár változásának ritmusát fejezi ki.
Tegyük fel, hogy a kezdő t=0 időpontban

$$p(0)=12 \ , \ D(0)=20 \ , \ S(0)=20 \ . \tag{5.43}$$

A kereslet és kínálat egyenlőségéből kiindulva határozzuk meg a $p(t)$ árfüggvényt $t>0$ esetén.
Megoldás.
A $D(p)=S(p)$egyenlőség alapján (5.41) és (5.42) figyelembevételével

$$3p'' - p' - p + 25 = 4p'' + p' + p + 5 \ , \tag{5.44}$$

melyből a

$$p'' + 2p' + 2p = 20 \tag{5.45}$$

másodrendű lineáris állandó együtthatójú DE-t nyerjük, melynek megoldása a 4.2 alfejezetben ismertettek alapján történik.
A (4.32) formula szerint

$$p = p_{i.á.}(t) = p_{h.á.}(t) + p_{i.p.}(t) .$$

Így először a megfelelő homogén DE $y_{h.á.}(x)$ általános megoldását keressük. A karakterisztikus egyenlet (4.11) szerint:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

melynek gyökei:

$$\lambda_1=-1+i, \qquad \lambda_2=-1-i \ .$$

Ezen komplex gyökök esetén a homogén DE általános megoldása a (4.27), (4.28) formulák alapján tudjuk felírni:

$$P_{áh}(x) = c_1 \cdot e^{-t}\cos t + c_2 \cdot e^{-t}\sin t \quad , \quad c_1, c_2 \in R \ . \tag{5.46}$$

A (4.41) formulából kapjuk , hogy amikor az (5.45) DE jobb oldalán álló zavarófüggvény konstans, akkor az inhomogén DE partikuláris megoldásának alakja:

$$p = p_{i.p.}(t) = B_1 = const \ , \quad p' = 0 \ , \ p'' = 0 \ . \tag{5.47}$$

Az (5.45) inhomogén DE-be való behelyettesítés után

$$2B_1=20 \ \to \ B_1=10 \to \ p_{i.p.}(t)=10 \ .$$

Tehát (5.45) általános megoldása

$$p = p_{iá}(t) = c_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos t + c_2 \cdot e^{-t} \sin t + 10\,;\; c_1, c_2 \in R\;. \tag{5.48}$$

Most pedig vegyük figyelembe az adott (5.43) kezdeti feltételeket:

$$p(0)=12 \rightarrow 12 = c_1 \cdot e^{-t} \cos t + c_2 \cdot e^{-t} \sin t + 10\; \Big|_{t=0} \rightarrow 12=c_1+10 \rightarrow c_1=2 \rightarrow$$

$$\rightarrow p(t) = 2e^{-t} \cos t + c_2 \cdot e^{-t} \sin t + 10\,. \tag{5.49}$$

Az (5.49) egyenlet deriválásával

$$p'(t) = -2e^{-t}\left(2\cos t + c_2 \sin t\right) + e^{-t}\left(-2\sin t + c_2 \cos t\right) = e^{-t}\left[(c_2 - 2)\cos t - (c_2 + 2)\sin t\right];$$

$$p'(0) = c_2 - 2 \tag{5.50}$$

$$p''(t) = -e^{-t} \cdot \left[(c_2 - 2)\cos t - (c_2 + 2)\sin t\right] + e^{-t} \cdot \left[-(c_2 - 2)\sin t - (c_2 + 2)\cos t\right] =$$

$$= e^{-t}\left[-2c_2 \cos t + 4\sin t\right];$$

$$p''(0) = 2c_2\;.$$

Most pedig vegyük az (5.44) egyenlőséget a t=0 pontban az (5.49), (5.50) kifejezések figyelembevételével :

$$3p''(t) - p'(t) - p(t) + 25\Big|_{t=0} = 4p''(t) + p'(t) + p(t) + 5\Big|_{t=0} \rightarrow$$

$$-6c_2 - c_2 + 2 - 12 + 25 = -8c_2 + c_2 - 2 + 12 + 5 \rightarrow -7c_2 + 15 = -7c_2 + 15$$

$\rightarrow c_2$ = tetszőleges .

Így

$$p(t) = 2e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t + 10, c_2 \in R\;,\; \lim_{t \to \infty} p(t) = 10\,,$$

Például, ha c_2=0 $\rightarrow$ $p(t) = 2e^{-t} \cos t + 10$.

6. Változó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

6.1 Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek alaptulajdonságai

A

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ &- \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n + f_2(x) \end{aligned} \tag{6.1}$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszert fogjuk vizsgálni, ahol egy nyílt

$$I_x = (a,b), -\infty \le a \le b \le \infty$$

intervallumon az

$a_{ij} : (a,b) \to R$ együttható függvények (i, j=1,2,…n)

illetve az

$f_i : (a,b) \to R$ zavarófüggvények (i, j=1,2,…n)

adott folytonos függvények.
A (6.1) differenciálegyenlet-rendszert (rövidítve DER-t) átírhatjuk

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x) \tag{6.2}$$

mátrix-vektor alakba, ha bevezetjük az alábbi mátrix-vektor jelölléseket:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x)... & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x)... & a_{2n}(x) \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x)... & a_{nn}(x) \end{pmatrix}; \ \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_3 \end{pmatrix}; \ \frac{d\bar{y}}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ ... \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}; \ \bar{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ ... \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

ahol $A \in C(I_x \to R^{n \times n})$ és $\bar{f} \in C(I_x \to R^n)$ adott folytonos mátrix-, illetve vektorfüggvény.
A (6.1) DER a 2.3 alfejezetben tárgyalt (2.50) egyenletnek az a speciális esete, amikor $\bar{f}(x,\bar{y}) = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x)$. Megjegyezzük, hogy ez a függvény a $T = (a,b) \times R^n$ tartományban kielégíti a (2.52) feltételeket.

Definíció (DER megoldásának fogalma)

A $\bar{\varphi}(x) = col(\bar{\varphi}_1(x),...,\bar{\varphi}_n(x))$ *oszlop vektor-függvényt a (6.1) DER megoldásának (partikuláris megoldásának) nevezzük az* $(a,b) = I_x$ *intervallumon, ha*

1. *A* $\bar{\varphi}(x)$ *vektor-függvény differenciálható a* I_x *intervallumon,*

2. *A $\overline{\varphi}$ függvény kielégíti a I_x intervallumon a (6.1) DER-t, azaz*

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dx} = A(x)\overline{\varphi}(x) + \bar{f}(x).$$

A

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = A(x)\overline{y} + f(x)$$
$$\overline{y}(x_0) = \overline{y}_0 \tag{6.4}$$

feladatot a (6.2) DER-hez rendelt kezdetiérték-feladatnak nevezzük, ahol $x_0 \in (a,b), \overline{y}_0 \in R^n$ adott konstans vektor.
Mivel a (6.4) kezdetiérték-feladatra, amint már megjegyeztük, teljesülnek a (2.50) DER-re vonatkozó egzisztencia és unicitás tétel (2.52) feltételei, ezért bármely

$$(x_0, \overline{y}_0) \in (a,b) \times R^n \tag{6.5}$$

esetén a (6.4) kezdetiérték-feladatnak az (a,b) intervallumon létezik egyetlen egy $\overline{y} = \overline{\varphi}(x)$ megoldása, melyre teljesülnek a (2.53), (2.54) tulajdonságok.
Ha (6.2)-ben $\bar{f}(x) \equiv 0$, akkor a

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = A(x) \cdot \overline{y} \tag{6.6}$$

DER-t homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük, ha $\bar{f}(x) \neq 0$, akkor (6.2) inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszernek mondjuk.

Definíció (lineárisan függő megoldások)

Azt mondjuk, hogy a (6.6) homogén DER

$$\overline{\varphi}_1(x), \overline{\varphi}_2, ..., \overline{\varphi}_m(x), \; x \in (a,b) \tag{6.7}$$

megoldásai lineárisan függők, ha léteznek ($c_1, c_2, ..., c_m$) valós számok, melyekre

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \overline{\varphi}_j(x) = 0 \;\; minden \;\; x \in (a,b) \;\; esetén \; és \; \sum_{j=1}^{m} c_j^2 \neq 0. \tag{6.8}$$

Tétel (homogén DER megoldásainak tulajdonságairól)

1. *Ha a*

$$\overline{\varphi}_1(x), \overline{\varphi}_2(x), ..., \overline{\varphi}_m(x), \qquad x \in (a,b) \tag{6.9}$$

oszlopvektorok ($\overline{\varphi}_j(x) = col(\overline{\varphi}_{1j}(x), \overline{\varphi}_{2j}(x), ..., \overline{\varphi}_{nj}(x),)$, *(j=1,2,...,m)* *a (6.6) homogén DER megoldásai az (a,b) intervallumon, akkor bármely* $c_1, c_2, ..., c_m \in R$ *esetén*

$$\overline{\varphi}(x) = c_1\overline{\varphi}_1(x) + c_2\overline{\varphi}_2(x) + ... + c_m\overline{\varphi}_m(x) \tag{6.10}$$

is megoldása (6.6)-nak az (a,b) intervallumon.

2. *Ha* $y = \overline{\varphi}(x)$ *a homogén DER megoldása, és bármely* $x_0 \in (a,b)$ *esetén* $\overline{\varphi}(x_0) = \overline{0}$, *akkor* *(6.11)*

$$y = \overline{\varphi}(x) \equiv 0 \ \textit{minden} \ x \in (a,b) \ \textit{esetén}. \qquad (6.12)$$

3. Ha a

$$\overline{\varphi}_1(x), \overline{\varphi}_2(x), ..., \overline{\varphi}_n(x)$$

oszlopvektor-függények a (6.6) homogén DER megoldásai az (a,b) intervallumon, akkor vagy

$$\det[\overline{\varphi}_1(x)\overline{\varphi}_2(x)...\overline{\varphi}_n(x)] \neq 0 \ \text{minden} \ x \in (a,b), \text{ vagy} \qquad (6.13)$$

$$\det[\overline{\varphi}_1(x)\overline{\varphi}_2(x)...\overline{\varphi}_n(x] = 0 \ \text{minden} \ x \in (a,b) \ . \qquad (6.14)$$

Bizonyítás.

1. Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dx} = \frac{d}{dx}[c_1\overline{\varphi}_1 + c_2\overline{\varphi}_2 + ... + c_m\overline{\varphi}_n] = c_1\frac{d\overline{\varphi}_1}{dx} + c_2\frac{d\overline{\varphi}_2}{dx} + ... + c_m\frac{d\overline{\varphi}_m}{dx} = c_1A(x)\overline{\varphi}_1 +$$

$$+ c_2A(x)\overline{\varphi}_2 + ... + c_mA(x)\overline{\varphi}_m = A(x)\cdot[c_1\overline{\varphi}_1 + c_2\overline{\varphi}_2 + ... + c_m\overline{\varphi}_m] \ ,$$

azaz (6.10) valóban kielégíti a (6.6) homogén DE-t.

2. Vegyük figyelembe, hogy

$$\overline{y} = \overline{\varphi}(x) \equiv 0, \quad x \in (a,b) \qquad (6.15)$$

a (6.6) DER megoldása.
Másrészt az egzisztencia és unicitás tétel szerint a (6.11) kezdeti feltételének csak egyetlen egy megoldás tesz eleget, és ez nevezetesen a (6.15) ún. triviális megoldás.

3. Elegendő megmutatni, hogy ha van $x_0 \in (a,b)$, amelyekre

$$\det[\overline{\varphi}_1(x_0)\overline{\varphi}_2(x_0)...\overline{\varphi}_n(x_0)] = 0, \qquad (6.16)$$

akkor

$$\det[\overline{\varphi}_1(x)\overline{\varphi}_2(x)...\overline{\varphi}_n(x)] = 0 \ \text{minden} \ x_0 \in (a,b) \ \text{esetén}. \qquad (6.17)$$

Ha (6.16) teljesül, akkor a

$$[\overline{\varphi}_1(x_0)\overline{\varphi}_2(x_0)...\overline{\varphi}_n(x_0)]\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{bmatrix} = \vec{0} \qquad (6.18)$$

lineáris homogén algebrai rendszernek létezik

$$c_1 = c_1^*, c_2 = c_2^*, ..., c_n = c_n^* \qquad (6.19)$$

nemtriviális megoldása úgy, hogy $\sum_{j=1}^{n} c_j^{*2} \neq 0$,

és ekkor

$$c_1^*\overline{\varphi}_1(x_0) + c_2^*\overline{\varphi}_2(x_0) + ... + c_n^*\overline{\varphi}_n(x_0) = 0 \ . \qquad (6.20)$$

A tétel 1. állítása szerint

$$\overline{y} = \varphi(x) = c_1^*\overline{\varphi}_1(x) + c_2^*\overline{\varphi}_2(x) + ... + c_n^*\overline{\varphi}_n(x) \tag{6.21}$$

megoldása (6.6)-nak és (6.20) szerint

$$\overline{\varphi}(x_0) = 0. \tag{6.22}$$

Azonban a tétel 2. állítása szerint az $\overline{y}(x_0) = 0$ kezdeti feltételt az

$$\overline{y} = \varphi(x_0) = 0$$

megoldás kielégíti. Az egzisztencia és unicitás tétel szerint csak egy ilyen megoldás létezik. Így (6.21)-ben $\overline{\varphi}(x) = 0$ minden $x \in (a,b)$ -re.
Innen

$$c_1^*\overline{\varphi}_1(x) + c_2^*\overline{\varphi}_2(x) + ... + c_n^*\overline{\varphi}_n(x) = 0 \qquad \text{minden } x \in (a,b) - r\text{e},$$

és nem mindegyik $c_1^*, c_2^*, ..., c_n^*$ nulla, ezért

$$\det[\overline{\varphi}_1(x)\overline{\varphi}_2(x)...\overline{\varphi}_n(x)] = 0 \text{ minden } x \in (a,b) - re.$$

Definíció (alaprendszer és alapmátrix)
A (6.6) homogén DER

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x),\ x \in (a,b) \tag{6.23}$$

megoldásai az egyenletrendszer egyik alaprendszerét alkotják, ha

$$\det[\overline{\varphi}_1(x)\overline{\varphi}_2(x)...\overline{\varphi}_n(x)] \neq 0 \text{ minden } x \in (a,b) \text{-re,} \tag{6.24}$$

azaz ha a (6.23) megoldások lineárisan függetlenek.
A (6.23) alaprendszer függvényeiből, mint oszlopvektorokból alkotott $n \times n$

$$\Phi(x) = [\overline{\varphi}_1(x)\overline{\varphi}_2(x)...\overline{\varphi}_n(x)] = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & ... & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & ... & \varphi_{2n}(x) \\ --- & --- & --- & --- \\ \underbrace{\varphi_{n1}(x)}_{\overline{\varphi}_1(x)} & \underbrace{\varphi_{n2}(x)}_{\overline{\varphi}_2(x)} & ... & \underbrace{\varphi_{nn}(x)}_{\overline{\varphi}_n(x)} \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

mátrixot a homogén DER egyik alapmátrixának nevezzük.

Definíció(homogén DER általános megoldása)

Ha $\overline{\varphi}_1(x),\quad \overline{\varphi}_2(x),\quad ...\quad \overline{\varphi}_n(x)$ *a (6.6) DER alaprendszerét alkotják, akkor a*

$$\overline{\varphi}_{h.á.}(x) := c_1 \cdot \overline{\varphi}_1(x) + c_2 \cdot \overline{\varphi}_2(x) + ... + c_n \cdot \overline{\varphi}_n(x) \tag{6.26}$$

Megoldást, ahol $c_1, c_2, ..., c_n$ *tetszőleges valós állandók a (6.6) homogén DER általános megoldásának nevezzük.*
A (6.26) általános megoldást nyilvánvaló, hogy mátrixvektoros alakban is fel tudjuk írni, a (6.25) alapmátrix segítségével:

$$\overline{y} = \overline{\varphi}_{h.á}(x) = \Phi(x) \cdot \overline{C}\text{, ahol } \overline{C} = col(c_1, c_2, ..., c_n) \tag{6.27}$$

Tétel (alapmátrix létezése)
Minden folytonos együtthatójú (6.6) homogén DER-nek létezik (6.25) alakú Φ(x) alapmátrixa.

Bizonyítás.
Legyen

$$\bar{l}_1, \bar{l}_2, ..., \bar{l}_n \tag{6.28}$$

az R^n egy bázisa $\left(\bar{l}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} j - koordináta \right)$.

Jelölje $\overline{\varphi}_j(x)$ a

$$\begin{gathered} \frac{dy}{dx} = A(x)\bar{y} \\ \bar{y}(x_0) = \bar{l}_j \end{gathered} \tag{6.29}$$

kezdeti-probléma egyetlen megoldását az (a,b) intervallumon.
Ekkor

$$\det[\overline{\varphi}_1(x_0)\overline{\varphi}_2(x_0)...\overline{\varphi}_n(x_0)] = \det[\bar{l}_1\bar{l}_2...\bar{l}_n] =$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

és így a (6.16), (6.17) tulajdonságok alapján a

$$\overline{\varphi}_1(x)\overline{\varphi}_2(x)...\overline{\varphi}_n(x)$$

függvények alaprendszert alkotnak.

6.2 Lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszerek

Vizsgáljuk a (6.1), vagy (6.2) mátrix-vektoros alakban felírt

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x), \ x \in I_x = (a,b) \tag{6.30}$$

változó együtthatójú lineáris inhomogén DER-t.

Tétel (lineáris inhomogén DER megoldásának alakjáról)

Legyen

$$\overline{\varphi}_1(x), \overline{\varphi}_2(x), ..., \overline{\varphi}_n(x) \tag{6.31}$$

a megfelelő (6.6) homogén DER egyik alrendszere és $\bar{y} = \vec{\Psi}(x)$ *a (6.30) inhomogén DER egy adott megoldása.*
Ekkor:
1. Bármely $c_1, c_2, ..., c_n \in R$ *esetén*

$$\bar{y} = \overline{\varphi}(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + ... + c_n\varphi_n(x) + \overline{\Psi}(x) \tag{6.32}$$

a (6.31) inhomogén DER megoldása (mégpedig általános megoldása).

3. A (6.31) inhomogén DER bármely $\overline{\varphi}(x)$ megoldásához léteznek olyan $c_1, c_2, ..., c_n \in R$ állandók, hogy

$$\overline{\varphi}(x) = c_1\overline{\varphi}_1(x) + c_2\overline{\varphi}_2(x) + ... + c_n\overline{\varphi}_n(x) + \Psi(x),\ x \in I_x \qquad (6.33)$$

Bizonyítás. Közvetlen számításokkal

$$\frac{d}{dx}\left[c_1\overline{\varphi}_1(x) + c_2\overline{\varphi}_2(x) + ... + c_n\overline{\varphi}_n(x) + \overline{\Psi}(x)\right] = c_1\frac{d\overline{\varphi}_1(x)}{dx} + c_2\frac{d\overline{\varphi}_2(x)}{dx} + ...$$

$$+ c_n\frac{d\overline{\varphi}_n(x)}{dx} + \frac{d\overline{\Psi}(x)}{dx} = \left[c_1A(x)\overline{\varphi}_1(x) + c_2A(x)\overline{\varphi}_2(x) + ... + c_nA(x)\overline{\varphi}_n(x) +\right] +$$

$$+ \left[A(x)\overline{\Psi}(x) + \bar{f}(x)\right] = A(x)\left[c_1\overline{\varphi}_1(x) + c_2\overline{\varphi}_2(x) + ... + c_n\overline{\varphi}_n(x) + \overline{\Psi}(x)\right] + \bar{f}(x)$$

azaz (6.32) valóban a (6.30) DER megoldása.

3.Vegyük a (6.33-ban) szereplő $\overline{\varphi}(x)$ és $\overline{\Psi}(x)$ függvények különbségét.

$$\overline{\varphi}(x) - \overline{\Psi}(x) := \overline{\eta}(x). \qquad (6.34)$$

Ekkor

$$\frac{d\overline{\eta}(x)}{dx} = \frac{d\overline{\varphi}(x)}{dx} - \frac{d\overline{\Psi}(x)}{dx} = A(x)\overline{\varphi}(x) + \bar{f}(x) - \left[A(x)\overline{\Psi}(x) + \bar{f}(x)\right] = A(x)\left[\overline{\varphi}(x) - \overline{\Psi}(x)\right] =$$

$$A(x)\cdot\overline{\eta}(x)$$

azaz $\overline{\eta}(x)$ a (6.6) homogén DER megoldása.

Így van

$$c_1, c_2, ..., c_n \in R$$

úgy, hogy a (6.31) alrendszer segítségével $\overline{\eta}(x)$ a következő alakban írható fel:

$$\overline{\eta}(x) = c_1\overline{\varphi}_1(x) + c_2\overline{\varphi}_2(x) + ... + c_n\overline{\varphi}_n(x), \qquad (6.35)$$

amelyből (6.34) figyelembevételével (6.33) következik.

Megjegyzés (az inhomogén DER általános megoldásáról)

A fenti eredményt úgy is kimondhatjuk, hogy a (6.30) inhomogén DER $\bar{y} = \bar{y}_{i.á}(x)$ általános megoldása a megfelelő (6.6) homogén DER $\bar{y} = \bar{y}_{h.á}(x)$ általános megoldása és a (6.30) inhomogén DER egy $\overline{\Psi}(x)$ partikuláris megoldásának összegeként áll elő:

$$\bar{y} = \bar{y}_{i.á}(x) = \bar{y}_{h.á}(x) + \overline{\Psi}(x) = c_1\overline{\varphi}_1(x) + c_2\overline{\varphi}_2(x) + ... + c_n\overline{\varphi}_n(x) + \Psi(x) =$$

$$= \Phi(x)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix} + \overline{\Psi}(x) \quad , \qquad (6.36)$$

ahol $c_1, c_2, ..., c_n \in| R$, $x \in \dot{I}\,x$, $\Phi(x)$ a (6.25) alakú alapmátrix.

A (6.6) homogén DER egy (6.25) alakú $\Phi(x)$ alapmátrixának ismeretében a (6.30) inhomogén DER egy partikuláris megoldása (és így (6.36) alapján általános megoldása is) az **ún. konstansvariációs módszerrel** adható meg.

Tétel (az inhomogén DER megoldása konstansvariációs módszerrel)
Legyen $\Phi(x)$ *a (6.6) homogén DER egy alapmátrixa. Ekkor a (6.30)inhomogén DER általános megoldása*

$$\bar{y} = \bar{y}_{i.á(x)} = \overline{\Phi}(x)\cdot\bar{c} + \overline{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\bar{f}(s)ds \ , \quad x\in I_x \tag{6.37}$$

alakú, ahol $\bar{c} = col(c_1, c_2, ..., c_n) \in R^n$ *tetszőleges állandó vektor,* $x_0 \in I_{x.}$

A

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{y}}{dx} = A(x)\bar{y} + \bar{f}(x) \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \end{cases} \tag{6.38}$$

kezdetiérték-feladat megoldása

$$\bar{y} = \bar{y}_{k.é.}(x) = \Phi(x)\cdot\Phi^{-1}(x_0)\bar{y}_0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\bar{f}(s)ds \ . \tag{6.39}$$

Bizonyítás.
Keressük a (6.30) inhomogén DER megoldását a homogén DER (6.27)-s általános megoldásából kiindulva az

$$\bar{y} = \Phi(x)\cdot\bar{c}(x), \tag{6.40}$$

alakban, ahol $\bar{c}(x)\in \ C^1\left(I_x \to R^n\right)$ egyelőre ismeretlen folytonosan differenciálható függvény.
Ha (6.40)-et és a

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{d\Phi(x)}{dx}\cdot\bar{c}(x) + \Phi(x)\frac{d\bar{c}}{dx}$$

deriváltat behelyettesítjük a (6.30) inhomogén DER-be, akkor

$$\frac{d\Phi(x)}{dx}\bar{c}(x) + \Phi(x)\cdot\frac{d\bar{c}}{dx} = A(x)[\Phi(x)\cdot\bar{c}(x)] + \bar{f}(x) \tag{6.41}$$

Mivel $\Phi(x)$ alapmátrix, azaz oszlopvektorai a (6.6) homogén DER megoldásai, ezért

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = A(x)\cdot\Phi(x) \tag{6.42}$$

teljesül (az alapmátrix kielégíti a (6.41) alakú mátrix differenciálegyenletét, és (6.40) a következő alakban írható fel:

$$A(x)\cdot\Phi(x)\cdot\bar{c}(x) + \Phi(x)\frac{d\bar{c}}{dx} = A(x)\cdot\Phi(x)\cdot\bar{c}(x) + \bar{f}(x) \ \to \ \Phi(x)\cdot\frac{d\bar{c}(x)}{dx} = \bar{f}(x)$$

Tehát, hogy (6.40) megoldása legyen (6.30)-nak, teljesülnie kell a

$$\Phi(x)\cdot\frac{d\bar{c}}{dx} = \bar{f}(x) \tag{6.43}$$

egyenletnek. Mivel az $\Phi(x)$ alapmátrix invertálható (def$\Phi(x) \neq 0$), ezért

$$\frac{d\bar{c}}{dx} = \Phi^{-1}(x)\cdot\bar{f}(x) \ \to \ d\bar{c}(x) = \Phi^{-1}(x)\cdot\bar{f}(x)dx \ \to \ \int_{x_0}^{x}d\bar{c} = \int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\cdot\bar{f}(s)ds \ \to$$

$$\rightarrow \boxed{\bar{c}(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s) \cdot \bar{f}(s) ds + \bar{c}} \text{,ahol } \bar{c} \in R^n \text{ tetszőleges állandó oszlopvektor.}$$

Ha (6.40) visszahelyettesítjük (6.40)-be, akkor (6.30) inhomogén DER megoldása

$$\bar{y}(x) = \Phi(x) \cdot \left[\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s) \bar{f}(s) ds + \bar{c} \right] = \Phi(x) \cdot \bar{c} + \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s) \bar{f}(s) ds, \tag{6.44}$$

és (6.36) figyelembe vételével felírhatjuk, hogy

$$\bar{y} = \bar{y}_{i.á}(x) = \underbrace{\Phi(x)\bar{c}}_{y_{h.á(x)}} + \underbrace{\Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s) \cdot \bar{f}(s) ds}_{\bar{y}_{i.p(x)}} = \bar{y}_{h.á}(x) + \bar{y}_{i.p}(x), \tag{6.45}$$

ahol

$$y = \bar{y}_{i.p}(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(s) \bar{f}(s) ds \tag{6.46}$$

a (6.30) inhomogén DER egy partikuláris megoldása.
A (6.30) inhomogén DER (6.45) alakú általános megoldásának ismeretében a (6.38) kezdetiérték-probléma megoldása megkapható az általános megoldásból, ha abban a tetszőleges $\bar{c}$ vektor úgy választhatjuk meg, hogy teljesüljön az $\bar{y}_{(x_0)} = \bar{y}_0$ kezdeti feltétel.
Ekkor (6.45)-ből $x = x_0$ esetén

$$\bar{y}_0 = \Phi(x_0) \cdot \bar{c} + \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s) \cdot \bar{f}(s) ds \rightarrow \Phi(x_0) \cdot \bar{c} = y_0 \rightarrow \bar{c} = \Phi^{-1}(x_0) \cdot y_0, \tag{6.47}$$

melynek alapján (6.45)-ből kapjuk, hogy a (6.38) kezdetiérték-probléma megoldása valóban (6.39) alakú.

6.1 Példa. Konstansvariációs módszerrel írjuk fel a

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x-1} & \frac{-2}{x^2 - x} \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \bar{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \tag{6.48}$$

DER általános megoldását az $x \in [2, \infty]$ intervallumon.
Meg oldás. A (6.48) DER esetén

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x-1} & \frac{-2}{x^2 - x} \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}; \bar{f}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Kimutatjuk, hogy

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1+x & 2 \\ x & x \end{pmatrix} \tag{6.49}$$

A (6.48)-hoz tartozó homogén DER egy alapmátrixa. Ismeretes, ha (6.49) kielégíti (6.42) alapján a (6.42) mátrix differenciálegyenletét, akkor $\Phi(x)$ valóban alapmátrix.

$$\frac{d\Phi}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A(x)\cdot\Phi(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{x-1} & \dfrac{-2}{x^2-x}\\ 0 & \dfrac{1}{x}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+x & 2\\ x & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1+x}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-x} & \dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-x}\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Ezek után oldjuk meg a (6.43) algebrai egyenletrendszert az ismeretlen $\dfrac{d\overline{c}_1}{dx}=col\left(\dfrac{dc_1(x)}{dx};\dfrac{dc_2(x)}{dx}\right)$ vektorra.

$$\begin{matrix}(1+x)\dfrac{dc_1}{dx} & + & 2\dfrac{dc_2}{dx}=1\\ x\dfrac{dc_1}{dx} & & +x\dfrac{dc_2}{dx}=x\end{matrix},$$

$$\frac{dc_1}{dx}=-\frac{1}{x-1}\to dc_1=-\frac{dx}{x-1}\to c_1(x)=-\ln(x-1)+c_1, c_1\in R$$

$$\frac{dc_2}{dx}=\frac{x}{x-1}\to dc_2=\frac{x}{x-1}dx\to c_2(x)=\int\left[1+\frac{1}{x-1}\right]dx=x+\ln(x-1)+c_2, c_2\in R.$$

A (6.40) formula alapján

$$\overline{y}(x)=\overline{y}_{i.á.}(x)=\Phi(x)\cdot\overline{c}(x)=\begin{pmatrix}1+x & 2\\ x & x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\ln(x-1)+c_1\\ x+\ln(x-1)+c_2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1+x & 2\\ x & x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\ln(x-1)\\ x+\ln(x-1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1+x & 2\\ x & x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}= \qquad (6.50)$$

$$=\begin{pmatrix}1+x & 2\\ x & x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\ln(x-1)+x(2-\ln(x-1)\\ x^2\end{pmatrix}.$$

Közvetlenül a (6.37) formulából is a (6.50) eredményt kapnánk.

7. Állandó együtthatójú homogén differenciálegyenlet-rendszerek

7.1 Az alapmátrix meghatározása

A (6.6) alakú,

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = A(x)\overline{y} \tag{7.1}$$

homogén DER egy alapmátrixát elő tudjuk állítani, ha $A(x)$ állandó $n \times n$ mátrix. Legyen A valós, $n \times n$ mátrix, azaz $A \in R^{n \times n}$.
Tekintsük a

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = A\overline{y} \tag{7.2}$$

n- dimenziós differenciálegyenlet-rendszert. Célunk (7.2) alapmátrixának meghatározása, amelynek, mint ismeretes, az oszlopvektorai a (7.2) DER *n* számú lineárisan független megoldását alkotják.
A továbbiakban szükség van az exponenciális függvény négyzetes mátrix argumentumon való értelmezésére.

Definíció (mátrixok exponenciálisa)

Legyen $B \in R^{n \times n}$ $n \times n$-es állandó mátrix.
Ekkor az $n \times n$-es e^B mátrix értelmezve van és

$$e^B := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = E + B + \frac{1}{2!} B^2 + \frac{1}{3!} B^3 + \ldots + \frac{1}{k!} B^k + \ldots \tag{7.3}$$

Megjegyzés. A fenti definíció szerint az $n \times n$-es e^B mátrix *i*-edik sorában és *j*-edik oszlopában lévő $\left(e^B\right)_{ij}$ elem a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(B^k\right)_{ij} \tag{7.4}$$

numerikus sor összege, ahol $\left(B^k\right)_{ij}$ a B^k mátrix (*i*,*j*) pozícióban lévő eleme.
A (7.4) sor abszolút konvergens.
Valóban,

$$\left| \frac{1}{k!} \left(B^k\right)_{ij} \right| \le \frac{1}{k!} \left|B^k\right| \le \frac{1}{k!} |B|^k, \; k \in \{0,1,\ldots\}, \tag{7.5}$$

ahol

$$|B| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.6}$$

Továbbá, mivel az analízisből ismert az

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{1}{2!} x^2 + \ldots + \frac{1}{k!} x^k + \ldots \tag{7.7}$$

sorbafejtés, ezért a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |B|^k$$

sor konvergens, és

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}|B|^k = e^{|B|} \quad . \tag{7.8}$$

Tehát, a majoráns kritérium alapján a (7.4) numerikus sor abszolút konvergens.

A (7.3) definícióból kapjuk, hogy

$$e^{\bar{0}} = E\ ,\ e^{E} = e\cdot E \tag{7.9}$$

Tétel (mátrixok exponenciálisának tulajdonságairól)
Ha $B, C \in R^{n\times n}$ *két felcserélhető állandó mátrix, azaz*

$$B\cdot C = C\cdot B\ , \tag{7.10}$$

akkor

$$e^{B+C} = e^{B}\cdot e^{C} = e^{C}\cdot e^{B} \tag{7.11}$$

Minden $B\in R^{nxn}$ *esetén*

$$\det e^{B} \neq 0 \tag{7.12}$$

Bizonyítás.
A (7.3) definíció szerint

$$e^{B+C} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(B+C)^k \ . \tag{7.13}$$

A (7.10) egyenlőség figyelembevételével kapjuk, hogy

$$(B+C)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}B^{j}C^{k-j}\ . \tag{7.14}$$

Az e^B-t és e^C-t definiáló

$$e^{B} := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}B^k\ ,\ e^{C} := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}C^k \tag{7.15}$$

sorok abszolút konvergensek, abban az értelemben, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}|\,B\,|^k\ ,\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left|C^k\right| \tag{7.16}$$

sorok konvergensek.
Ezért az $e^B\cdot e^C$ szorzat a (7.15) sorok ún. Cauchy-féle szorzataként áll elő, azaz

$$e^{B}\cdot e^{C} = \left(\sum_{e=0}^{\infty}\frac{1}{e!}B^{e}\right)\cdot\left(\sum_{e=0}^{\infty}\frac{1}{m!}C^{m}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}B^{j}\cdot\frac{1}{(k-j)!}C^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}B^{j}C^{k-j}\ . \tag{7.17}$$

Így (7.14) alapján (7.17) kapjuk, hogy

$$e^{B}\cdot e^{C} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(B+C)^k = e^{(B+C)} \quad . \tag{7.18}$$

Hasonlóan

$$e^{C}\cdot e^{B} = e^{C+B} = e^{B+C} = e^{B}\cdot e^{C} \quad .$$

A (7.12) egyenlőtlenség bizonyítása során nyilvánvaló, hogy $B\cdot(-B) = (-B)\cdot(B)$, ezért (7.11) szerint

$$e^{B-B} = e^{\bar{0}} = E = e^B \cdot e^{-B} \rightarrow \tag{7.19}$$
$$\rightarrow 1 = \det E = \det e^B \cdot e^{-B} \rightarrow \det e^B \neq 0 .$$

Tétel (az állandó együtthatójú DER egy alapmátrixának felírásáról)

A (7.2) DER egy $\Phi(x)$ alapmátrixa a következő formulával adódik:

$$\Phi(x) = e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k x^k = E + \frac{1}{1!} Ax + \frac{1}{2!} A^2 x^2 + \ldots \quad . \tag{7.20}$$

Bizonyítás. A tétel bizonyításához (6.42) alapján elegendő belátni, hogy (7.10) teljesíti a

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = A \cdot \Phi(x) \tag{7.21}$$

mátrix alakú differenciálegyenletet.
A (7.20) sor az abszolút és egyenletes konvergencia miatt tagonként differenciálható, ezért

$$\frac{d(e^{Ax})}{dx} = \left[A + \frac{1}{1!} A^2 x + \frac{1}{2!} A^3 x^2 + \ldots + \frac{1}{k!} A^{k+1} x^k + \ldots \right] =$$
$$= A \underbrace{\left[E + \frac{1}{1!} Ax + \frac{1}{2!} A^2 x^2 + \ldots + \frac{1}{k!} A^k x^k + \ldots \right]}_{=e^{Ax}} = Ae^{Ax} \quad . \tag{7.22}$$

Tehát (7.21) valóban teljesül.
Keressük most arra a választ, hogy milyen a (7.20) alapmátrix szerkezete, azaz milyenek az e^{Ax} mátrix elemei?
Ennek megválaszolásához szükség van az alábbi fogalmakra és eredményekre.
Legyenek a (7.2) egyenletben szereplő $A \in R^{nxn}$ valós mátrix egymástól különböző sajátértékei (valós vagy komplex)

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_s \in C , \tag{7.23}$$

melyeknek multiplicitása rendre

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_s , \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s = n . \tag{7.24}$$

Tétel (valós mátrix Jordán-alakjáról).
Minden valós $n \times n$ –es A mátrixhoz létezik egy olyan $P \in C^{n \times n}$ (komplex $n \times n$-es mátrix), hogy det P≠ 0 és

$$\dot{J} = P^{-1} \cdot A \cdot P , \; A = P \cdot \dot{J} \cdot \dot{P}^{-1} , \tag{7.25}$$

ahol

$$\dot{J} = diag(\dot{J}_1, \dot{J}_2, \ldots, \dot{J}_m) = \begin{pmatrix} \dot{J}_1 & & & \\ & \dot{J}_2 & 0 & \\ & 0 & \ldots & \\ & & & \dot{J}_m \end{pmatrix} , \tag{7.26}$$

az A-mátrix ún. Jordán-féle harmonikus alakja és

$$\dot{J}_j = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & \\ & 0 & \dots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix} \in R^{n_j x n_j}, \quad \begin{matrix} n_1 + n_2 + \dots + n_m = n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s, \\ k \in \{1,2,\dots,s\}, \quad j \in \{1,2,\dots,m\} \end{matrix} \tag{7.27}$$

az ún. **Jordán-féle blokk**.

A (7.26) Jordán-féle harmonikus alakhoz egy λ_k, $k \in \{1,2,\dots,s\}$ sajátértékhez több Jordán-féle blokk is tartozhat, nevezetesen pontosan

$$m_k = n - rang(A - \lambda_k E), \; k \in \{1,2,\dots,s\} \tag{7.28}$$

számú blokk.

Tehát a Jordán-blokkok m száma az alábbi formulával határozható meg:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_s = n \cdot s - \sum_{i=1}^{s} (A - \lambda_i E) \tag{7.29}$$

és λ_k annyiszor fordul elő a (7.26) $\dot{J}$ mátrix főátlójában, amennyi a λ_k multiplicitása, azaz α_k –szor. Így, ugyanazt a λ_k –t tartalmazó Jordán-féle blokkok dimenziójának összege egyenlő α_k–val.

Megjegyzés *A (7.27) Jordán-féle blokkok dimenziói általános esetben az A mátrix komplex számtest felett értelmezett ún. elemi osztóin keresztül határozható meg.*

Legyen P a fenti tétel által garantált komplex $n \times n$–es mátrix, melyre (7.25) szerint

$$A = P \cdot \dot{J} \cdot P^{-1} \tag{7.30}$$

Könnyű észrevenni, hogy az A mátrix hatványa minden egész l kitevőre

$$A^l = \left(P \cdot J \cdot P^{-1}\right)^l = P \cdot J^l \cdot P^{-1}. \tag{7.31}$$

A (7.31), (7.3) formulák figyelembevételével azt kapjuk, hogy a (7.2) DER (7.20) alapmátrixa

$$\Phi(x) = e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P \left(\dot{J} x \right)^k P^{-1} = P \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Jx)^k \right)}_{e^{Jx}} \cdot P^{-1} = \tag{7.32}$$

$$= P \cdot e^{Jx} \cdot P^{-1} \; .$$

Továbbá a (7.26) alakból könnyen következik, hogy

$$e^{Jx} = diag\left(e^{J_1 x}, e^{J_2 x}, \dots, e^{J_m x}\right) = \begin{pmatrix} e^{J_1 x} & & & \\ & e^{J_2 x} & 0 & \\ & 0 & \dots & \\ & & & e^{J_m x} \end{pmatrix}. \tag{7.33}$$

Tehát a (7.32) alapmátrix kiszámításához elegendő a (7.33)-ban szereplő $\ell^{J_1 x}, \ell^{J_2 x}, \dots, \ell^{J_m x}$ mátrixok szerkezetét megadni.

Ha a (7.27) alakú $\dot{J}_j$ $n_j \times n_j$ -es mátrix, akkor

$$\dot{J} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & . & \dots & \\ & 0 & . & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix} = \lambda_k \cdot I_{n_j} + H_{n_j}, j=1,2,\dots,m, \tag{7.34}$$

ahol $\mathrm{I}_{\mathrm{n_j}}$ az $n_j \times n_j$ -es egységmátrix, és H_{n_j} az alábbi $n_j \times n_j$ -es mátrix:

$$H_{n_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & 0 & \dots & \\ & 0 & & \dots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} . \tag{7.35}$$

Vegyük észre, hogy a (7.35) H_{n_j} mátrix egész kitevőjű hatványai a következő mátrixok:

$$H_{n_j}^{\ 2} = H_{n_j} \cdot H_{n_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & 0 & 0 & \dots & \\ & & & 0 & \dots & 1 \\ & 0 & & & \dots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}; H_{n_j}^{\ 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ & & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & & \dots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix};\dots$$

$$\dots; H_{n_j}^{\ n_j-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & & \dots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, H_{n_j}^{\ n_j} = \overline{0}_{n_j} = H_{n_j}^{\ n_j+1} = H_{n_j}^{\ n_j+2} = \dots = H_{n_j}^{\ k} \tag{7.36}$$

$k \geq n_j$

Mivel teljesül a

$$\left(\lambda_k I_{n_j} x\right) \cdot \left(H_{n_j} x\right) = \lambda_k \cdot x^2 \cdot H_{n_j} \cdot I_{n_j} = \left(H_{n_j} x\right) \cdot \left(\lambda_k \cdot I_{n_j} x\right) \tag{7.37}$$

felcserélhetőségi reláció, ezért (7.10) , (7.11) alapján

$$e^{J_j x} = e^{(\lambda_k \cdot I_{n_j} + H_{n_j})x} = e^{\lambda_k x} \cdot I_{n_j} \cdot e^{H_{n_j} \cdot x} = e^{\lambda_k x} \cdot e^{H_{n_j} x} . \tag{7.38}$$

Így (7.32), (7.33), (7.36), (7.38)-ból következik, hogy

$$e^{H_{n_j}x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}H_{n_j}{}^{k}\cdot x^{k}=\sum_{k=0}^{n_{j-1}}\frac{1}{k!}H_{n_j}{}^{k}x^{k}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \frac{x^3}{3!} & \dots & \frac{x^{n_{j-2}}}{(n_{j-2})!} & \frac{x^{n_{j-1}}}{(n_{j-1})!} \\ 0 & 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \frac{x^3}{3!} & \dots & \frac{x^{n_{j-2}}}{(n_{j-2})!} \\ & & 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \dots & \dots \\ & & & 1 & \frac{x}{1!} & \dots & \frac{x^3}{3!} \\ & & 0 & & 1 & \dots & \frac{x^2}{2!} \\ & & & & & 1 & \frac{x}{1!} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{n_j} \tag{7.39}$$

és

$$\Phi(x)=\ell^{Ax}=P\begin{bmatrix} \ell^{\lambda_1 x}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \dots & \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \\ & 1 & \frac{x}{1!} & & \dots \\ & 0 & 1 & \dots & \frac{x}{1!} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{n_j} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \ell^{\lambda_s x}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \dots & \frac{x^{n_m-1}}{(n_m-1)!} \\ & 1 & \frac{x}{1!} & & \dots \\ & 0 & 1 & \dots & \frac{x}{1!} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{n_m} \end{bmatrix}\cdot P^{-1}, \tag{7.40}$$

ahol $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$ és a szögletes zárójelben lévő mátrix főátlói a (7.39) típusú blokkok.

7.1 **Példa** Írjuk fel az alapmátrix segítségével a

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=A\ \bar{y}, A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \tag{7.41}$$

DER általános megoldását.

Megoldás. Számoljuk ki az A mátrix sajátértékeit:

$$\det\begin{pmatrix} (3-\lambda) & -2 \\ 4 & (-3-\lambda) \end{pmatrix}=0 \rightarrow \lambda^2-1=0 \rightarrow \lambda_1=1, \quad \lambda_2=-1.$$

Mivel $rang(A-\lambda_1 E) = rang\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = 1$, ezért (7.29)-ből

$$m_1 = n - rang(A - \lambda_1 E) = 2 - 1 = 1\,.$$

Tehát, a λ_1=1 sajátértékhez az adott mátrix Jordán-féle alakjában egy darab egy dimenziós Jordán-blokk tartozik.
Hasonlóképpen a λ_2=-1 sajátértéknek szintén egy egydimenziós Jordán-blokk felel meg.
Ezért a (7.41) A mátrix Jordán-alakja:

$$\dot{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.42}$$

Határozzuk meg (7.25)-ben azt a hasonlósági P transzformációt (mátrixot), amely az

$$A = P \cdot \dot{J} \cdot P^{-1} \tag{7.43}$$

mátrixot a (7.42) Jordán-alakra hozza!
Jelöljük az egyelőre ismeretlen P^{-1} mátrix komponenseit a következőképpen:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Akkor a (7.43)-ból következő

$$P^{-1} \cdot A = \dot{J} \cdot P^{-1}$$

egyenlőségből

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{7.44}$$

Lineáris algebrai módszereket alkalmazva (a mátrixok szorzását) (7.44)-ből

$$\begin{matrix} 3a + 4b & -2a - 3b \\ 3c + 4d & -2c - 3d \end{matrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix},$$

melyből az a,b,c,d ismeretlenekre a

$$\begin{matrix} 3a + 4b = a \\ -2a - 3b = b \\ 3c + 4d = -c \\ -2c - 3d = -d \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2a + 4b = 0 \\ -2a - 4b = 0 \\ 4c + 4d = 0 \\ -2c - 2d = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2a + 4b = 0 \\ 4c + 4d = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a + 2b = 0 \\ c + d = 0 \end{matrix} \tag{7.45}$$

lineáris homogén algebrai egyenletrendszert kapjuk.
A (7.45) algebrai egyenletrendszer mátrixának rangja, amint látjuk, kettő, ezért például az utóbbi egyenletrendszer egyik megoldása

a=2, b = -1. c= -1, d =1.

Így $\quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ és $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Továbbá, (7.40) szerint

$$\Phi(x) = e^{Ax} = P \cdot e^{\dot{J}x} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x - e^x & -e^x + e^{-x} \\ 2e^x - e^{-x} & -e^x + 2e^{-x} \end{pmatrix}. \tag{7.46}$$

Ezek után (6.26) alapján a (7.46) alapmátrix ismeretében fel tudjuk írni a (7.41) DER általános megoldását:

$$\bar{y}_{h.á}(x) = \Phi(x) \cdot \bar{c} = \phi(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x - e^{-x} & -e^x + e^{-x} \\ 2e^x - e^{-x} & -e^x + 2e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

vagy ekvivalens alakban a (7.46) alapmátrix oszlopvektorai által

$$\bar{y}_{h.á}(x) = \begin{pmatrix} 2e^x - e^{-x} \\ 2e^x - e^{-x} \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} -e^x + e^{-x} \\ -e^x + 2e^{-x} \end{pmatrix} \cdot c_2, \quad c_1, c_2 \in R.$$

8. Ljapunov-féle stabilitás

Legyen adott a $T \in R^{n+1}$ nyílt halmaz, és legyenek adottak az

$$f_i : T \to R, \quad i \in \{1,2,...,n\} \tag{8.1}$$

függvények úgy, hogy:

(H_1) f_i folytonos a T halmazon minden $i \in \{1,2,...,n\}$ esetén (8.2)

(H_2) a $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, y_1, y_2,..., y_n)$ parciális deriváltak folytonosak T-n minden $i,k \in \{1,2,...,n\}$ esetén. (8.3)

Legyen adott az

$$(x_0, \bar{y}_0) \in T \subset R \times R^n \tag{8.4}$$

pont és tekintsük újra a (2.50) alakú differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdetiérték-feladatot:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x_1 y_1,..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x_1 y_1,..., y_n) \\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x_1 y_1,..., y_n) \end{cases} \equiv \begin{array}{l} \dfrac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x_1 \bar{y}) \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \end{array} \tag{8.5}$$

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20},..., y_n(x_0) = y_{n0}.$$

A (H_1), (H_2) feltételek, amint már tudjuk a 2.3 fejezetből (lásd a 33. oldalt), biztosítják a (8.5) kezdetiérték-feladat megoldásának létezését és egyértelműségét.
Jelölje

$$\bar{y} = \bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0) \tag{8.6}$$

a (8.5) feladat egyetlen megoldását. Tegyük fel, hogy ez a megoldás értelmezve van az

$$[x_0, \infty) \tag{8.7}$$

intervallumon.
Most azt fogjuk megvizsgálni, hogy értelmezve van-e az $\bar{y}_0 - hoz$ közeli $\bar{z}_0$ pontból induló megoldás, az $[x_0, \infty)$ intervallumon, azaz a

$$\begin{array}{l} \dfrac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}) \\ \bar{y}(x_0) = \bar{z}_0 \end{array} \tag{8.8}$$

kezdetiérték-feladat egyetlen

$$\bar{y} = \bar{y}(x, x_0, \bar{z}_0) \tag{8.9}$$

megoldása az $[x_0, \infty)$ intervallumon, és hogy mikor igaz a

$$\lim_{\bar{z}_0 \to \bar{y}_0} \bar{y}(x, x_0, \bar{z}_0) = \bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0) \tag{8.10}$$

reláció az $[x_0, \infty)$ intervallumon x-ben egyenletesen.

Tehát azt szeretnénk tudni, hogy ha (8.5) kezdetiérték-feladatban az $\bar{y}_0$ kezdeti feltételt kis mértékben perturbáljuk, akkor a jövőben „stabilisan" viselkedik-e a (8.8) perturbál kezdetiérték-feladat megoldása.
A gyakorlatban leghasználhatóbb matematikai elméletét ennek a problémának A.M. Ljapunov (1857-1918) fogalmazta meg.

8.1 Stabilitási fogalmak

Tegyük fel, hogy a (8.5) kezdetiérték -feladat

$$\bar{y} = \bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0)$$

megoldásának értelmezési tartománya tartalmazza az $[x_0, \infty)$ intervallumot.

Definíció (stabilis megoldás)

A (8.5) kezdetiérték-feladat $\bar{y} = \bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0)$ megoldását stabilisnak (stabilnak) nevezzük, ha minden pozitív ε-hoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, hogy:

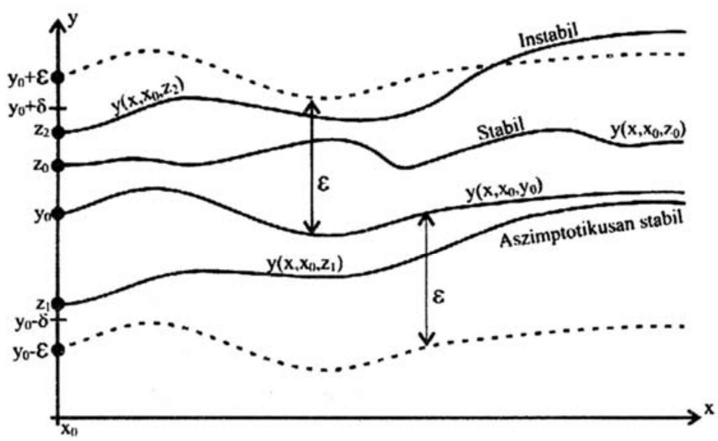
1. *Bármely $\bar{z}_0 \in R^n -re$*

$$\|\bar{z}_0 - \bar{y}_0\| < \delta \qquad (8.11)$$

esetén az $\bar{y} = \bar{y}(x, x_0, \bar{z}_0)$ megoldás létezik az $[x_0, \infty)$ intervallumon.

2. *Minden $x \geq x_0 ra$ teljesül*

$$\|\bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0) - \bar{y}(x, x_0, \bar{z}_0)\| < \varepsilon \qquad (8.12)$$



8.1 ábra

Definíció (aszimptotikusan stabilis megoldás)

A (8.5) kezdetiérték-feladat $\bar{y} = \bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0)$ megoldását aszimptotikusan stabilisnak nevezzük, ha:

1. *Ez a megoldás stabilis.*
2. *Létezik $\delta > 0$ úgy, hogy bármely $\bar{z}_0 \in R^n -re$*

$$\|\bar{z}_0 - \bar{y}_0\| < \delta \qquad (8.13)$$

esetén

$$\lim_{x\to\infty} y(x,x_0,\bar{z}_0)=\bar{y}(x,x_0,\bar{y}_0) \quad . \tag{8.14}$$

Definíció (instabilis megoldás)
A (8.5) kezdetiérték-feladat $\bar{y}=\bar{y}(x,x_0,\bar{y}_0)$ *megoldása instabilis, ha ez a megoldás nem stabil.*
A stabilis, aszimptotikusan stabilis illetve instabilis tulajdonságok geometriai interpretációja a 8.1 ábrán látható.
Megjegyezzük, hogy a (8.5) feladat nemtriviális $\bar{y}=\bar{y}(x,x_0,\bar{y}_0)=\bar{\varphi}(x)\neq 0$ (8.15)
(nem azonosan nulla) megoldásának stabilitási vizsgálata mindig visszavezethető a

$$\bar{w}=\bar{y}-\bar{\varphi}(x) \tag{8.16}$$

helyettesítéssel a

$$\frac{d\bar{w}}{dx}=\bar{F}(x,\bar{w})=\bar{f}(x,\bar{w}+\bar{\varphi}(x))-\bar{f}(x,\bar{\varphi}(x)) \tag{8.17}$$

differenciálegyenlet-rendszer

$$\bar{w}=\bar{w}(x,x_0,\bar{0})\equiv 0 \tag{8.18}$$

triviális megoldásának stabilitási vizsgálatára, ahol

$$\bar{F}(x,\bar{0})=\bar{f}(x,0+\beta\bar{\varphi}(x))-\bar{f}(x,\bar{\varphi}(x))=\bar{0}. \tag{8.19}$$

8.**1 Példa**. Vizsgáljuk meg a

$$\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx}=y_2\\ &\frac{dy_2}{dx}=-y_1\\ &y_1(0)=y_{10}=0, y_2(0)=y_{20}=0 \end{aligned} \tag{8.20}$$

kezdetiérték-feladat

$$\bar{y}=\bar{y}(x,0,\bar{0})=\bar{\varphi}(x)=col(\varphi_1(x),\varphi_2(x))=col(0,0)=\bar{0} \tag{8.21}$$

triviális megoldásának stabilitását.
Megoldás. Az adott (8.20) feladat ekvivalens a

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}+y_2=0, \quad y_2(0)=0, \quad \frac{dy_2(0)}{dx}=0 \tag{8.22}$$

másodrendű differenciálegyenlet-rendszerhez rendelt kezdetiérték- feladattal.

Írjuk fel a (4.1) alfejezetben ismertetett módszer szerint a (8.22)-ben szereplő

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}+y_2=0 \tag{8.23}$$

differenciálegyenlet általános megoldását.
Mivel

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}+y_2=0 \rightarrow \begin{array}{c} \textit{Karakterisztikus egyenlet} \\ \lambda^2+1=0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \textit{Komplex gyökök}: \\ \lambda_1=i \\ \lambda_2=-i \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow\; y_{2.á}(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \;\rightarrow\; y_{1.á}(x) = \frac{-dy_{2á}(x)}{dx} = c_1 \sin x - c_2 \cos x\,.$$

Tehát a (8.20) differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása:

$$\begin{aligned} y_{1.á}(x) &= c_1 \sin x - c_2 \cos x; \\ y_{2.á}(x) &= c_1 \cos x + c_2 \sin x \end{aligned}\,. \tag{8.24}$$

Most pedig tekintsük (8.20) helyett a „pertubált" kezdeti feltételekkel vett feladatot.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2,\;\; y_1(0) = z_{10}, \\ \frac{dy_2}{dx} &= -y_1,\;\; y_2(0) = z_{20} \end{aligned}\,. \tag{8.25}$$

A (8.24) általános megoldásból határozzuk meg a (8.25) kezdeti feltételeket kielégítő megoldást:

$$\begin{aligned} y_1(0) = z_{10}:\;\; c_1 \cdot 0 - c_2 \cdot 1 = z_{10} \\ y_2(0) = z_{20}:\;\; c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = z_{20} \end{aligned} \;\rightarrow\; \begin{aligned} c_1 &= z_{20} \\ c_2 &= -z_{10} \end{aligned} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \begin{aligned} y_1(x,0,\bar{z}_0) &= y_1(x,0,z_{10},z_{20}) = z_{20} \sin x + z_{10} \cos x \\ y_2(x,0,\bar{z}_0) &= y_2(x,0,z_{10},z_{20}) = z_{20} \cos x - z_{10} \sin x \end{aligned}\,. \tag{8.26}$$

Könnyű belátni, hogy a (8.26) megoldás értelmezve van az $[x_0,\infty)$ intervallumon, és ha

$$|z_{10} - 0| < \frac{\varepsilon}{4},\; |z_{20} - 0| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{8.27}$$

akkor

$$\|\bar{z}_0 - \bar{0}\| = |z_{10} - 0| + |z_{20} - 0| \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} = \delta(\varepsilon) \quad , \tag{8.28}$$

$$\Big|y_1(x,0,\bar{z}_0) - \underbrace{\varphi_1(x)}_{=0}\Big| = |y_1(x,0,\bar{z}_0) - 0| = |z_{20} \sin x + z_{10} \cos x| \le |z_{20}| + |z_{10}| \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \le \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\Big|y_2(x,0,\bar{z}_0) - \underbrace{\varphi_2(x)}_{=0}\Big| = |y_2(x,0,\bar{z}_0) - 0| = |z_{20} \cos x - z_{10} \sin x| \le |z_{20}| + |z_{10}| \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.29}$$

Tehát (8.28) figyelembevételével

$$\begin{aligned} &\Big\|\bar{y}(x,0,\bar{z}_0) - \underbrace{\bar{y}(,0,\bar{0})}_{=0}\Big\| = \Big|y_1(x,0,\bar{z}_0) - \underbrace{y_1(x,0,\bar{0})}_{=0}\Big| + \Big|y_2(x,0,\bar{z}_0) - \underbrace{y_2(x,0,\bar{0})}_{=0}\Big| = \\ &= |y_1(x,0,\bar{z}_0) - 0| + |y_2(x,0,\bar{z}_0) - 0| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{8.30}$$

És azt látjuk, hogy (8.11), (8.12) alapján a (8.20) kezdetiérték-feladat triviális megoldása stabilis.

8.2 **Példa**. Végezzük el a

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1, \;\; y_1(0) = 0$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -y_2, \;\; y_2(0) = 0 \qquad (8.31)$$
,

kezdetiérték-feladat

$$\bar{y} = \bar{y}(x,0,\bar{0}) = \bar{\varphi}(x) = col(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = col(0,0) = \bar{0} \qquad (8.32)$$

nulla megoldásának stabilitási vizsgálatát.

Megoldás. A (8.31) differenciálegyenlet-rendszer egyenleteit külön-külön megoldva, mint elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenleteket, a (3.22) formula szerint

$$y_{1.á}(x) = c_1 e^x; \;\; y_{2.á}(x) = c_2 e^{-x}; \;\; c_1, c_2 \in R, \;\; x \in (-\infty, \infty) \;. \qquad (8.33)$$

A (8.33) általános megoldásából könnyen megkapjuk a „pertubált” kezdeti értékek mellett a

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1, \;\; y_1(0) = z_{10}$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -y_2, \;\; y_2(0) = z_{20} \qquad (8.34)$$
,

kezdetiérték-feladat megoldását (lásd (3.22)-t, (3.23)-t).

$$y_1(x,0,\bar{z}_0) = z_{10} \cdot e^x \;, \;\; y_2(x,0,\bar{z}_0) = z_{20} \cdot e^{-x} \qquad (8.35)$$

A (8.35) formulából nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{x\to\infty} z_{10} \cdot e^x = \lim_{x\to\infty} y_1(x,0,\bar{z}_0) = \begin{Bmatrix} +\infty, & ha \;\; z_{10} > 0 \\ -\infty, & ha \;\; z_{10} < 0 \end{Bmatrix} \qquad (8.36)$$

Tehát a stabilitás definíciója szerint a (8.31) differenciálegyenlet-rendszer triviális megoldása instabilis.

8**.3. Példa**. Ellenőrizzük, hogy stabilis-e a

$$\frac{dy_1}{dx} = -y_1, \;\; y_1(0) = 0$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -y_2, \;\; y_2(0) = 0 \qquad (8.37)$$

kezdetiérték-feladat triviális megoldása.

Megoldás. A (3.22) képlet alapján a (8.37)-ben szereplő egyenletek általános megoldása

$$y_{1.á}(x) = c_1 e^{-x}; \;\; y_{2.á}(x) = c_2 e^{-x}; \;, \; c_1, c_2 \in R, \;\; x \in (-\infty, \infty) \;, \qquad (8.38)$$

melyekből könnyen kapható a

$$\frac{dy_1}{dx} = -y_1, \;\; y_1(0) = z_{10}$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -y_2, \;\; y_2(0) = z_{20} \qquad (8.39)$$

kezdetiérték-feladat megoldása:

$$y_1(x,0,\bar{z}_0) = z_{10} \cdot e^{-x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ ,$$
$$y_2(x,0,\bar{z}_0) = z_{20} \cdot e^{-x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ . \qquad (8.40)$$

A (8.40) tulajdonságaiból következik a (8.37) feladat nulla megoldásának aszimptotikus stabilitása.

8.2 Lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszerek stabilitása

Tekintsük újra a (6.6) alakú

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = A(x)\bar{y} \ , \ A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x)...a_{1n}(x) \\ .... \\ a_{n1}(x)...a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}, \frac{d\bar{y}}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ ... \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} \qquad (8.41)$$

lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszert.

Tegyük fel, hogy az

$x \to A(x) \in R^{n\times n}$ mátrixfüggvény folytonos az $[x_0,\infty)$ intervallumon. Legyen a (6.25) alakú $\Phi(x)$ mátrix a (8.41) homogén DER egy alapmátrixa.

Könnyű bizonyítani, hogy ha $C \in R^{n\times n}$ olyan konstans mátrix, melyre $\det C \neq 0$, akkor

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) \cdot C \qquad (8.42)$$

is alapmátrixa (8.41)-nek.

Valóban, mivel minden $\Phi(x)$ alapmátrixnak ki kell elégítenie a (6.42) mátrix differenciálegyenletet, elegendő meggyőződni, hogy

$$\frac{d\Phi_1(x)}{dx} = A(x)\Phi_1(x) \quad . \qquad (8.43)$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{d(\Phi(x)\cdot C)}{dx} = \frac{d\Phi(x)}{dx}\cdot C = A(x)\cdot\Phi(x)\cdot C = A(x)\cdot(\phi(x)\cdot C),$$
$$\det(\Phi(x)\cdot C) = \det\Phi(x)\cdot\det C \neq 0$$

tehát (8.43) valóban teljesül.

Legyen a továbbiakban $\Phi(x)$ ún. x_0 pontban normált alapmátrix, melyre

$$\Phi(x_0) = E \qquad (8.44)$$

(a (8.42) tulajdonság alapján mindig található egy olyan $C \in R^{n\times n}$ mátrix, hogy $\Phi_1(x_0) = E$).

Vizsgáljuk a (8.41)-hez tartozó

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = A(x)\bar{y}$$
$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \qquad (8.45)$$

kezdetiérték-feladat

$$\bar{y} = \bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0) = \varphi(x) \ , \ x \in [x_0,\infty) \qquad (8.46)$$

megoldásának stabilitását.

Megjegyezzük, hogy (8.15)-(8.19) figyelembevételével a (8.46) megoldás stabilitása bármely $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$ kezdeti feltétel esetén ekvivalens a (8.41) DER $\bar{y} = 0$ nulla megoldásának stabilitásával.
Ha (6.38)-ban $\bar{f}(x) \equiv 0$, akkor a (8.45) kezdetiérték-feladat megoldása (6.39) alapján

$$\bar{y} = \bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0) = \varphi(x) = \Phi(x) \cdot \underbrace{\Phi^{-1}(x_0)}_{=E} \cdot \bar{y}_0 = \Phi(x)\bar{y}_0, \ x \in [x_0, \infty) \ . \tag{8.47}$$

Hasonlóképpen a perturbált

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = A(x)\bar{y} \\ &\bar{y}(x_0) = \bar{z}_0 \end{aligned} \tag{8.48}$$

kezdetiérték-feladat megoldása

$$\bar{y}(x, x_0, \bar{z}_0) = \bar{\psi}(x) = \Phi(x) \cdot \bar{z}_0 . \tag{8.49}$$

Tehát

$$\bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0) - \bar{y}(x, x_0, \bar{z}_0) = \Phi(x) \cdot (\bar{y}_0 - \bar{z}_0) , \tag{8.50}$$

melyből arra tudunk következtetni, hogy a stabilitás eldöntésében meghatározó szerepe van az $\Phi(x)$ alapmátrixnak, ezért tekintsük az alábbi három lehetőséget.

1.eset. Korlátos $\Phi(x)$ alapmátrix.

Legyen a $\Phi(x)$ $(\Phi(x_0) = E)$ normált alapmátrix az

$$I_\infty = [x_0, \infty) \tag{8.51}$$

intervallumon felülről korlátos, azaz

$$\|\Phi(x)\| \le M, \quad M > 0, \quad x \ge x_0. \tag{8.52}$$

Ekkor (8.50)-ből

$$\|\bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0) - \bar{y}(x, x_0, \bar{z}_0)\| \le \|\Phi(x)\| \cdot \|(\bar{y}_0 - \bar{z}_0)\|, \tag{8.53}$$

melyből következik, hogy
minden pozitív ε-hoz létezik olyan

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M} , \tag{8.54}$$

melyre

$$\|\bar{y}_0 - \bar{z}_0\| \le \frac{\varepsilon}{M} \tag{8.55}$$

esetén

$$\|\bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0) - \bar{y}(x, x_0, \bar{z}_0)\| \le \|\Phi(x)\| \cdot \|(\bar{y}_0 - \bar{z}_0)\| \le M \cdot \frac{\varepsilon}{M} \le \varepsilon , \tag{8.56}$$

mely arra utal, hogy a (8.45) feladat $\bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0)$ megoldása stabilis.

2.eset. Nulla- mátrixhoz tartó alapmátrix.
Legyen

$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=\overline{0}\,. \tag{8.57}$$

Nyilvánvaló, hogy ekkor $\|\Phi(x)\|$ korlátos és az előbbiek szerint az $\overline{y}(x,x_0,\overline{y}_0)$ megoldás stabilis.
Továbbá (8.57) szerint

$$\|\overline{y}(x,x_0,\overline{y}_0)-\overline{y}(x,x_0,\overline{z}_0)\|\le\|\Phi(x)\|\cdot\|(\overline{y}_0-\overline{z}_0)\|\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0\,, \tag{8.58}$$

melyből az $\overline{y}(x,x_0,\overline{y}_0)$ megoldás aszimptotikus stabilitása következik.

3. **eset. Nem korlátos alapmátrix**.
Feltételezzük, hogy a $\Phi(x)$ alapmátrix nem korlátos, azaz található egy olyan növekvő számsorozat,

$$x_0\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_k\le\ldots\,, \tag{8.59}$$

melyre

$$\lim_{x\to\infty}\|\Phi(x_k)\|=\infty\,, \tag{8.60}$$

azaz a $\Phi(x)$ alapmátrix legalább egy $\Phi_{pq}(x)$eleme esetén

$$\lim_{x\to\infty}|\Phi_{pq}(x_k)|=\infty\quad.$$

Most pedig válasszuk meg a (8.48) perturbált feladatban a kezdeti $\overline{z}_0$ értéket úgy, hogy csak a q-adik koordinátája különbözzék a (8.45)- ben szereplő $\overline{y}_0-tól$:

$$y_{i0}=z_{i0}\,,\quad i=1,\ldots,n\,,\quad i\ne q\ \text{ és }\ y_{i0}\ne z_{i0} \tag{8.61}$$

Ekkor (8.50) alapján a p-edik koordinátára érvényes

$$\varphi_p(x)-\psi_p(x)=\Phi_{pq}(x)(y_{q0}-z_{q0})\,, \tag{8.62}$$

melyből

$$\lim_{k\to\infty}|\varphi_p(x_k)-\psi_p(x_k)|=\infty\quad. \tag{8.63}$$

Ezek szerint tetszőleges kicsiny

$$\delta=y_{q0}-z_{q0}$$

különbségre az

$$\varepsilon(x)=\varphi_p(x)-\psi_p(x),\quad x\in I_\infty=[x_0,\infty)$$

különbség nem korlátos.
Egyben nem csak a p-edik koordináták különbsége nem korlátos, hanem

$$\lim_{k\to\infty}\|\overline{\varphi}(x_k)-\overline{\psi}(x_k)\|=\infty\,, \tag{8.64}$$

amelyből a (8.46) megoldás instabilitása következik.
Tehát bebizonyítottuk, hogy az alapmátrix korlátossága, nulla-mátrixhoz való tartása illetve felülről való nem korlátossága elégséges feltételei rendre a stabilitásra, aszimptotikus stabilitásra illetve instabilitásra.
Most pedig belátjuk, hogy ezek a feltételek nem csak elégségesek, hanem szükségesek is.

Legyen a (8.46) $\bar{y} = \bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0) = \bar{\varphi}(x)$ megoldás stabilis, azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$, hogy $\|\bar{y}_0 - \bar{z}_0\| \le \delta$ esetén

$$\|\bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0) - \bar{y}(x, x_0, \bar{z}_0)\| = \|\bar{\varphi}(x) - \bar{\psi}(x)\| \le \varepsilon . \tag{8.65}$$

A (8.50) formula alapján a *p*-edik koordináták különbsége

$$\varphi_p(x) - \psi_p(x) = \sum_{q=1}^{n} \Phi_{pq}(x)(y_{q0} - z_{q0}). \tag{8.66}$$

Ismét, ha a $\bar{z}_0$ kezdetiérték vektor (8.61) alakú, akkor (8.66)-ból

$$\Phi_{pq}(x) = \frac{\varphi_p(x) - \psi_p(x)}{y_{q0} - z_{q0}} ,$$

vagy

$$|\Phi_{pq}(x)| \le \frac{|\varphi_p(x) - \psi_p(x)|}{y_{q0} - z_{q0}} \le K , \quad x \in [x_0, \infty) . \tag{8.67}$$

Ha a (8.67) egyenlőtlenséget felírjuk minden *p*-re és *q*-ra, $p, q \in \{1, 2, ..., n\}$ és összegezve az így nyert egyenlőtlenséget, megkapjuk, hogy

$$\|\Phi(x)\| = \sum_{p,q=1}^{n} |\Phi_{pq}(x)| \le n^2 K , \tag{8.68}$$

azaz igazoltuk a $\Phi(x)$ alapmátrix norma szerinti korlátosságát.
Most pedig legyen a (8.46) alakú

$$\bar{y} = \bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0) = \bar{\varphi}(x)$$

megoldás aszimptotikusan stabilis. Ekkor

$$\lim_{x \to \infty} |\varphi_p(x) - \psi_p(x)| = 0 , \tag{8.69}$$

és ennek alapján (8.67)-ből $x \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to \infty} \Phi_{pq}(x) = 0 \to \lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 0 . \tag{8.70}$$

Végül legyen a (8.46) megoldás instabilis. Ez esetben a $\Phi(x)$ alapmátrix nem lehet korlátos, hiszen akkor a megoldás stabilis lenne, ami ellentmondáshoz vezet.
Tehát igazoltuk a következő állítást.

Tétel (szükséges és elégséges feltételek a homogén DER stabilitására)
A

$$\begin{aligned} &\frac{d\bar{y}}{dx} = A(x)\bar{y} \\ &\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \end{aligned} \quad , x \in [x_0, \infty) \textit{ kezdetiérték feladat}$$

$\bar{y} = \bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0)$ *megoldása akkor és csak akkor:*
1. Stabilis, ha az x_0 *pontban normált* $\Phi(x)$ *alapmátrix* $(\Phi(x_0) = E)$ *az* $I_\infty = [x_0, \infty)$ *intervallumon korlátos:*

$$\|\Phi(x)\| \le M , \quad x \ge x_0 . \tag{8.71}$$

2. Aszimptotikusan stabilis, ha

$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=0 \tag{8.72}$$

3. Instabilis, ha $\Phi(x)$ nem korlátos.

Az előbbi tételből következik, hogy a

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=A(x)\bar{y}$$

DER $\bar{y}=\bar{0}$ nulla megoldása akkor és csak akkor stabilis, ha minden megoldása korlátos az $[x_0,\infty)$ intervallumon.

Mivel a (8.45) kezdetiérték feladatban az $\bar{y}_0\in R^n$ kezdetiérték tetszőleges, ezért tetszőleges $\bar{y}=y(x,x_0,\bar{y}_0)=\bar{\varphi}(x)$ megoldásról van szó, ami azt jelenti, hogy a (8.41) homogén DER összes megoldása egyszerre mind stabilis, vagy aszimptotikusan stabilis, vagy instabilis. ebből kiindulva nem csak a konkrét megoldást, hanem a homogén DER-t mondjuk stabilisnak, aszimptotikusan stabilisnak, vagy instabilisnak.
Nemlineáris DER esetén ez nem áll fenn.

8.3 Lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszer stabilitása

Tekintsük a (6.2) alakú

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=A(x)\bar{y}+\bar{f}(x) \tag{8.73}$$

lineáris inhomogén DER-t, ahol az $A(x)$ mátrixfüggvény és az $\bar{f}(x)$ vektorfüggvény folytonos az $[x_0,\infty)$ intervallumon.

Tétel (szükséges és elégséges feltételek inhomogén DER stabilitására)
A (8.73) inhomogén DER (összes megoldása) minden folytonos $\bar{f}(x)$ zavarófüggvényre akkor és csak akkor stabilis, ha stabilis a megfelelő

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=A(x)\bar{y} \tag{8.74}$$

homogén DER (összes megoldása).

Bizonyítás. Szükségesség.
Legyen

$$\bar{y}=\bar{y}(x,x_0,\bar{y}_0)=\varphi(x)\ ,\ x\in I_\infty=[x_0,\infty) \tag{8.75}$$

a (8.73) inhomogén DER stabilis megoldása az $\bar{y}(x_0)=\bar{y}_0$ kezdeti feltételek mellett.
Ekkor a definíció szerint minden $\varepsilon>0$-hoz található olyan $\delta=\delta(\varepsilon)$, hogy $\|\bar{y}_0-\bar{z}_0\|\le\delta$ esetén

$$\|\bar{y}(x,x_0,\bar{y}_0)-\bar{y}(x,x_0,\bar{z}_0)\|\le\varepsilon\ . \tag{8.76}$$

A (6.39) formula szerint a (8.73) inhomogén DER-hez rendelt kezdetiérték-feladat megoldása a következőképpen írható fel:

$$\bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0) = \bar{\varphi}(x) = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0)\bar{y}_0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)\bar{f}(s)ds =$$

$$= \Phi(x)\bar{y}_0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)\bar{f}(s)ds \quad , \tag{8.77}$$

$$\bar{y}(x, x_0, \bar{z}_0) = \bar{\psi}(x) = \Phi(x)\bar{z}_0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)\bar{f}(s)ds \,. \tag{8.78}$$

A (8.77), (8.78) képletek alapján

$$\|\bar{\varphi}(x) - \bar{\psi}(x)\| = \|\Phi(x) \cdot (\bar{y}_0 - \bar{z}_0)\| \le \|\Phi(x)\| \cdot \|\bar{y}_0 - \bar{z}_0\| \,. \tag{8.79}$$

Mivel $\|\bar{y}_0 - \bar{z}_0\| \le \delta$ esetén (8.76) szerint $\|\bar{\varphi}(x) - \overline{\Psi}(x)\| \le \varepsilon$, ezért a (8.79)-ből következik, hogy $\|\Phi(x)\|$ korlátos.

$$\|\Phi(x)\| \le M \quad , \quad x \in [x_0, \infty), \tag{8.80}$$

tehát a (8.74) lineáris homogén DER stabilis.
Elégségesség. Legyen $\bar{y}_1 = \bar{y}_1(x, x_0, \bar{z}_1)$ és $\bar{y}_2 = \bar{y}_2(x, x_0, \bar{z}_2)$ a (8.73) inhomogén DER két megoldása rendre az

$$\bar{y}(x_0) = \bar{z}_1 \text{ illetve } \bar{y}(x_0) = \bar{z}_2 \tag{8.81}$$

kezdeti feltételek mellett.
Közvetlen számításokkal

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\bar{y}_1}{dx} = A(x)\bar{y}_1 + \bar{f}(x) \\ \dfrac{d\bar{y}_2}{dx} = A(x)\bar{y}_2 + \bar{f}(x) \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \frac{d(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{dx} = A(x)(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) \ , \tag{8.82}$$

adódik, hogy az $\bar{y}_1$ és $\bar{y}_2$ megoldások különbsége

$$\bar{y}_h(x) := (\bar{y}_1(x, x_0, \bar{z}_1) - \bar{y}_2(x, x_0, \bar{z}_2)) \tag{8.83}$$

a (8.74) homogén DER megoldása.
Mivel $\bar{y}_h(x)$ stabilis, ezért minden $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$, hogy $\|\bar{y}_0 - \bar{0}\| \le \delta$ esetén

$$\|\bar{y}_h(x) - \bar{0}\| \le \varepsilon \,. \tag{8.84}$$

Tehát, (8.83), (8.84) alapján, ha $\|\bar{z}_1 - \bar{z}_2\| \le \delta$, akkor

$$\|\bar{y}_1(x, x_0, \bar{z}_1) - \bar{y}_2(x, x_0, \bar{z}_2)\| \le \varepsilon \ , \tag{8.85}$$

azaz $\bar{y}_1(x, x_0, \bar{z}_1)$ (hasonlóképpen $\bar{y}_2(x, x_0, \bar{z}_2)$) a (8.73) inhomogén DER stabilis megoldása.

9. Állandó együtthatójú lineáris homogén DER stabilitása

Tegyük fel, hogy A egy $n \times n$-es állandó mátrix, és tekintsük a

$$\frac{dy}{dx} = A\,y \tag{9.1}$$

állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert. Nyilvánvaló, hogy a (9.1) a már korábban vizsgált (8.40) változó együtthatójú DER speciális esete.
Legyenek továbbra is mint (7.23), (7.24)-ben, a valós $A \in R^{n\times n}$ mátrix egymástól különböző sajátértékei (valós vagy komplex)

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, ..., \lambda_s \quad \in C, \tag{9.2}$$

melyeknek multiplicitása rendre

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, ..., \alpha_s, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_s = n \tag{9.3}$$

Feltételezzük, hogy az A mátrix Jordán-féle kanonikus alakja (lásd (7.25)-(7.29)-t)

$$J = P^{-1} \cdot A \cdot P\,, \; A = P \cdot J \cdot P^{-1} \quad , \tag{9.4}$$

ahol

$$J = diag(j_1, J_2, ..., J_m) = \begin{pmatrix} J_1 & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ 0 & J_2 & & \\ & .... & ... & \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & J_m \end{pmatrix} \quad , \tag{9.5}$$

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \in R^{n_j \times n_j} \quad , k \in \{1,2,...,s\}, \text{ j=1,2,…,m} \,,$$

$$n_1+n_2+\ldots+n_m=n= \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s \,,$$

P nemszinguláris (általában) komplex mátrix.

Ismeretes, hogy a (9.1) alakú, állandó együtthatójú homogén DER egy alapmátrixa a (7.40) formula alapján a következőképpen írható fel (lásd (7.31)-(7.33)-t):

$$\Phi(x)=P\cdot\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x}\begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \dots & \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_s x}\begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \dots & \frac{x^{n_m-1}}{(n_m-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}\cdot P^{-1} \ . \quad (9.6)$$

A (9.1) DER stabilitását úgy tudjuk eldönteni, hogy megvizsgáljuk, mikor korlátos a (9.6) alakú alapmátrix.
Nyilvánvaló, hogy a P és P^{-1} mátrixok korlátosak:

$$\|P\| \le c_1, \quad \|P^{-1}\| \le c_2, \quad c_1, c_2 > 0. \qquad (9.7)$$

Legyen a λ_k sajátérték komplex felírása:

$$\lambda_k = \operatorname{Re}\lambda_k + i\operatorname{Im}\lambda_k, \quad i^2 = -1 \ . \qquad (9.8)$$

Az ún. Euler-képlet szerint

$$e^{\lambda_k x} = e^{(\operatorname{Re}\lambda_k + i\operatorname{Im}\lambda_k)x} = e^{\operatorname{Re}\lambda_k \cdot x}\cdot e^{i\operatorname{Im}\lambda_k \cdot x} = e^{\operatorname{Re}\lambda_k}\cdot\left[\cos\operatorname{Im}\lambda_k x + i\sin\operatorname{Im}\lambda_k x\right] \ . \qquad (9.9)$$

Ismeretes, hogy

$$\left|\cos\operatorname{Im}\lambda_k x + i\sin\operatorname{Im}\lambda_k x\right| = \sqrt{\cos^2\operatorname{Im}\lambda_k x + \sin^2\operatorname{Im}\lambda_k x} = \sqrt{1} = 1, \qquad (9.10)$$

tehát

$$\left|e^{\lambda_k x}\right| = \left|e^{R\ell\lambda_k \cdot x}\right|\cdot\left|\cos\operatorname{Im}\lambda_k x + i\sin\operatorname{Im}\lambda_k x\right| = \left|e^{\operatorname{Re}\lambda_k x}\right|. \qquad (9.11)$$

Végezzük el a (9.6)-ban lévő főátló menti mátrixok normájának becslését (9.11) figyelembevételével:

$$\left\| e^{\lambda_k x} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ & 1 & \frac{x}{1!} & \cdots & \cdots \\ & & 1 & .. & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \cdots & \frac{x}{1!} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{n_j} \right\| \le \left| e^{\lambda_k x} \right| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ & 1 & \frac{x}{1!} & \cdots & \cdots \\ & & 1 & .. & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \cdots & \frac{x}{1!} \\ & & & & 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left| e^{\operatorname{Re}\lambda_k x} \right| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ & 1 & \frac{x}{1!} & \cdots & \cdots \\ & & 1 & .. & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \cdots & \frac{x}{1!} \\ & & & & 1 \end{matrix} \right\| . \qquad (9.12)$$

Ezek után a (9.12) becslésből könnyű belátni, hogy minden x-re a (9.6)-ban szereplő főátló menti blokkok akkor lesznek korlátosak, ha

$$\operatorname{Re}\lambda_k \le 0 \qquad (9.13)$$

és azokhoz a λ_k sajátértékekhez, melyekre

$$\operatorname{Re}\lambda_k = 0 \ , \ k \in \{1,2,...,s\} \qquad (9.14)$$

az *A* mátrix Jordán-alakjában csak 1-dimenziós Jordán-blokkok tartoznak (ugyanis ekkor nem szerepelnek a Jordán-blokkban x hatványai).

A (9.12) egyenlőtlenségből az is leolvasható, hogy

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0 \ , \ k \in \{1,2,...,s\} \qquad (9.15)$$

esetén

$$= \left| e^{\operatorname{Re}\lambda_k x} \right| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ & 1 & \frac{x}{1!} & \cdots & \cdots \\ & & 1 & .. & \frac{x^2}{2!} \\ & & & \cdots & \frac{x}{1!} \\ & & & & 1 \end{matrix} \right\| \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 , \qquad (9.16)$$

a (9.6)-ban szereplő Jordán-blokk akkor nem korlátos, ha

$$\operatorname{Re}\lambda_k > 0 \ , \qquad (9.17)$$

illetve

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k = 0 \tag{9.18}$$

esetén a megfelelő Jordán-blokkok dimenziója nagyobb egynél (ekkor a blokkokban jelen vannak x hatványai). Ezzel igazoltuk a következő állítást.

Tétel (Szükséges és elégséges feltételek állandó együtthatójú DER stabilitására)
A

$$\frac{dy}{dx} = Ay \tag{9.19}$$

állandó együtthatós DER tetszőleges $\bar{y} = \bar{y}(x, x_0, \bar{y}_0)$ *megoldása (az* $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$ *kezdeti feltételhez tartozó megoldása) akkor és csak akkor:*
1. Stabilis, ha az A mátrix összes egymástól különböző

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s \tag{9.20}$$

sajátértékeinek valós része nem pozitív

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k \le 0,\ k \in \{1,2,...,s\} \tag{9.21}$$

és azokhoz a sajátértékekhez, amelyekre

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k = 0 \tag{9.22}$$

csak 1-dimenziós Jordán-blokkok tartoznak az A mátrix Jordán-alakjában;
2. Aszimptotikusan stabilis, ha az A mátrix összes sajátértékeinek valós része negatív

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0,\ k \in \{1,2,...,s\} \tag{9.23}$$

3. Instabilis, ha legalább egy sajátérték valós része pozitív, illetve ha legalább egy zérus valós résszel rendelkező sajátértékhez 1-nél nagyobb méretű Jordán-blokk tartozik.

9.1 Példa. Határozzuk meg, hogy milyen c értékeknél stabilis a

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= c \cdot y_1 - y_2\end{aligned}\ ,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & -1 \end{pmatrix} \tag{9.24}$$

állandó együtthatójú DER.
Megoldás. Számoljuk ki az A mátrix sajátértékeit:

$$\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ c & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \to \lambda^2 + \lambda - c = 0 \to \begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+c} \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+c}\end{aligned}.$$

Ha c=0 , akkor

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1 < 0\ .$$

Mivel

$$rang|A - \lambda_1 E| = 1,$$

ezért $\lambda_1 = 0$ -hoz 1-dimenziós Jordán-blokk tartozik.
Tehát c=0 esetén a (9.24) DER (bármely megoldása) stabilis.
Ha c<0, akkor

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0\ ,\ \mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0,$$

ezért (9.24) aszimptotikusan stabilis.
Ha c>0, akkor

$$\operatorname{Re}\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c} > 0,$$

tehát ez esetben (9.24) instabilis.

9.1. Routh-Hurwitz kritérium a gyökök valós részének negativitására.

A fentebb bizonyított tételből tudjuk, hogy a

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = A\overline{y} \ , \ A \in R^{n\times n}$$

állandó együtthatójú DER stabilitását a

$$\det(A\text{-}\lambda E)=0 \tag{9.25}$$

karakterisztikus egyenlet gyökei határozzák meg.
A karakterisztikus egyenlet nem más, mint egy valós együtthatójú n-ed fokú polinom λ-ra nézve:

$$\det(A-\lambda E) = a_0 \cdot \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0\,. \tag{9.26}$$

A gyökök valós részének negativitása a szóban forgó gyökök közvetlen meghatározása nélkül az ún. Routh-Hurwitz kritérium segítségével dönthető el. Ezt a kritériumot bizonyítás nélkül mondjuk ki:
Tétel (Routh-Hurwitz - féle szükséges és elégséges feltételek a gyökök valós részének negativitására).
Egy n -ed fokú polinom

$$a_0 \cdot \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0 \tag{9.27}$$

összes gyökeinek valós része akkor és csak akkor lesz negatív, ha az ún. Hurwitz-féle mátrix

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & \ldots & a_n \end{bmatrix} \tag{9.28}$$

főátló menti aldeterminánsa (főminoar) mind pozitív:

$$\Delta_1 = a_1 > 0\,,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,\ \ldots,\ \Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} > 0\,,\ \text{ahol } a_j=0, \text{ ha } j>n\,. \tag{9.29}$$

9.2 **Példa**. Határozzuk meg, hogy milyen c értékekre aszimptotikusan stabilis a

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = A\overline{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix}\overline{y} \ , \ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix} \tag{9.30}$$

DER.
Megoldás. Írjuk fel az A mátrix karakterisztikus egyenletét!

$$\det(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}-\lambda & 0 & 1\\ 0 & (-1-\lambda) & 1\\ -1 & 1 & (c-1)\end{pmatrix}=0 \rightarrow \underbrace{1}_{=a_0}\cdot\lambda^3\underbrace{-(c-1)}_{=a_1}\lambda^2\underbrace{-c}_{=a_2}\lambda\underbrace{+1}_{=a_3}=0\ . \quad (9.31)$$

A (9.31) polinomhoz tartozó (9.28) Hurwitz-féle mátrix

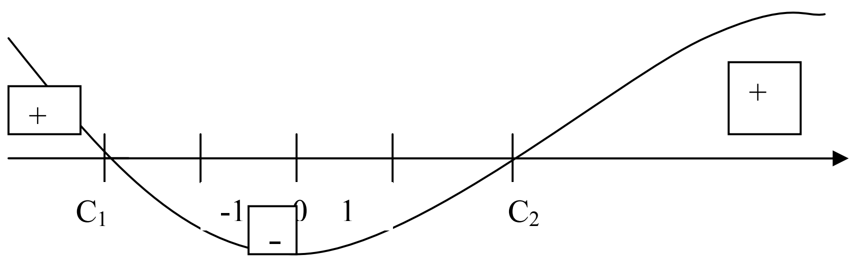
$$H=\begin{pmatrix}a_1 & a_0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ a_5 & a_4 & a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(c-1) & 1 & | & 0\\ --- & --- & | & ---\\ 1 & -c & | & -(c-1)\\ --- & --- & | & ---\\ 0 & 0 & & 1\end{pmatrix},$$

melyből

$$\Delta_1=a_1 0=-(c-1)>0\ \rightarrow \text{c<1}\ , \quad (9.32)$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-(c-1) & 1\\ 1 & -c\end{vmatrix}=c^2-c-1>0\rightarrow \begin{matrix}c^2-c-1=0\\ C_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ C_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{matrix}\ \rightarrow \begin{matrix}c<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ c>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{matrix} \quad (9.33)$$

$\Delta_3=1\cdot\Delta_2$, (lásd a 9.1 ábrát)



9.1 ábra

Tehát (9.32), (9.33) –ból következik, hogy (9.30) aszimptotikusan stabilis (a karakterisztikus egywenlet gyökeinek valós része mind negatív), ha

$$c<\frac{1-\sqrt{5}}{2}=C_1. \quad (9.34)$$

10. Egyes gazdasági modellek stabilitási vizsgálata

10.1 Philips stabilizációs modellje zárt makrogazdaságra

Emlékeztetünk, hogy az 5.2 alfejezetben már ismertettük Domar klasszikus gazdasági növekedési modelljét (1954). A termelés dinamikáját az (5.5) alakú

$$\frac{dY(t)}{dt} = a\ s\ Y(t),\ a > 0,\ 0 \le s \le 1 \qquad (10.1)$$

állandó együtthatójú elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet írja le.
A (10.1) alakú, DE általános megoldását a (3.22) formula alapján írhatjuk fel:

$$Y_á(t) = c \cdot e^{\int a \cdot s dt} = c \cdot e^{a\,s\,t},\ c \in R, \qquad (10.2)$$

ahol $a \cdot s = \gamma$ a növekedési ütem.
Ha a t=0 időpontban adott az $Y(0)=Y_0$ termelési mutató, akkor a (10.1) differenciálegyenlethez rendelt

$$\begin{aligned} &\frac{dY}{dt} = a \cdot s \cdot Y(t) \\ &Y(0) = Y_0 \end{aligned} \qquad (10.3)$$

kezdetiérték-feladathoz jutunk, melynek megoldása (3.24) szerint

$$Y(t) = Y_0 \cdot e^{a\,s\,t}. \qquad (10.4)$$

A (10.4) formulából leolvasható, hogy a (10.1) DE-tel leírt klasszikus növekedési modell pályája exponenciális.
Az 5.2 alfejezetben leírt Solow-féle neoklasszikus növekedési modell már pontosabban veszi figyelembe a termelési tényezők közötti összefüggéseket.
Nyilvánvaló, hogy a Solow-féle közelítés már egy bonyolultabb (5.12) alakú elsőrendű nemlineáris differenciálegyenlethez vezet az egy főre jutó k(t) tőkére vonatkozóan:

$$\frac{dk(t)}{dt} = S \cdot f(k) - Y \cdot k \qquad (10.5)$$

Azonban, ezek a szóban forgó modellek figyelmen kívül hagyják a gazdasági folyamatokba való lehetséges külső beavatkozásokat. Például, a kormányzat aktív gazdasági politikával stabilizálhatja a bizonyos üzleti ingadozásokat, amelyek a magángazdaság növekedéséből keletkeznek.
Most ismertetjük a Phillips-féle (1954) kormányzati stabilizációs modellt.
Legyen $Y(t)$ a teljes termelésnek (kibocsátásnak), és $D(t)$ az összkeresletnek a megfelelő egyensúlyi értékektől való eltérése a t időpontban.
Így az

$$Y=0,\quad D=0 \qquad (10.6)$$

az egyensúlyi helyzet.
Ismert, hogy a termelés változása a kereslet és a termelés különbségének (a túlkereslettel) arányos:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha \cdot (D(t) - Y(t)), \qquad (10.7)$$

ahol $\alpha > 0$.
A kereslet-kínálat elméletében a teljes termelés és összkereslet között az alábbi összefüggés érvényes:

$$D(t) = (1 - l) \cdot Y(t), \qquad (10.8)$$

ahol $0 \le l \le 1$ és $(1-l)$ az ún. költési hajlandóság.
A gyakorlatban, azonban, az összkeresletben mindig van egy *u=const* állandó zavarás (szállítási problémák, selejt, nincs elég vásárlóerő, stb.), így (10.8) helyett

$$D(t) = (1-l)Y(t) - u\,. \tag{10.9}$$

Ha (10.9)-t behelyettesítjük (10.7)-be, akkor

$$\frac{dY(t)}{dt} = \alpha \cdot lY(t) - \alpha u - \alpha Y(t) = -\alpha l\, Y(t) - \alpha u\,,$$

azaz a

$$\frac{dY(t)}{dt}\alpha + l\,Y(t) = -\alpha u\,, \qquad \alpha, l, u = const \tag{10.10}$$

elsőrendű lineáris inhomogén DE-t kapjuk.
A megfelelő homogén DE általános megoldása (3.22) szerint

$$Y_{h.á}(t) = c \cdot e^{-\int \alpha \ell\, dt} = c \cdot e^{-\alpha \ell t}, c \in R\,. \tag{10.11}$$

Az állandók variálásának módszerével (lásd pl. (3.27)-(3.29)-et, vagy (3.36)-ot) keressük a (10.10) inhomogén DE egy partikuláris megoldását $0 \le l \le 1$ esetén.

$$Y_{h.á} = c \cdot e^{-\alpha \cdot \ell t} \to Y = Y_{i.p} = c(t) \cdot e^{-\alpha \ell t} \to \frac{dY}{dt} = \frac{dc(t)}{dt} \cdot e^{-\alpha l t} + c(t)(-\alpha l)e^{-\alpha \ell t} \to$$

$$\begin{array}{l} \textit{behelyettesítés} \quad \textit{az} \\ \textit{in}\,\mathrm{hom}\,\textit{ogén} \quad DE - be \end{array} \to \frac{dc(t)}{dt} \cdot e^{-\alpha l t} + c(t)(-\alpha l)e^{-\alpha l t} + \alpha l\, c(t) \cdot e^{-\alpha \ell t} = -\alpha u \to$$

$$\to \frac{dc(t)}{dt} \cdot e^{-\alpha \ell t} = -\alpha u \to \frac{dc}{dt} = -\alpha u\, e^{\alpha l t} \to c(t) = \frac{-\alpha u}{\alpha \ell} \cdot e^{\alpha \ell t} \to$$

$$Y = Y_{i.p}(t) = \left[-\frac{u}{\ell} e^{\alpha l t}\right] \cdot e^{-\alpha l t} = -\frac{u}{l}\,.$$

Tehát a (10.10) inhomogén DE általános megoldása (3.32) alapján

$$Y(t) = Y_{i.á}(t) = Y_{h.á}(t) + Y_{i.p}(t) = c \cdot e^{-\alpha \ell t} - \frac{u}{\ell}\,,$$

melyből

$$\lim_{t \to \infty} Y(t) = \lim_{t \to \infty}\left[c \cdot e^{-\alpha \ell t} - \frac{u}{\ell}\right] = \underbrace{\lim_{t \to \infty} c \cdot e^{-\alpha l t}}_{=0} - \lim_{t \to \infty} \frac{u}{l}\,,$$

$$\lim_{t \to \infty} Y(t) = -\frac{u}{l}\,. \tag{10.12}$$

A (10.12) formula azt fejezi ki, hogy a gazdaság hosszabb távon alulteljesít.
Ha (10.10)-ben $l = 0$, akkor

$$\frac{dY(t)}{dt} = -\alpha\, u \to dY(t) = -\alpha u\, dt \to \int \quad \to Y(t) = -\alpha u t\,.$$

Az

$$Y(t) = -\alpha u t \tag{10.13}$$

egyenlőség azt fejezi ki, hogy hosszabb távon a termelés és a gazdaság összeomlik.

Az alulteljesítést és az összeomlást a kormány úgy akadályozza meg, hogy beavatkozik a keresletbe (például a fenti problémák esetén útépítéssel, különböző fejlesztések támogatásával, szociális támogatással, stb.)
Ez a beavatkozás a (10.9) keresletben

$$D(t)=(1-l)Y(t)-u+G(t) \tag{10.14}$$

formában jelenik meg, ahol *G(t)* egy alkalmas függvény.
A teljes termelés ismeretében a kormány a gazdasági folyamatokba többféle módon próbálhat beavatkozni, de ezt csak különböző ösztönző, irányító intézkedéseken keresztül érvényesítheti, és nem közvetlenül. Ezért az ideális *G*(t)* beavatkozást a tényleges *G(t)* beavatkozás csak közelíti. A beavatkozás változását a

$$\frac{dG(t)}{dt}=\beta\cdot(G^*(t)-G(t)) \tag{10.15}$$

differenciálegyenlettel jellemezzük, ahol a $\beta > 0$ állandó azt fejezi ki, hogy a kormányzat milyen gyorsan reagál a kívánt *G*(t)* és a tényleges *G(t)* közötti eltérésre.

10.2 Philips három típusú stabilizációs eljárása

Philips háromféle stabilizálási módot különböztet meg:

- **1. Arányos stabilizálási politika esetén**

$$G^*(t)=-f_p\cdot Y(t),\ f_p>0. \tag{10.16}$$

Ekkor a kormány (10.14) keresletet a termelési feszültséggel ellentétes irányban és azzal arányosan változtatja meg.
Így a kormány a kívánt optimális helyzettől (egyensúlyi Y=0 helyzettől) való eltérésre reagál a kereslet befolyásolásával annak reményében, hogy ez kedvezően hat vissza a termelésre.

- **2. Derivatív stabilizálási politika esetén**

$$G^*(t)=-f_d\cdot\frac{dY(t)}{dt}\ ,\ f_d>0. \tag{10.17}$$

Ez esetben a kormány a rossz irányú változást azzal próbálja megelőzni, hogy a termelési feszültség változási sebességével ellentétes irányban és vele arányosan változtatja meg (10.14)-ben a keresletet.

- **3. Integrális stabilizálási politika esetén**

$$G^*(t)=-f_i\cdot\int_0^t Y(s)ds\ ,\ f_i>0. \tag{10.18}$$

Ekkor a kormány a beavatkozáskor figyelembe veszi a termelés egész múltját, azaz a korábbi időszak termelési átlaga szerint próbál beavatkozni a gazdaságba.
Mi is történik matematikailag az egyes stabilizálási politikák esetén?
A (10.7), (10.14), (10.15) összefüggésekből kapjuk, hogy

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2}=\alpha\left(\frac{dD(t)}{dt}-\frac{dY(t)}{dt}\right),$$

$$\frac{dD(t)}{dt}=(1-l)\frac{dY(t)}{dt}+\frac{dG(t)}{dt}\ ,$$

$$\beta\frac{dY}{dt}=\alpha\beta(\Delta(t)-Y(t))\ ,$$

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+\beta\frac{dY(t)}{dt}=\alpha\left(\frac{dD(t)}{dt}-\frac{dY(t)}{dt}\right)+\alpha\beta(D(t)-Y(t))=$$
$$=\alpha\cdot\left[\frac{d\Delta(t)}{dt}+\beta\Delta(t)\right]-\alpha\cdot\left[\frac{dY(t)}{dt}+\beta Y(t)\right]=$$
$$=\alpha\left[(1-l)\frac{dY(t)}{dt}+\frac{dG(t)}{dt}+\beta(1-l)Y(t)+\beta G(t)-\beta u\right]-\alpha\left[\frac{dY(t)}{dt}+\beta Y(t)\right]=$$
$$=\alpha l\frac{dY(t)}{dt}+\alpha\beta\left(G^*(t)-G(t)\right)+\alpha\beta Y(t)-\alpha\beta l Y(t)+\alpha\beta G(t)-\alpha\beta u-\alpha\beta Y(t)=$$
$$=-\alpha l\frac{dY(t)}{dt}-\alpha\beta l Y(t)+\alpha\beta\, G^*(t)-\alpha\beta u. \tag{10.19}$$

Tehát (10.19) átrendezésével

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+(\beta+\alpha l)\frac{dY(t)}{dt}+\alpha\beta l Y(t)-\alpha\beta G^*(t)=-\alpha\beta u\ . \tag{10.20}$$

A (10.16) arányos stabilizálási beavatkozás esetén a (10.20) egyenlet a

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+(\beta+\alpha l)\frac{dY}{dt}+\alpha\beta(l+f_p)Y=-\alpha\beta u \tag{10.21}$$

alakú lesz, amely egy állandó együtthatós , másodrendű lineáris differenciálegyenlet.
Oldjuk meg a (10.21)-hez tartozó homogén DE-t a 4.1 alfejezetben ismertetett módszer szerint.
A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2+(\beta+\alpha l)\cdot\lambda+\alpha\beta(l+f_p)=0, \tag{10.22}$$

melynek gyökei

$$\lambda_{1,2}=-\frac{(\beta+\alpha l)}{2}\pm\sqrt{\frac{(\beta+\alpha l)^2}{4}-\alpha\beta(l+f_p)}. \tag{10.23}$$

Mivel $(\beta+\alpha l)>0$ és $\alpha\beta(l+f_p)>0$, ezért a λ_1 és λ_2 gyökök valós része mindig negatív lesz.
Valóban, ha

$0<\alpha\beta(l+f_p)<\dfrac{(\beta+\alpha l)^2}{4}$, akkor (10.22)-nek két valós negatív gyöke van.

$$\lambda_1:=-\gamma_1<0,\quad \lambda_2:=-\gamma_2<0.$$

Ekkor (4.15) alapján

$$Y_{h.á}(t)=c_1\cdot e^{-\gamma_1 t}+c_2\cdot e^{-\gamma_2 t}. \tag{10.24}$$

Ha $\alpha\beta(l+f_p)=\dfrac{(\beta+\alpha l)^2}{4}$, akkor (10.22)-nek egy kétszeres negatív gyöke van:

$$\lambda_1=\lambda_2=-\frac{(\beta+\alpha l)}{2}:=\gamma_3<0.$$

Ez esetben (4.22) szerint

$$Y_{h.á}(t)=c_1\cdot \ell^{\gamma_3 t}+c_2\cdot t\,\ell^{\gamma_3 t},\ \gamma_3<0\ . \tag{10.25}$$

Ha $$\alpha\beta\left(l+f_p\right) > \frac{(\beta+\alpha l)^2}{4},$$
akkor (10.22)-nek két komplex konjugált gyöke van.
$$\lambda_1 = -\frac{(\beta+\alpha l)}{2} + i\gamma_3, \quad \lambda_2 = -\frac{(\beta+\alpha l)}{2} - i\gamma_3,$$
és ekkor
$$Y_{h.á}(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{(\beta+\alpha l)}{2}t} \cos\gamma_3 t + c_2 \cdot e^{-\frac{(\beta+\alpha l)}{2}t} \sin\gamma_3 t\,. \tag{10.26}$$
Így a (10.24), (10.25), (10.26) formulákból azt kapjuk, hogy a (10.21) tartozó homogén DE általános megoldása nullához tart, ha $t \to \infty$:
$$\lim_{t\to\infty} Y_{h.á}(t) = 0 \tag{10.27}$$
A (10.21) inhomogén DE egy partikuláris megoldását a (4.40) alakú DE-re ismertetett próbafüggvény-módszerrel keressük.
Mivel a (10.21) inhomogén DE jobb oldalon álló zavarófüggvénye egy konstans és nulla nem gyöke a (10.22) karakterisztikus polinomnak, így (4.41) alapján a partikuláris megoldás alakja
$$Y(t) = Y_{i.p}(t) = B_1\ ,\ \ B_1 = const = ? \tag{10.28}$$
Ekkor $Y(t) = Y''(t) = 0$. A (10.28) próbafüggvényt és deriváltjait behelyettesítve a (10.21) inhomogén DE-be, az együtthatók összehasonlításával:
$$\alpha\beta\left(l+f_p\right)\cdot B_1 = -\alpha\beta u \;\to\; B_1 = \frac{-u}{\left(l+f_p\right)}\ . \tag{10.29}$$
Tehát a (10.21) inhomogén DE egy partikuláris megoldása:
$$Y_{i.p}(t) = -\frac{u}{\left(l+f_p\right)}\ . \tag{10.30}$$
Így a (10.21) inhomogén DE általános megoldása (4.32) szerint
$$Y_{i.á}(t) = Y_{h.á}(t) + \frac{u}{l} Y_{i.p}(t) = Y_{h.á}(t) - \frac{u}{\left(l+f_p\right)}, \tag{10.31}$$
melyből
$$\lim_{t\to\infty} Y_{i.á}(t) = -\frac{u}{\left(l+f_p\right)}. \tag{10.32}$$
A (10.32) formulából leolvasható, hogy a gazdaság minél kevésbé teljesítsen alul, azaz, hogy *Y(t)* nullához legyen közel, az f_p konstansainak (10.16)-ban nagynak kell lennie.
Viszont, ha f_p nagy, akkor a (10.22) karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa negatív:
$$\frac{(\beta+\alpha l)^2}{4} - \alpha\beta\left(l+f_p\right) < 0, \tag{10.33}$$
azaz (10.22)-nek két komplex konjugált gyöke van (melyeknek valós része negatív), és ekkor a megfelelő homogén DE általános megoldása, tehát (10.21) minden megoldása (10.26), (10.31) szerint mind oszcillál.
Ez a gyakorlatban nem kívánatos, hiszen ekkor a gazdaság termelése és a kereslet túl gyorsan változik, és ilyenkor a gazdasági folyamat szereplői nem tudnak hozzá alkalmazkodni.

Most pedig alkalmazzuk a (10.16) arányos-, és a (10.17) derivatív beavatkozást egyszerre, azaz legyen

$$G^*(t) = -f_p\, Y(t) - f_d \frac{dY((t)}{dt}, f_p > 0, \quad f_d > 0\,. \tag{10.34}$$

Ekkor a (10.20)-ból a

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)\frac{dY}{dt} + \alpha\beta(l + f_p)Y = -\alpha\beta u \tag{10.35}$$

lineáris inhomogén másodrendű állandó együtthatójú differenciálegyenletet kapjuk. A próbafüggvény módszer alkalmazásával, megismételjük a (10.28), (10.29) számításokat, azt kapjuk, hogy a (10.35) inhomogén DE egy partikuláris megoldása ismét

$$Y_{i.p}(t) = -\frac{u}{(l + f_p)}. \tag{10.36}$$

Most pedig keressük a (10.35)-höz tartozó

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)\frac{dY}{dt} + \alpha\beta(l + f_p)Y = 0 \tag{10.37}$$

homogén DE általános megoldását.
A (10.37) homogén DE karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)\cdot\lambda + \alpha\beta(l + f_p) = 0\,, \tag{10.38}$$

melynek gyökei

$$\lambda_{1,2} = -\frac{(\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\beta + \alpha\ell + \alpha\beta f_d)^2}{4} - \alpha\beta(l + f_p)}. \tag{10.39}$$

Mivel

$$\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d > 0, \quad \alpha\beta(l + f_p) > 0 \tag{10.40}$$

ezért a λ_1 és λ_2 gyökök valós része mindig negatív:

$$\mathrm{Re}\lambda_1 < 0, \quad \mathrm{Re}\lambda_2 < 0\,. \tag{10.41}$$

Ha (10.39)-ben a

$$\Delta = \frac{(\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)^2}{4} - \alpha\beta(l + f_p) > 0\,, \tag{10.42}$$

diszkrimináns pozitív, akkor (10.38)-nak két valós negatív gyöke van:

$$\lambda_1 := -\gamma_1 < 0, \quad \lambda_2 := -\gamma_2 < 0\ .$$

Ez esetben (4.15) szerint a homogén DE általános megoldása

$$Y_{h.á}(t) = c_1 \cdot e^{-\gamma_1 t} + c_2 \cdot \ell^{e-\gamma_2 t}\,, \tag{10.43}$$

és

$$Y(t) = Y_{i.á}(t) = c_1 \cdot e^{-\gamma_1 t} + c_2 \cdot e^{-\gamma_2 t} - \frac{u}{(l + f_p)} \quad . \tag{10.44}$$

Tehát ekkor

$$\lim_{t\to\infty} Y_{i.á}(t) = -\frac{u}{(l + f_p)}, \tag{10.45}$$

azaz a (10.35) inhomogén DE megoldásai nem oszcillálva tartanak

$-\frac{u}{(l+f_p)}$-hez, ha $t \to \infty$.

Nyilvánvaló, ha f_p nagy, akkor Y(t) közel van 0-hoz, és ha f_d elég nagy, akkor a (10.42) diszkrimináns pozitív, és az előbbiek szerint nincs oszcilláló megoldása (10.35)-nek. Oszcilláló megoldása csak akkor lehet, ha a (10.42) diszkrimináns negatív. Ekkor az oszcilláló megoldás hasonlítana a (10.26)-os alakra.
Ha a kormány a (10.18) integrális stabilizációs politikát választaná, akkor (10.20)-ból a

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+(\beta+\alpha l)\frac{dY}{dt}+\alpha\beta lY+\alpha\beta f_i\int_0^t Y(s)dp=-\alpha\beta u \tag{10.46}$$

egyenletet (integro-differenciálegyenletet) kapjuk, amelyet differenciálva a

$$\frac{d^3Y}{dt^3}+(\beta+\alpha l)\frac{d^2Y}{dt^2}+\alpha\beta l\frac{dY}{dt}+\alpha\beta f_i Y=0 \tag{10.47}$$

harmadrendű, állandó együtthatós lineáris homogén egyenlet adódik.
A (10.47) harmadrendű DE nem minden megoldása teljesíti az eredeti (10.46) egyenletet, hanem csak azok, amelyekre a *t=0* pontban:

$$\frac{d^2Y(0)}{dt^2}+(\beta+\alpha l)\frac{dY(0)}{dt}+\alpha\beta\ell Y(0)=-\alpha\beta u. \tag{10.48}$$

Vizsgáljuk a (10.41)-hez tartó karakterisztikus egyenlet

$$\underbrace{1\cdot\lambda^3}_{=a_0}+\underbrace{(\beta+\alpha l)\cdot\lambda^2}_{=a_1}+\underbrace{\alpha\beta l\lambda}_{=a_2}+\underbrace{\alpha\beta f_i}_{=a_3}=0 \tag{10.49}$$

karakterisztikus egyenlet gyökei a (9.27)-(9.29)-ben összefoglalt Routh-Hurwitz – kritérium segítségével. Ekkor a (9.28) Hurwitz-féle mátrix

$$H=\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ a_5 & a_4 & a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\beta+\alpha l) & 1 & 0\\ \alpha\beta f_i & \alpha\beta l & (\beta+\alpha l)\\ 0 & 0 & \alpha\beta f_i\end{bmatrix}. \tag{10.50}$$

Lássuk, mikor lesz a (10.50) mátrix minden főminorra pozitív:

$\Delta_1=\beta+\alpha l>0$ (mindig pozitív)

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\beta+\alpha l & 1\\ \alpha\beta f_i & \alpha\beta l\end{vmatrix}=\alpha\beta l(\beta+\alpha l)-\alpha\beta f_i>0 \to l(\beta+\alpha l)>f_i\ , \tag{10.51}$$

$\Delta_3=\Delta_2\cdot\alpha\beta f_i$.

Így a

$$(\beta+\alpha l)l>f_i \tag{10.52}$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie ahhoz, hogy a karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív legyen. Ez azt jelenti, hogy az integrális beavatkozás erejét szabályozó f_i konstans (10.18)-ban nem lehet túl nagy.
Tehát, ha (10.52) teljesül, akkor a (10.47) homogén DE nulla megoldása aszimptotikusan stabilis és ezzel a gazdaság is aszimptotikusan stabil marad.
Végezetül kombináljuk mind a háromféle beavatkozást.
Ekkor a (10.16), (10.17), és (10.18) alapján

$$G^*(t) = -f_p\, Y(t) - f_d \frac{dY(t)}{dt} - f_i \int_0^t Y(s)dp\,. \qquad (10.53)$$

Ha (10.53)-at behelyettesítjük (10.20)-ba, akkor a

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + (\beta + \alpha l)\frac{dY}{dt} + \alpha\beta l Y + \alpha\beta f_p Y + \alpha\beta f_d \frac{dY}{dt} + \alpha\beta f_i \int_0^t Y(s)dp = -\alpha\beta u\,,$$

vagy

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)\frac{dY}{dt} + \alpha\beta(l + f_p)Y + \alpha\beta f_i \int_0^t Y(s)dp = -\alpha\beta u \qquad (10.54)$$

egyenletet nyerjük, melyből differenciálás után a

$$\frac{d^3Y}{dt^3} + (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)\frac{d^2Y}{dt^2} + \alpha\beta(l + f_p)\frac{dY}{dt} + \alpha\beta f_i Y = 0 \qquad (10.55)$$

harmadrendű állandó együtthatós lineáris homogén differenciálegyenletet nyerjük.
A (10.55) DE karakterisztikus egyenlete

$$\underbrace{1\cdot\lambda^3}_{=a_0} + \underbrace{(\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)\lambda^2}_{=a_1} + \underbrace{\alpha\beta(l + f_p)\lambda}_{=a_2} + \underbrace{\alpha\beta f_i}_{=a_3} = 0 \qquad (10.56)$$

melynek gyökeit a Routh-Hutwitz – kritérium felhasználásával vizsgáljuk.
A (10.56)-os polinomba felírt Hurwitz-féle mátrix

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d) & 1 & 0 \\ \alpha\beta f_i & \alpha\beta(l + f_p) & (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d) \\ 0 & 0 & \alpha\beta f_i \end{bmatrix}, \qquad (10.57)$$

melyből

$$\Delta_1 = \beta + \alpha l + \alpha\beta f_d\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta + \alpha l + \alpha\beta f_d & 1 \\ \alpha\beta f_i & \alpha\beta(l + f_p) \end{vmatrix} = \alpha\beta(l + f_p)(\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d) - \alpha\beta f_i > 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)(l + f_p) > f_i\,.$$

Tehát a

$$(\beta + \alpha l + \alpha\beta f_d)(l + f_p) > f_i \qquad (10.58)$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie ahhoz, hogy a (10.56) karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív legyen, azaz hogy a gazdaság aszimptotikusan stabil maradjon. A gazdaságba való beavatkozás során ez azt jelenti, hogy (10.53)-ban vegyük f_p –t elég nagyra, hogy (10.32) alapján a gazdaság ne teljesítsen nagyon alul. Vegyük f_d –t is elég nagyra, hogy a (10.42) diszkrimináns pozitív legyen, és hogy ne legyen komplex λ_1, és λ_2 gyökök, azaz hogy ne forduljon elő (10.26) típusú oszcilláló megoldás és a gazdaság ne oszcilláljon. Ezen kívül legyen f_i elég kicsi ahhoz, hogy (10.58) teljesüljön, és hogy a gazdaság aszimptotikusan stabilis maradjon.

11. A Leontief-féle dinamikus input-output modell

Az 1.1 alfejezetben már szó esett a Leontief-féle statikus input-output termelési modellről, melyben a gazdasági folyamatot leíró mennyiségek csak egy időpontban vagy egy időszakra vonatkozó adatként szerepelnek. Ekkor a gazdasági folyamatokról mintha bizonyos időpontokban „fényképfelvételeket” készítenénk.
Most egy másik leírási módról lesz szó, amikor a folyamatot nem diszkrét időpontokban, hanem folyamatosan figyeljük, azaz a gazdasági folyamatról megpróbálunk „mozgófilmet” készíteni.
Tegyük fel, hogy a gazdaság n szektorból áll és mindegyik szektor egyféle árut állít elő. Feltételezzük, hogy az i-edik termék a_{ij}-ed része szükséges egységnyi j-edik áru előállításához és az i-edik áru b_{ij}-ed része szükséges a j-edik szektorban egy egységnyi termelékenység növekedéséhez. Nyilvánvaló, hogy

$$0 \le a_{ij} \le 1,\ 0 \le b_{ij} \le 1 \quad . \tag{11.1}$$

Jelölje az $y(t) \in R^n$ vektor a végső felhasználási célt, $x_i(t)$ az i-edik áru mennyiségét a t időpontban. Gazdasági megfontolásokból az i-edik áruból annyit kell termelni, hogy az:

1. kielégítse az összes áru előállításához az x_i-ből szükséges közbülső keresletet, ami a következőképpen fejezhető ki:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\,; \tag{11.2}$$
2. Fedezze azt a szükségletet, amellyel az i-edik szektor hozzájárul az összes szektor termelékenysége növeléséhez, ami
$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \frac{dx_j(t)}{dt}\,; \tag{11.3}$$

3.Biztosítsa az $y_i(t\,)$ végső felhasználási szintet.

Tehát minden t időpontban az $x_i{=}x_i(t)$ függvényekre teljesülnie kell az alábbi mérlegnek:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \frac{dx_j(t)}{dt} + y_i(t),\ i \in \{1,2,\ldots,n\} \tag{11.4}$$

Vezessük be az $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ $n \times n$ mátrixokat,
az $\bar{x}(t) = col\ (x_1(t),\ldots,\ x_n(t))$, $\bar{y}(t) = col(y_1(t),\ldots,y_n(t))$ oszlopvektorokat , ekkor (11.4)-ből, az

$$A\bar{x}(t) + B\frac{d\bar{x}(t)}{dt} + \bar{y}(t) = \bar{x}(t) \tag{11.5}$$

lineáris differenciálegyenlet-rendszert kapjuk, amelyből

$$B\frac{d\bar{x}(t)}{dt} + (A - I)\bar{x}(t) = -\bar{y}(t), \tag{11.6}$$

és ha feltesszük, hogy

$$\det B \ne 0, \tag{11.7}$$

akkor a (11.6)-os rendszert, szokásos (6.2), ún. normálalakban tudjuk felírni:

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt}+B^{-1}(A-I)\bar{x}(t)=-B^{-1}\bar{y}(t), \tag{11.8}$$

ahol I $n\times n$ egységmátrix.
A $B=0$ esetben minden t időpontban az (1.7) tipusú

$$(I-A)\,\bar{x}(t)=\bar{y}(t) \tag{11.9}$$

algebrai egyenletrendszer adódik.
A modell akkor tekinthető jónak, ha a (11.9) egyenletnek minden adott nemnegatív komponensű y-hoz van x megoldása, azaz ha

$$\det(I-A)\neq 0 \tag{11.10}$$

Ekkor (11.9)-ből

$$\bar{x}(t)=(I-A)^{-1}\cdot\bar{y}(t)\quad . \tag{11.11}$$

További természetes követelmény az, hogy pozitív y_i-hez pozitív x_i tartozzon, azaz az

$$(I-A)^{-1} \tag{11.12}$$

mátrix minden komponense legyen pozitív

$$(I-A)^{-1}>\bar{0} \tag{11.13}$$

a $B\neq 0$ esetben is feltesszük a (11.10), (11.13) feltételeket.
Tekintsük a (11.8) alakú

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt}=B^{-1}(A-I)\bar{x}(t)-B^{-1}\,\bar{y}(t) \tag{11.14}$$

állandó együtthatós lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszert, amelyet **Leontief-féle dinamikus differenciálegyenletes input-output modellnek szoktak nevezni**.
Ismeretes (7.20)-ból, hogy a megfelelő

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt}=B^{-1}(I-A)\bar{x}(t) \tag{11.15}$$

homogén differenciálegyenlet-rendszer egy $\Phi(t)$ alapmátrixa:

$$\Phi(t)=e^{B^{-1}(I-A)t}\quad . \tag{11.16}$$

Mivel (11.14) a (6.30) differenciálegyenlet-rendszer speciális esete, ezért a (6.37) formula szerint a (11.14) inhomogén DER általános megoldása:

$$\bar{x}(t)=\bar{x}_{i.á.}(t)=\Phi(t)\cdot\bar{c}+\Phi(t)\int_0^t\phi^{-1}(s)\cdot\left(-B^{-1}\bar{y}(s)\right)ds=$$

$$=e^{B^{-1}(I-A)t}\cdot\bar{c}-\int_0^t e^{B^{-1}(I-A)t}\cdot e^{-B^{-1}(I-A)s}\cdot B^{-1}\,\bar{y}(s)ds=$$

$$=e^{B^{-1}(I-A)t}\cdot\bar{c}-B^{-1}\cdot\int_0^t e^{B^{-1}(I-A)(t-s)}\cdot\bar{y}(s)ds, \tag{11.17}$$

alakú, ahol $\bar{c}\in R^n$ tetszőleges állandó vektor.
A továbbiakban a (11.14) Leontief-féle dinamikus differenciálegyenletes input-output modell tulajdonságait illusztráljuk két szektorból álló gazdaság esetén, azaz amikor $n=2$.

11.1 Kétszektoros Leontief-féle dinamikus modell vizsgálata

Ha a gazdaság mindössze kétszektoros, akkor a (11.5) alakú Leontief-féle input-output modell következő, két egyenletből álló, állandó együtthatójú differenciálegyenlet-rendszerbe megy át:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + b_{11} \dfrac{dx_1}{dt} + b_{12} \dfrac{dx_2}{dt} + y_1(t), \\ x_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + b_{21} \dfrac{dx_1}{dt} + b_{22} \dfrac{dx_2}{dt} + y_2(t) \end{cases} \qquad (11.18)$$

melynek (11.14) normál alakja

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot (I - A) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \text{ ahol}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

A (11.18) inhomogén DER-hez tartozó

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot (I - A) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (11.19)$$

homogén DER karakterisztikus egyenlete

$$\det\left[B^{-1}(I - A) - \lambda \cdot I\right] = 0,$$

melyet a következőképpen írunk át:

$$\det\left[B^{-1}(I - A) - \lambda \cdot I\right] = \det\left[B^{-1} \cdot (I - A - \lambda B)\right] = \det B^{-1} \cdot \det(I - A - \lambda B) = 0. \qquad (11.20)$$

Mivel (11.7) szerint $\det B \neq 0$, $\det B^{-1} \neq 0$, ezért $\det B^{-1} \neq 0$-val osztva (11.20)-ból kapjuk, hogy

$$\det[I - A - \lambda B] = 0, \qquad (11.21)$$

azaz

$$\det\begin{bmatrix} 1 - a_{11} - \lambda b_{11} & -a_{12} - \lambda b_{12} \\ -a_{21} - \lambda b_{21} & 1 - a_{22} - \lambda b_{22} \end{bmatrix} = 0. \qquad (11.22)$$

Ha kifejtjük a (11.12) egyenletet, akkor a

$$\begin{aligned} &(b_{11}\, b_{12} - b_{12}\, b_{21})\lambda^2 - [(1 - a_{11})b_{22} + (1 - a_{22})b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{12}\, b_{12}]\lambda + \\ &+ [(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}\, a_{21}] = 0 \quad , \end{aligned} \qquad (11.23)$$

azaz a

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

másodrendű algebrai egyenletet kapjuk.
A (11.23) egyenlet diszkriminánsa

$$
\begin{aligned}
\Delta = b^2 - 4ac = &\left[(1-a_{11})b_{22} + (1-a_{22})b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12}\right]^2 - \\
&- 4\cdot(b_{11}b_{12} - b_{12}b_{21})\left[(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}\right] = \\
&= \left[(1-a_{11})b_{22} - (1-a_{22})b_{11} + a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}\right]^2 + \\
&+ 4\left[(1-a_{11})b_{22}a_{21}b_{12} + (1-a_{22})b_{11}a_{12}b_{21} + \right.\\
&\left. + b_{22}b_{11}a_{12}a_{21} + b_{12}b_{21}(1-a_{11})(1-a_{22})\right]
\end{aligned}
\tag{11.24}
$$

és a (11.10) feltétel itt azt jelenti, hogy

$$
\det(I-A) = \det\begin{pmatrix} 1-a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1-a_{22} \end{pmatrix} = (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21} \neq 0 \ . \tag{11.25}
$$

Mivel

$$
(I-A)^{-1} = \frac{1}{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} 1-a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{11.26}
$$

ahol $0 \le a_{ij} \le 1$ és (11.13) alapján $(I-A)^{-1}$ minden eleme pozitív, ezért

$$
1-a_{11}>0,\quad 1-a_{22}>0,\quad a_{12}>0,\quad a_{21}>0,\ (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0 \ . \tag{11.27}
$$

Továbbá (11.27), $0 \le b_{ij} \le 1$ és $\det B = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \neq 0$ alapján (11.24)-ből következik, hogy

$$
\Delta > 0 \ . \tag{11.28}
$$

Ez azt jelenti, hogy a (11.23) másodfokú algebrai egyenletnek két különböző valós megoldása van

$$
\lambda_{1,2} = \frac{\left[(1-a_{11})b_{22} + (1-a_{22})\,b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12}\right] \pm \sqrt{\Delta}}{2\,(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})} \ . \tag{11.29}
$$

Könnyű észrevenni, hogy (11.23)-ban λ együtthatója negatív, a konstans tag viszont pozitív. Ha

$$
b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0\,, \tag{11.30}
$$

akkor (11.23)-ban λ együtthatójának abszolút értéke nagyobb, mint $\sqrt{\Delta}$, és így a (11.23) egyenlet mindkét (11.24) alakú gyöke pozitív

$$
\lambda_1 > 0\,,\ \lambda_2 > 0\,. \tag{11.31}
$$

Ha

$$
b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} < 0\,, \tag{11.32}
$$

akkor $\sqrt{\Delta}$ nagyobb, mint λ együtthatójának abszolút értéke, és így (11.23) egyik (11.24) alakú gyöke pozitív, a másik negatív lesz:

$$
\lambda_1 > 0\,,\ \lambda_2 < 0 \ . \tag{11.33}
$$

Tehát tudjuk, hogy

$$
\lambda_1 > 0\,,\ \lambda_2 > 0\,, \text{ ha } b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0\,, \tag{11.34}
$$

$$
\lambda_1 > 0\,,\ \lambda_2 < 0\,, \text{ ha } b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} < 0 \ . \tag{11.35}
$$

A 6.36 formulákból ismeretes, hogy a (11.18) inhomogén DER általános megoldása a megfelelő (11.19) homogén DER általános megoldása és a (11.18) inhomogén DER egy partikuláris megoldásának összegeként áll elő.
Keressük először a (11.19) homogén DER, vagy ekvivalens felírásban az

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}\dfrac{dx_1}{dt} + b_{12}\dfrac{dx_2}{dt} \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}\dfrac{dx_1}{dt} + b_{22}\dfrac{dx_2}{dt} \end{cases} \tag{11.36}$$

DER általános megoldását.
A (11.36) homogén DER általános megoldása

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \\ x_2(t) &= B_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + B_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{11.37}$$

alakban áll elő valamely $A_1, A_{2,}\ B_1, B_2$ állandókkal. A határozatlan együtthatók módszerével határozzuk meg az $A_1, A_{2,}\ B_1, B_2$ állandókat:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \\ x_2(t) &= B_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + B_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= A_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \\ \frac{dx_2}{dt} &= B_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \tag{11.38}$$

Behelyettesítve (11.36)-ba , kapjuk hogy

$$\begin{aligned} & A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = a_{11}A_1 e^{\lambda_1 t} + a_{11}A_2 e^{\lambda_2 t} + \\ & + a_{12}B_1 e^{\lambda_1 t} + a_{12}B_2 e^{\lambda_2 t} + b_{11}A_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b_{11}A_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + \\ & + b_{12}B_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b_{12}B_2 e^{\lambda_2 t}; \\ & B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} = a_{11}A_1 e^{\lambda_1 t} + a_{21}A_2 e^{\lambda_2 t} + \\ & + a_{22}B_1 e^{\lambda_1 t} + a_{22}B_2 e^{\lambda_2 t} + b_{21}A_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b_{21}A_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + \\ & + b_{22}B_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b_{22}B_2 e^{\lambda_2 t} \ . \end{aligned} ,$$

A határozatlan együtthatók módszerét alkalmazva :

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &: A_1 = a_{11}A_1 + a_{12}B_1 + b_{11}A_1\lambda_1 + b_{12}B_1\lambda_1 \\ e^{\lambda_2 t} &: A_2 = a_{11}A_2 + a_{12}B_2 + b_{11}A_2\lambda_2 + b_{12}B_2\lambda_2 \end{aligned} \tag{11.39}$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &: B_1 = a_{21}A_1 + a_{22}B_1 + b_{21}A_1\lambda_1 + b_{22}B_1\lambda_1 \\ e^{\lambda_2 t} &: B_2 = a_{21}A_2 + a_{22}B_2 + b_{21}A_2\lambda_2 + b_{22}B_2\lambda_2 \end{aligned} \tag{11.40}$$

Tehát, (11.39)-ből:

$$\begin{aligned} A_1(1 - a_{11} - b_{11}\lambda_1) &= (a_{12} + b_{12}\lambda_1)B_1 \\ A_2(1 - a_{11} - b_{11}\lambda_1) &= (a_{12} + b_{12}\lambda_2)B_2 \end{aligned}$$

amiből

$$B_1 = \frac{A_1(1 - a_{11} - b_{11}\lambda_1)}{a_{12} + b_{12}\lambda_1},\ B_2 = \frac{A_2(1 - a_{11} - b_{11}\lambda_2)}{a_{12} + b_{12}\lambda_2} \tag{11.41}$$

ahol A_1, A_2 tetszőlegesek.
Közvetlen számításokkal adódik, hogy a (11.41) értékek kielégítik a (11.40)-ből adódó

$$\begin{cases} B_1(1 - a_{22} - b_{22}\lambda_1) = (a_{21} + b_{21}\lambda_1)A_1 \\ B_2(1 - a_{22} - b_{22}\lambda_2) = (a_{21} + b_{21}\lambda_2)A_2 \end{cases}$$

egyenleteket is, ha figyelembe vesszük, hogy (11.22)-ből

$$(1 - a_{11} - \lambda b_{11})(1 - a_{22} - \lambda b_{22}) = (a_{21} + \lambda b_{21})(a_{12} + \lambda b_{12}). \tag{11.42}$$

Így a (11.36) homogén DER általános megoldása

$$x_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$x_2(t) = A_1 \frac{(1 - a_{11} - b_{11}\lambda_1)}{(a_{12} + b_{12}\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + A_2 \frac{(1 - a_{11} - b_{11}\lambda_2)}{(a_{12} + b_{12}\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} \qquad (11.43)$$

ahol A_1, A_2 tetszőleges állandók.
A (11.18) inhomogén DER-t abban speciális esetben vizsgáljuk mostantól, amikor

$$y_1(t) = c_1 = const\,,\ y_2(t) = c_2 = const \qquad (11.44)$$

azaz a zavarófüggvény állandó.
Keressük ekkor a (11.18)-ból adódó

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = B^{-1}(I - A)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - B^{-1}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad (11.45)$$

DER partikuláris megoldását

$$x_1 = D_1\,,\ x_2 = D_2 \qquad (11.46)$$

alakban, ahol D_1, D_2 egyelőre ismeretlen konstansok.
Ha (11.46)-t és deriváltjait behelyettesítjük (11.45)-be, akkor

$$B^{-1}(I - A)\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} - B^{-1}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (11.47)$$

melyből következik, hogy

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = (I - A)^{-1}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}. \qquad (11.48)$$

Így, a (11.45) inhomogén DER általános megoldását a (11.43) és (11.48) függvények összegeként kapjuk:

$$x_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + D_1$$
$$x_2(t) = A_1 \frac{(1 - a_{11} - b_{11}\lambda_1)}{(a_{12} + b_{12}\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + A_2 \frac{(1 - a_{11} - b_{11}\lambda_2)}{(a_{12} + b_{12}\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} + D_2 \qquad (11.49)$$

ahol D_1, D_2 (11.48)-ból adódik, A_1 és A_2 tetszőleges állandók.
Ha egy $t=0$ időpontban adottak az

$$x_1(0) \text{ és } x_2(0) \qquad (11.50)$$

kezdeti értékek, akkor A_1 és A_2 egyértelműen meghatározhatók az

$$x_1(0) = A_1 + A_2 + D_1$$
$$x_2(0) = A_1 \frac{(1 - a_{11} - b_{11}\lambda_1)}{(a_{12} + b_{12}\lambda_1)} + A_2 \frac{(1 - a_{11} - b_{11}\lambda_2)}{(a_{12} + b_{12}\lambda_2)} + D_2 \qquad (11.51)$$

egyenletekből:

$$A_1 = \frac{(x_1(0) - D_1)\cdot \alpha_2 - (x_2(0) - D_2)}{\alpha_2 - \alpha_1}$$
$$A_2 = \frac{(x_2(0) - D_2) - (x_1(0) - D_1)\cdot \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \qquad (11.52)$$

ahol

$$\alpha_1 = \frac{1 - a_{11} - b_{11}\lambda_1}{a_{12} + b_{12}\lambda_1}, \ \alpha_2 = \frac{1 - a_{11} - b_{11}\lambda_2}{a_{12} + b_{12}\lambda_2} \quad . \tag{11.53}$$

Feltehető, hogy

$$\lambda_1 > 0 \text{ és } \lambda_1 > \lambda_2 \tag{11.54}$$

mert (11.34), (11.35) szerint valamelyikük pozitív és

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad . \tag{11.55}$$

Ekkor $A_1 \neq 0$ esetén (11.49)-ből

$$x_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t}\left[1 + \frac{A_2}{A_1}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \frac{D_1}{A_1}e^{-\lambda_1 t}\right] = A_1 e^{\lambda_1 t}\left[1 + f(t)\right], \tag{11.56}$$

ahol

$$f(t) = \left(\frac{A_2}{A_1}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \frac{D_1}{A_1}e^{-\lambda_1 t}\right), \tag{11.57}$$

és

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0 \quad .$$

Ha $\alpha_1 \neq 0$, akkor (11.49) második egyenletéből

$$x_2(t) = A_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t}\left[1 + \frac{A_2\alpha_2}{A_1\alpha_1}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \frac{D_2}{A_1\alpha_1}e^{-\lambda_1 t}\right] = A_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t}\left[1 + g(t)\right], \tag{11.58}$$

ahol

$$g(t) = \frac{A_2\alpha_2}{A_1\alpha_1}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \frac{D}{A_1\alpha_1}e^{-\lambda_1 t} \tag{11.59}$$

és

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \quad .$$

Így

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{A_1 e^{\lambda_1 t}\left[1+f(t)\right]}{A_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t}\left[1+g(t)\right]} = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{(1+f(t))}{(1+g(t))}\right] = \frac{1}{\alpha_1} \quad . \tag{11.60}$$

Az

$$A_1 = 0 \tag{11.61}$$

eset akkor áll fenn, ha (11.52) alapján

$$(x_1(0) - D_1)\alpha_2 - (x_2(0) - D_2) = 0 \tag{11.62}$$

A (11.52) egyenlőség az (x_1, x_2)-sík vagy egyetlen pontjában (ha $\alpha_2 \neq 0$), vagy egy egyenesén (ha $\alpha_2 = 0$) teljesül.

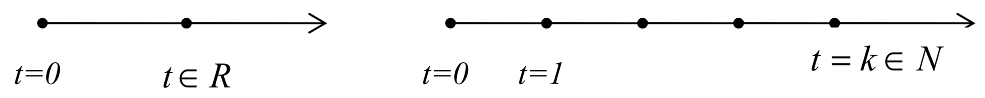
Az $\alpha_1 = 0$ egyenlőség adott *A*, *B* mátrixokra (jól definiálható értelemben), csak kivételes esetben fordul elő.

Így azt kaptuk, hogy a két szektor növekedése bizonyos kivételes esetektől eltekintve arányos, kiegyensúlyozott. Tehát mind a két szektor ugyanolyan exponenciális rátával, tehát arányosan, kiegyensúlyozottan növekszik a kezdeti értékek többségére.

Megjegyezzük, hogy a fenti állítás $n > 2$ esetben is igaz (többszektoros input-output modell esetén).

12. A differenciaegyenletes dinamikus modellekről

Az eddigi differenciálegyenletes dinamikus modellekből már ismert az időtényező szerepe. A modellek megalkotásánál az időről hallgatólagosan mindig feltettük, hogy az folytonosan telik, változik.
Az idő kétféle értelemben is megjelenik a közgazdasági folyamatokban, éspedig relatív és abszolút értelemben. Relatív módon akkor, amikor a folyamat két állapota közötti átmenethez szükséges időről van szó, abszolút módon pedig akkor, amikor az ún. naptári időről van szó. Az eddidi differenciálegyenletes modelleknél a relatív idő tetszőleges valós szám lehet, az abszolút idő a valós számegyenes egy intervallumát futja be.
Azonban vannak olyan közgazdasági folyamatok is, amikor az idő folyására a folytonosság nem alkalmazható.
Például, ha egy ország gazdaságának makrofolyamatait vizsgáljuk, akkor a megfigyeléseket csak diszkrét időpontokban tesszük, hiszen csak éves statisztikai adatok állnak rendelkezésünkre, továbbá a beavatkozások is diszkrét időpontokban történnek (pl. éves költségvetés elfogadása).
A diszkrét időpontok távolsága elvben akármeddig csökkenhet. Azonban vannak olyan gazdasági folyamatok, amelyeknél a két egymás követő időpont közötti különbségnek van egy természetes, pozitív alsó korlátja. Gondoljunk például bizonyos mezőgazdasági folyamatok modellezésére, ahol ez a különbség sok esetben egy évnél rövidebb nem lehet, hiszen pl. gabonaratás, szüret nálunk minden évben csak egyszer van.
Az ún. differenciaegyenletes modellalkotás a differenciálegyenletestől csupán annyiban különbözik, hogy az idő lehetséges értékei nem valós számok, mint eddig, hanem egy *h* pozitív szám egész számú többszörösei (lásd 12.1 ábra).



12.1 ábra

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$h=1\ ,$$

vagyis az idő lehetséges értékei a természetes számok. Ennek az lesz a következménye, hogy a folyamat állapothatározóinak időbeli változását nem az

$$\lambda : [0,\infty) \to R \qquad (12.1)$$

valós változós függvényekkel, hanem

$$\lambda : N \to R \qquad (12.2)$$

sorozatokkal adjuk meg:

$$x(0), x(1), \ldots, x(k), \ldots \qquad k \in N\ . \qquad (12.3)$$

Tekintsük az alábbi modellt.

12.1 Samuelson differenciaegyenletes akcelerációs modellje egy ország makrogazdaságának fejlődésére

Bontsuk fel egy ország nemzeti jövedelmét minden évben három összetevőre, melynek értékeit a *t* időpontban a következőképpen jelöljük:

$Y(t)$ – teljes nemzeti jövedelem ,
$C(t)$ – fogyasztás (áruvásárlás) , (12.4)

I(*t*) – egyéni beruházás (tőkeeszközök, gépek vásárlása a termelés növelése érdekében),
G(*t*) – központi kiadások (kormányzati kiadások).

Tegyük fel, hogy t tetszőleges értékei az

$$1, 2, 3, ..., \qquad (12.5)$$

természetes számok (egy éves statisztikai adatokkal rendelkezünk).
Ekkor fennáll a következő mérleg:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t),\ t=1,2,... \qquad (12.6)$$

A (12.6)-ban szereplő mennyiségek nyilvánvalóan nem függetlenek egymástól.
A közöttük lévő összefüggéseket közgazdasági tapasztalatokból kiindulva Samuelson a következőképpen írta le:

a) a *C*(*t*) fogyasztás minden periódusban arányos az előző periódusban produkált *Y*(*t*-1) teljes nemzeti jövedelemmel
$$C(t) = \alpha \cdot Y(t-1); \qquad (12.7)$$
ahol α arányossági együttható, melyet a közgazdaságtanban fogyasztási határhajlandóságnak neveznek;

b) az *I*(*t*) egyéni beruházás minden periódusban arányos fogyasztásnak az előző periódus fogyasztásához viszonyított *C*(*t*) - *C*(*t*-1) növekedésével (akcelerációs, vagy gyorsítási elv)
$$I(t) = \beta \cdot [C(t) - C(t-1)] \qquad (12.8)$$
ahol $\beta > 0$ arányossági együttható, melyet beruházási viszonyszámnak neveznek.;

c) a *G*(*t*) központi kiadások minden periódusban ugyanazt az értéket teszik ki, azaz nagyságuk állandó és az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy
$$G(t) = 1 = const.,\ t=1, 2, ... \qquad (12.9)$$

Kiindulva a (12.6) alapegyenlőségből a (12.7)-(12.9) összefüggéseket felhasználva az

$$\begin{aligned} Y(t) &= \alpha \cdot Y(t-1) + \beta \cdot [C(t) - C(t-1)] + 1 = \\ &= \alpha \cdot Y(t-1) + \beta \cdot [\alpha \cdot Y(t-1) - \alpha \cdot Y(t-2)] + 1 \end{aligned} \qquad (12.10)$$

összefüggést kapjuk.

Algebrai átalakításokkal (12.10)-ből kapjuk az

$$Y(t) = \alpha \cdot (1+\beta) \cdot Y(t-1) - \alpha \cdot \beta \cdot Y(t-2) + 1, \quad t=2, 4, ... \qquad (12.11)$$

alakú egyenletet, amelyet a makrogazdaság Samuelson-féle akcelerációs modelljének neveznek.
A (12.11) egyenlőség azt fejezi ki, hogyan lehet kiszámítani („megjósolni”) egy adott periódusra bruttó nemzeti jövedelmet, ha ismert a két korábbi periódusban produkált nemzeti jövedelem és az α fogyasztási határhajlandóság, valamint a β beruházási viszonyszám.
Tehát, ha (12.11) egyenlőségben az

$$Y(1) = y_1,\ Y(2) = y_2 \qquad (12.12)$$

értékek adottak, és az

$$Y(3), Y(4), ..., Y(k), Y(k+1), ... \qquad (12.13)$$

sorozatot tekintjük ismeretlennek, akkor (12.11) egy egyenlet.
Ha a (12.13) sorozatot a természetes számok halmazán értelmezett speciális függvénynek tekintjük, akkor (12.11) egy függvényegyenlet, ugyanúgy, mint differenciálegyenletek is.

Az eltérés az, hogy az egyenletben most az ismeretlen $Y(t)$ függvénynek nem a $\frac{dY(t)}{dt}$, $\frac{d^2Y(t)}{dt^2}$ első és másodrendű differenciálhányadosai (deriváltjai), hanem az ún.

$$Y(t)-Y(t-1) \textbf{ elsőrendű differenciája } \text{és } Y(t)-Y(t-2) \tag{12.14}$$

másodrendű differenciája fordul elő.
Ezért (12.11)-et **másodrendű differenciaegyenletnek nevezzük**.
Az

$$\begin{cases} Y(t)=\alpha(1+\beta)Y(t-1)-\alpha\beta\, Y(t-2)+1 \\ Y(1)=y_1,\ Y(2)=y_2 \end{cases}, \qquad t=3,\ 4,\ \ldots \tag{12.15}$$

feladatot a (12.11) differenciaegyenlethez rendelt **kezdetiérték problémának nevezzük**.
A (12.15) kezdetiérték-feladat megoldásán egy olyan

$$Y=\Phi(t)=\Phi(t,y_1,y_2),\quad t=1,2,\ldots \tag{12.16}$$

sorozatot értünk, amelyre

$$\Phi(1)=y_1,\ \Phi(2)=y_2 \tag{12.17}$$

és a Φ sorozat minden $t\in\{1,2,3,\ldots.\}$ esetén kielégíti a (12.11) differenciaegyenletet, azaz

$$\Phi(t)=\alpha(1+\beta)\Phi(t-1)-\alpha\beta\Phi(t-2)+1\,. \tag{12.18}$$

A (12.15) kezdetiérték-feladat megoldása egyszerűnek tűnik, hiszen y_1 és y_2 birtokában kiszámítjuk y_3-at, y_2 és y_3 felhasználásával meghatározzuk y_4-et, és így tovább.
Azonban a helyzet nem ilyen egyszerű, ha a (12.15) kezdetiérték-probléma kvalitatív vizsgálatáról van szó. Ezt a (12.15) Samuelson-modellel világítjunk meg.
Ha

$$\alpha=0.5\,,\ \beta=1\,, \tag{12.19}$$

akkor a (12.11) differenciaegyenlet az

$$Y(t)=Y(t-1)-\frac{1}{2}Y(t-2)+1\,,\ t=3,4,\ \ldots \tag{12.20}$$

alakot ölti,
ha

$$\alpha=0.8\,,\ \beta=2\,, \tag{12.21}$$

akkor az

$$Y(t)=2.4\cdot Y(t-1)-1.6\cdot Y(t-2)+1\,. \tag{12.22}$$

egyenletet kapjuk (lásd [1], 120 old.)
Határozzuk meg a (12.13) ismeretlen sorozatot mindkét (12.20) és (12.22) egyenletből ugyanazon

$$y_1=2,\quad y_2=3 \tag{12.23}$$

kezdeti értékekből kiindulva a t=12 időpontig.
Ekkor a 12.1 táblázatban látható eredményt kapjuk (lásd [1], 121 old.)
.

t	$Y(t)$	$Y(t)$
	$\alpha = 0.5$; $\beta = 1$	$\alpha = 0.8$; $\beta = 2$
1	2.00	2.00
2	3.00	3.00
3	3.00	5.00
4	2.50	8.20
5	2.00	12.68
6	1.75	18.31
7	1.75	24.66
8	1.87	30.83
9	1.99	35.68
10	2.05	37.21
11	2.05	33.22
12	2.03	21.19

12.1 táblázat

Láthatjuk, hogy mindkét esetben a nemzeti bruttó jövedelem oszcilláló viselkedést mutat, de a második esetben az amplitudók és az átlagos érték is nagyobbak.
A szóban forgó modellel kapcsolatban a következő elméleti kérdések merülnek fel.
Vajon az oszcilláció a t tetszőlegesen nagy értékeinél is megfigyelhető?
A (12.11) egyenletben szereplő α, β paraméterek, illetve az y_1, y_2 kezdeti adatok tetszőleges értékeinél fellép-e a fenti két konkrét esetben megfigyelt oszcilláció?
Amikor majd megtanultuk a differenciaegyenletek elméletéből, hogyan kell ezekre a kérdésekre matematikai módszerekkel megadni a választ, a következőt fogjuk tudni bebizonyítani:
Ha

$$\alpha = 0.5 \text{ és } \beta = 1, \qquad (12.24)$$

akkor a bruttó nemzeti jövedelem végig oszcilláló marad, az oszcilláció csillapodik és

$$\lim_{t\to\infty} Y(t) = 2 \quad . \qquad (12.25)$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a gazdaság stabilis.
Ha viszont

$$\alpha = 0.8 \text{ és } \beta = 2, \qquad (12.26)$$

akkor az oszcilláció mértéke egyre nő és a gazdaság instabilis, ami nagyon nem-kívánatos.
Azt is fogjuk látni, hogy α és β bizonyos értékeinél a megoldás nem-oszcilláló.
Teljes ismerettel fogunk rendelkezni és választ tudunk adni arra a kérdésre, hogy az α, β konstansok tetszőleges választása mellett hogyan viselkedik a (12.11) differenciaegyenlet megoldása.
Ez az ismeret különösen fontos a makrogazdasági folyamatok irányítóinak, akik az α, β paraméterek befolyásolásával a nemzeti jövedelem alakulásában egy adott tendenciát szeretnének biztosítani.

13. A Differenciaegyenletek alaptulajdonságai

A Samuelson-féle akcelerációs gazdasági modell a (12.11) alakú

$$Y(t)=\alpha\cdot(1+\beta)\cdot Y(t-1)-\alpha\cdot\beta\cdot(t-2)+1\,,\ t=3,4,... \qquad (13.1)$$

másodrendű konstans együtthatós lineáris differenciaegyenlethez vezet.

Definíció (n-ed rendű differenciaegyenlet):

Az

$$y(t)=F(t,y(t-1),y(t-2),\dots,y(t-n)),\ t=n+1,\ n+2,...\quad 1\le n\in N \qquad (13.2)$$

alakú, vagy a vele ekvivalens

$$y(t+n)=F(t,y(t),y(t+1),\dots,y(t+n-1)),\quad t=1,2,\dots\quad 1\le n\in N \qquad (13.3)$$

alakú egyenletet n-ed rendű differenciaegyenletnek nevezzük, ha az

$$F:N\times R^{n}\to R \qquad (13.4)$$

függvény adott.

Definíció (n-ed rendű differenciaegyenlethez rendelt kezdetiérték-feladat)

Ha a (13.3) n-ed rendű differenciaegyenlet teljesülésén kívül a keresett

$$y(n+1),y(n+2),y(n+3),\dots \qquad (13.5)$$

sorozattól megköveteljük az

$$y(1)=y_1\,,\ y(2)=y_2\,,\dots,y(n)=y_n \qquad (13.6)$$

ún. kezdeti feltételeket is, akkor a (13.3) differenciaegyenletre vonatkozó kezdetiérték - problémáról beszélünk:

$$\begin{cases} y(t+n)=F(t,y(t),y(t+1),\dots,y(t+n-1))), & t=1,2,\dots \\ y(1)=y_1,\ y(2)=y_2\,,\dots,y(n)=y_n \end{cases} \qquad (13.7)$$

13.1 Kezdetiérték-feladat megoldásának létezése és egyértelműsége

Mint ahogyan a 2. fejezet 2.2 alfejezetében már beláttuk, a differenciálegyenletek elméletének egyik alaptétele a kezdetiérték-probléma megoldásának létezését és egyértelműségét biztosító egzisztenci és unicitástétel.

A differenciaegyenletek esetén ez a tétel jóval egyszerűbben fogalmazható és bizonyítható.

Tegyük fel, hogy

$$1\le n\in N\,,\ D\in R^{n}\ ,\ F:N\times D\to R\,,\ 1\le k\in N \qquad (13.8)$$

adottak és tekintsük az

$$\begin{cases} y(t+n)=F(t,y(t),y(t+1),\dots,y(t+n-1))), & t=1,2,\dots \\ y(k)=y_1,\ y(k+1)=y_2\,,\dots,y(k+n-1)=y_n \end{cases} \qquad (13.9)$$

n-ed rendű differenciaegyenlethez a

$$t=k \qquad (13.10)$$

kezdeti időponthoz, és a tetszőlegesen rögzített

$$(y_1,\dots,y_n)\in D \qquad (13.11)$$

ponthoz tartozó kezdetiérték problémát.

(A (13.7) kezdetiérték-feladatban a (13.10) kezdeti időpontban k=1 volt.)

Tétel (differenciaegyenlethez tartozó kezdetiérték-feladat megoldásának egzisztenciája és unicitása)
1. Ha bármely

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \quad \textit{és} \quad t \geq k \tag{13.12}$$

esetén

$$(x_2, x_3, \ldots, x_n, F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in D, \tag{13.13}$$

akkor a (13.9) kezdetiérték problémának pontosan egy megoldása létezik a

$$k, k+1, k+2, \ldots, k+n-1, k+n, k+n+1, \ldots \tag{13.14}$$

halmazon.
2. Továbbá, ha (13.12), (13.13) teljesül, és ha bármely

$$t \quad (2 \leq t \leq k) \tag{13.15}$$

értékére tetszőleges $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ *ponthoz létezik egy és csakis egy olyan* $z \in R$, *hogy*

$$(z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in D \ \textit{és} \ F(t-1, z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = x_n \tag{13.16}$$

akkor a (13.9) kezdetiérték problémának pontosan egy megoldása létezik az
1,2,3,... *halmazon.*

Bizonyítás (lásd [1], 122.old.)
A (13.12), (13.13) feltételek biztosítják, hogy ha ismerjük a megoldássorozat *n* egymás utáni elemét, akkor a megoldássorozat ezeket követő elemét is ki tudjuk számítani. Ezek után teljes indukcióval bizonyítható az állítás.
A (13.15), (13.16) feltétel biztosítja, hogy ha ismerjük a megoldássorozat *n* egymás utáni elemét, és ezek közül az első még nem $y(1)$, akkor meg tudjuk határozni a megoldássorozat ezen elemei előtt álló elemét.
A bizonyítást ezek után ismét a teljes indukció módszerével lehet teljessé tenni.

13.2 Elsőrendű lineáris differenciaegyenlet

A lineáris elsőrendű differenciaegyenlet legáltalánosabb alakja

$$f_0(m) \cdot y(m+1) + f_1(m) \cdot y(m) = g(m), \quad m = 1,2,\ldots, \tag{13.17}$$

ahol

$$\{g(m)\}_{m=1}^{\infty}, \{f_0(m)\}_{m=1}^{\infty}, \{f_1(m)\}_{m=1}^{\infty}, \tag{13.18}$$

adott valós sorozatok.
A (13.17) egyenletet **inhomogén differenciaegyenletne**k szokás nevezni, az

$$f_0(m)y(m+1) + f_1(m)y(m) = 0 \tag{13.19}$$

egyenletet pedig a hozzá tartozó **homogén differenciaegyenletnek** nevezzük.
A 13.1 szakaszban bizonyított egzisztencia és unicitástételből közvetlenül kapjuk a következő állítást.
Tétel (elsőrendű lineáris differenciaegyenlet megoldásának létezése és unicitása)
Ha $f_0(m) \neq 0$, $f_1(m) \neq 0$, *m=1, 2, ... , akkor tetszőleges* $y_1 \in R$ *és* $k \in N$ *esetén az*

$$\begin{cases} f_0(m) \cdot y(m+1) + f_1(m) \cdot y(m) = g(m) \\ \qquad\qquad y(k) = y_1 \end{cases}, \tag{13.20}$$

kezdetiérték-feladatnak pontosan egy y(k), y(k+1), y(k+2),... megoldása van, melyre teljesül

$$y(k) = y_1 \ . \qquad (13.21)$$

A továbbiakban bizonyítás nélkül ismertetjük a differenciaegyenletekkel kapcsolatos egyes tulajdonságokat.

Tétel (az elsőrendű lineáris differenciaegyenlet megoldásának alakjáról) [1, 123. old]

Tegyük fel, hogy $f_0(m) \neq 0$, $m = k, k+1, \ldots$, *akkor a*

$$\begin{cases} f_0(m)\cdot y(m+1) + f_1(m)\cdot y(m) = 0 \\ y(k) = y_1 \end{cases} \qquad (13.22)$$

homogén *kezdetiérték-feladat megoldása*

$$y(j) = \left(\prod_{i=k}^{j-1}\left[\frac{-f_1(i)}{f_0(i)}\right]\right)\cdot y_1, \quad j = k+1, k+2, \ldots \qquad (13.23)$$

míg az

$$\begin{cases} f_0(m)\cdot y(m+1) + f_1(m)\cdot y(m) = g(m) \\ y(k) = y_1 \ , \end{cases} \qquad (13.24)$$

inhomogén *esetben*

$$y(j) = \left(\prod_{i=k}^{j-1}\left[\frac{-f_1(i)}{f_0(i)}\right]\right)\cdot y_1 + \sum_{l=k}^{j-1}\left[\left(\prod_{i=l+1}^{j-1}\left[\frac{-f_1(i)}{f_0(i)}\right]\right)\cdot\frac{g(l)}{f_0(l)}\right], \quad j = k+1, k+2, \ldots .$$

Tétel (az elsőrendű lineáris konstans együtthatójú differenciaegyenlet megoldásának alakjáról) [1, 125. old]

Az

$$\begin{cases} y(k+1) = a\cdot y(k) + g(k) \quad , k = 1,2,\ldots \\ y(1) = y_1 \end{cases}, \qquad (13.25)$$

ahol $a \in R$,

kezdetiérték-feladat megoldását az

$$y(j) = a^{j-1}\cdot y_1 + \sum_{l=1}^{j-1} a^{j-l-1}\cdot g(l) \quad , j = 2,3,\ldots \qquad (13.26)$$

formula szolgáltatja.

Ha (13.25) differenciaegyenletben

$$g(k) = b = const.,$$

akkor (13.26)-ból kapjuk, hogy az

$$\begin{cases} y(k+1) = a\cdot y(k) + b \\ y(1) = y_1 \end{cases}, \ k = 1,2,\ldots \quad a, b \in R \qquad (13.27)$$

kezdetiérték-feladat megoldása

$$y(j) = \begin{cases} a^{j-1}\cdot y_1 + b\cdot\dfrac{a^{j-1}-1}{a-1} & , \ ha\ a \neq 1 \\ y_1 + b\cdot(j-1), & ha\ a = 1 \end{cases} \ . \qquad (13.28)$$

13.1 Példa [1, 126. old] Oldjuk meg az

$$\begin{cases} y(n+1)=(n+1)\cdot y(n)+2^n\cdot(n+1)! \\ y(0)=1 \end{cases} \tag{13.29}$$

kezdetiérték-problémát.
Megoldás. A (13.26) formula szerint

$$\begin{aligned} y(n)&=\prod_{i=0}^{n-1}(i+1)+\sum_{k=0}^{n-1}\left[\prod_{i=k+1}^{n-1}(i+1)\right]\cdot 2^k(k+1)!= \\ &=n!+\sum_{k=0}^{n-1}n!2^k=n!\cdot\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}2^k\right)=2^n\cdot n! \end{aligned} \tag{13.30}$$

13.3 Differenciaegyenletek megoldásainak stabilitása

Tekintsük az

$$y(t+n)=f\left(t,y(t),y(t+1),\dots,y(t+n-1)\right)\quad ,t=1,2,\dots \tag{13.31}$$

n-ed rendű differenciaegyenletet.
Definíció (egyensúlyi pont)
Az

$$y=y^*\in R \tag{13.32}$$

*számot a (13.31) differenciaegyenlet **egyensúlyi pontjának** (egyensúlyi helyzetének) nevezzük, ha az*

$$y(t)=y^*\quad ,t=1,2,3,\dots \tag{13.33}$$

konstans sorozat megoldása az egyenletnek.
Jelölje

$$y(t)=y\left(y,y_1^0,y_2^0,\dots,y_n^0\right)\quad ,t=1,2,3,\dots \tag{13.34}$$

a (13.31) differenciaegyenletnek azt a megoldását, amely kielégíti az

$$y(1)=y_1^0\ ,\ y(2)=y_2^0\ ,\dots,\ y(n)=y_n^0 \tag{13.35}$$

kezdeti feltételeket.
Definíció (stabilitás, aszimptotikus stabilitás, instabilitás)
A (13.31) differenciaegyenlet egy (13.34) $y(t)=y\left(y,y_1^0,y_2^0,\dots,y_n^0\right)$ *,* $t=1,2,3,\dots$ *megoldását:*
a) ***stabilisnak*** *nevezzük, ha bármely* $\varepsilon>0$ *számhoz létezik olyan* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ *szám, hogy ha*

$$\left|y_1-y_1^0\right|<\delta\ ,\left|y_2-y_2^0\right|<\delta\ ,\dots,\left|y_n-y_n^0\right|<\delta\ , \tag{13.36}$$

akkor

$$\left|y\left(t,y_1,y_2,\dots,y_n\right)-y\left(t,y_1^0,y_2^0,\dots,y_n^0\right)\right|<\varepsilon\quad ,t=1,2,\dots \tag{13.37}$$

b) ***aszimptotikusan stabilisnak*** *nevezzük, ha stabilis, és létezik olyan* $\delta>0$ *szám, hogy ha*

$$\left|y_1-y_1^0\right|<\delta\ ,\left|y_2-y_2^0\right|<\delta\ ,\dots,\left|y_n-y_n^0\right|<\delta\ , \tag{13.38}$$

akkor

$$\lim_{t\to\infty}\left|y\left(t,y_1,y_2,\dots,y_n\right)-y\left(t,y_1^0,y_2^0,\dots,y_n^0\right)\right|=0\ ,$$

c) ***instabilisna****k nevezzük, ha nem stabilis.*

Amint látjuk, a stabilitás definíciója a következőt mondja: egy megoldás stabilis, ha tetszőleges másik megoldás „örökre” tetszőlegesen közel marad hozzá, feltéve, hogy a kiindulási időpontban hozzá elegendően közeli állapotból indul.
Ha ezen kívül aszimptotikusan stabilis is a megoldás, akkor még az is teljesül, hogy a két megoldás közötti eltérés nullához tart (az idő növekedésével „elhal”, „lecseng”).
Tétel (a konstans együtthatós elsőrendű lineáris differenciaegyenlet megoldásának stabilitásáról)
Az

$$y(k+1) = a \cdot y(k) + g(k) \quad , k = 1,2,... \quad , a \in R \tag{13.39}$$

konstans együtthatós egyenlet tetszőleges megoldása
a) akkor és csakis akkor stabilis, ha

$$|a| \leq 1\,; \tag{13.40}$$

b) akkor és csakis akkor aszimptotikusan stabilis, ha

$$|a| < 1\,; \tag{13.41}$$

c) akkor és csakis akkor instabilis, ha

$$|a| > 1\,. \tag{13.42}$$

Láthatjuk, hogy az elsőrendű lineáris differenciaegyenletek stabilitásvizsgálata rendkívül egyszerű, még egyszerűbb, mint a differenciálegyenleteknél.
Nincs ez így a nemlineáris egyenletek esetén, ahol bonyolult jelenségek is felléphetnek, amilyenek elsőrendű lineáris differenciaegyenletek esetében egyáltalán nem fordulhatnak elő.

13.4 Másodrendű konstans együtthatós lineáris differenciaegyenletek

Tekintsük az

$$y(t+2) + p \cdot y(t+1) + q \cdot y(t) = 0 \quad , t = 0,1,2,... \tag{13.43}$$

másodrendű konstans együtthatós homogén lineáris differenciaegyenletet.
A

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0 \tag{13.44}$$

másodfokú algebrai egyenletet a (13.43) differenciaegyenlet karakterisztikus egyenletének nevezzük.
Nyilvánvaló, hogy a karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\;, \\ \lambda_1 &= \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\;. \end{aligned} \tag{13.45}$$

Ismeretes, $[1,\ 171\ old.]$, hogy a (13.43) differenciaegyenlet általános megoldása

$$y(t) = c_1 \lambda_1^{\,t} + c_2 \lambda_2^{\,t} \quad , t = 0,1,2,...., \tag{13.46}$$

illetve

$$y(t) = (c_1 + c_2\, t)\lambda^{\,t} \quad , t = 0,1,2,.... \tag{13.47}$$

alakú, ahol $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a (13.44) karakterisztikus egyenlet különböző gyökei, illetve $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ kétszeres gyöke (13.44)-nek, $c_1, c_2 \in R$.
A (13.46), (13.47) képletekből világos, hogy a megoldások viselkedése szempontjából a

$(p,\, q)$ paramétersíkon azokat a tartományokat kell megkülönböztetni, ahol a (13.45) karakterisztikus gyökök :
I.- valósak,

$$p^2 \geq 4\,q \tag{13.48}$$

és ezen belül kielégítik a

$$\lambda < -1\,,\, \lambda = -1\,,\, -1 < \lambda < 1\,,\, \lambda = 1\,,\, \lambda > 1 \tag{13.49}$$

egyenlőtlenségek valamelyikét.
II. képzetesek,

$$p^2 < 4q \tag{13.50}$$

és ezen belül kielégítik a

$$|\lambda| < 1\,,\, |\lambda| = 1\,,\, |\lambda| > 1\,, \tag{13.51}$$

egyenlőtlenségek valamelyikét.

I. Valós karakterisztikus gyökök esete.

Először is határozzuk meg a

$$\lambda_1 = -1\,,\, \lambda_1 = 1\,,\, \lambda_2 = -1\,,\, \lambda_2 = 1 \tag{13.52}$$

halmazokat.
Ha $\lambda_1 = -1$, akkor (13.45)-ből

$$2 - p = \sqrt{p^2 - 4q} \rightarrow p \leq 2\,, \tag{13.53}$$

és (13.44)-ből

$$-p + q + 1 = 0 \rightarrow p \leq 2\,. \tag{13.54}$$

Hasonlóan, ha $\lambda_1 = 1$, akkor

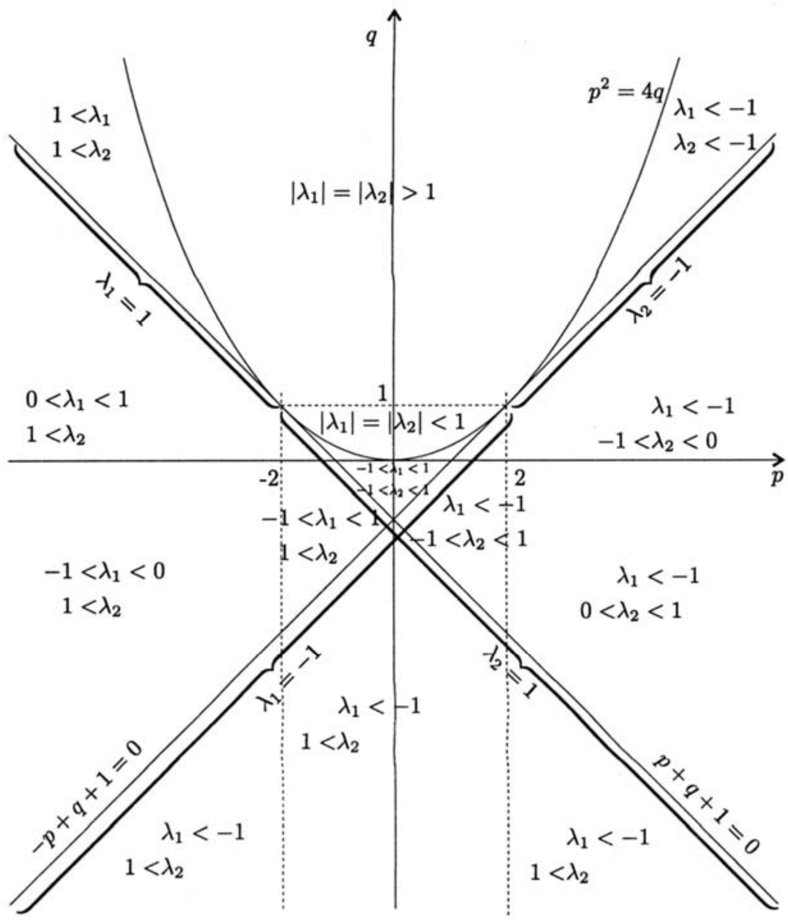
$$\begin{cases} -2 - p = \sqrt{p^2 - 4q} & ,p \leq -2 \\ p + q + 1 = 0 & ,p \leq -2 \end{cases}, \tag{13.55}$$

ha $\lambda_2 = -1$, akkor

$$-p + q + 1 = 0 \quad ,p \geq -2 \tag{13.56}$$

illetve, ha $\lambda_2 = 1$, akkor

$$p + q + 1 = 0 \quad ,p \geq -2\ . \tag{13.57}$$



13.1 ábra

Az világosan látható (13.45)-ből, hogy ha q-t növeljük, akkor λ_1 növekszik, λ_2 pedig csökken, ha lefelé mozdulunk el, akkor fordítva λ_1 csökken, λ_2 pedig növekszik. Ezt felhasználva keresett tartományokat a valós gyökök esetén könnyen meghatározhatjuk (lásd a 13.1. ábrát, ([1], 173 old.).

II. Képzetes karakterisztikus gyökök esete.

Ekkor (13.45)-ből

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} - \frac{i}{2} \cdot \sqrt{4q - p^2}\ , \lambda_2 = -\frac{p}{2} + \frac{i}{2} \cdot \sqrt{4q - p^2}$$

tehát

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{4q - p^2}{4}} = \sqrt{q} \tag{13.58}$$

és

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 : q = 1 \quad . \tag{13.59}$$

Nyilvánvaló, hogy $y = y^* = 0$ egyensúlyi helyzete a (13.43) homogén differenciaegyenletnek, azaz

$$\{y^*\}_{t=1}^{\infty} = \{0\}_{t=1}^{\infty} \tag{13.60}$$

konstans (zérus) sorozat megoldása (13.43)-nak.
Az előbbiek alapján kimondhatjuk a következő állítást:
Tétel (a másodrendű homogén differenciaegyenlet egyensúlyi helyzetének aszimptotikus stabilitásáról)
Az

$$y(t+2)+p\cdot y(t+1)+q\cdot y(t)=0 \quad ,t=0,1,2,... \qquad (13.61)$$

másodrendű konstant együtthatós homogén lineáris differenciaegyenlet $y=y^*=0$ *egyensúlyi helyzete akkor és csakis akkor aszimptotikusan stabilis, ha a p,q paraméterek (együtthatók) kielégítik a*

$$\begin{cases} -p+q+1>0 \\ p+q+1>0 \\ q<1 \end{cases} \qquad (13.62)$$

egyenlőtlenségek mindegyikét.
Megjegyezzük, hogy az

$$y(t+2)+p\cdot y(t+1)+q\cdot y(t)=0 \quad ,t=1,2,... \qquad (13.63)$$

inhomogén differenciaegyenlet általános megoldása hasonlóan, mint differenciálegyenletek esetén (lásd (4.32)-t) a hozzá tartozó (13.43) homogén differenciaegyenlet (13.46), (13.47) alakú általános megoldása és az inhomogén (13.63) differencia egyenlet egy $\hat{y}(t)$ partikuláris megoldása összegeként adódik:

$$y_{i.á.}(t)=y_{h.á.}(t)+\hat{y}(t)=c_1\lambda_1^t+c_2\lambda_2^t+\hat{y}(t), \qquad (13.64)$$

illetve

$$y_{i.á.}(t)=y_{h.á.}(t)+\hat{y}(t)=(c_1+c_2t)\lambda^t+\hat{y}(t), \qquad (13.65)$$

ahol $c_1,c_2\in R$.
Abban az esetben, ha (13.44) karakterisztikus egyenlete gyökei komplex számok:

$$\lambda_1=a+ib\,;\,\lambda_2=a-ib$$

(csak egyszeres komplex konjugált gyökei lehetnek egy másodfokú egyenletnek), akkor (13.46) szerint homogén differenciaegyenlet általános megoldása a

$$y_{h.á.}(t)=c_1(a+ib)^t+c_2(a-ib)^t \quad ,t=0,1,2,... \qquad (13.66)$$

szorzattal adódik.
Ha áttérünk a (13.66) gyökök trigonometrikus alakjára

$$\lambda_1=a+ib=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \lambda_2=a-ib=r(\cos\varphi-i\sin\varphi),$$

ahol

$$r=|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\varphi=\arg\lambda_1\,,$$

akkor (13.66)-ból

$$y_{h.á.}(t)=c_1r^t(\cos t\varphi+i\sin t\varphi)+c_2r^t(\cos t\varphi+i\sin t\varphi).$$

Az utóbbi kifejezésnek külön-külön a valós és képzetes része megoldása a homogén differenciaegyenletnek (hasonlóképpen differenciálegyenletek esetén lásd a (4.23)-(4.28) formulákat).
Ezért (13.66) komplex gyökök esetén (13.61) homogén differenciaegyenlet általános megoldása:

$$y(t)=y_{h.á.}(t)=c_1r^t\cos t\varphi+c_2r^t\sin t\varphi \quad ,c_1,c_2\in R\,, \qquad (13.67)$$

és (13.63) inhomogén differenciaegyenlet általános megoldása

$$y(t) = y_{i.á.}(t) = c_1 r^t \cos t\varphi + c_2 r^t \sin t\varphi + \hat{y}(t) \quad . \tag{13.68}$$

A (13.64), (13.65), (13.68) képletekben a (13.63) inhomogén differenciaegyenlet egy $\hat{y}(t)$ partikuláris megoldását, hasonlóan, mint differenciálegyenletek esetén (lásd a (4.40), (4.41), (4.49), (4.50), (4.51) formulákat) a határozatlan együtthatók módszerével tudjuk meghatározni.

Ha (13.63)-ban

$$g(t) = \alpha^t \left(h_s t^s + h_{s-1} t^{s-1} + \ldots + h_1 t + h_0 \right),$$

akkor az inhomogén differenciaegyenlet egy partikuláris megoldását az

$\hat{y}(t) = \Bigg\{$	$\alpha^t \left(b_s t^s + b_{s-1} t^{s-1} + \ldots + b_1 t + b_0 \right)$, ha α nem gyöke a (13.44) karakterisztikus polinomnak	(13.69)
	$\alpha^t t^m \left(b_s t^s + b_{s-1} t^{s-1} + \ldots + b_1 t + b_0 \right)$, ha α *m*-szeres gyöke a (13.44)-nek	(13.70)

alakban keressük, ahol a $b_s, b_{s-1}, \ldots, b_1, b_0$ határozatlan együtthatókat (13.63) egyenletbe való behelyettesítéssel határozzuk meg.

13.5 Elsőrendű autonóm nemlineáris differenciaegyenlet stabilitásáról

Tekintsük az

$$y(t+1) = F(y(t)),\ t = 1,2,\ldots \tag{13.71}$$

ún. autonóm elsőrendű differenciaegyenletet, ahol $F : R \to R$ adott függvény. Az „autonóm” szó azt jelenti, hogy a (13.71)-ben a jobb oldal explicit módon nem függ *t*-től.

Tegyük fel, hogy

$$y = y^* \tag{13.72}$$

egyensúlyi helyzete (13.71)-nek, ami azt jelenti, hogy az

$$\{y^*\}_{t=1}^{\infty} \tag{13.73}$$

konstans sorozat megoldása a (13.71)-nek. Ennek szükséges és elégséges feltétele az

$$y^* = F(y^*) \tag{13.74}$$

egyenlőség teljesülése.

Jelölje $y(t, y_1)$ a (13.71) differenciaegyenlet az

$$y(1) = y_1 \tag{13.75}$$

kezdetifeltételhez tartozó megoldását.

A 13.3 pontban adott stabilitási definícióból következik az alábbi definíció.

Definíció (egyensúlyi helyzet stabilitása, aszimptotikus stabilitása, instabilitása)

A (13.71) elsőrendű autonóm differenciaegyenlet $y = y^*$ *egyensúlyi helyzete:*

a) stabilis, ha bármely $\varepsilon > 0$ *-hoz létezik olyan* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *hogy ha*

$$|y_1 - y^*| < \delta \tag{13.76}$$

akkor

$$|y(t, y_1) - y^*| < \varepsilon \tag{13.77}$$

minden t=1,2,... esetén;
b) aszimptotikusan stabilis, ha stabilis, és létezik olyan $\sigma > 0$, *hogy ha*

$$\left| y_1 - y^* \right| < \sigma , \tag{13.78}$$

akkor

$$\lim_{t \to \infty} \left| y(t, y_1) - y^* \right| = 0 ; \tag{13.79}$$

c) instabilis, ha nem stabilis.
A stabilitás szemléltetéséhez rendkívül hasznos az ún. **pókháló diagram**.
Legyen a (13.71) differenciaegyenlet megoldása az

$$y_1 = y(1), y(2), y(3),... \tag{13.80}$$

sorozat, amelyet a következőképpen ábrázolunk.
Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert a síkon, vízszintes tengelyét jelölje y, a függőlegeset z.
Rajzoljuk be a szokásos módon a

$$z = F(y) \tag{13.81}$$

grafikonját.
Mérjük fel a vízszintes tengelyre az előírt y_1 kezdeti értéket.
Állítsunk merőlegest az $(y_1,0)$ pontban vízszintes tengelyre, amely az F függvény grafikonját az

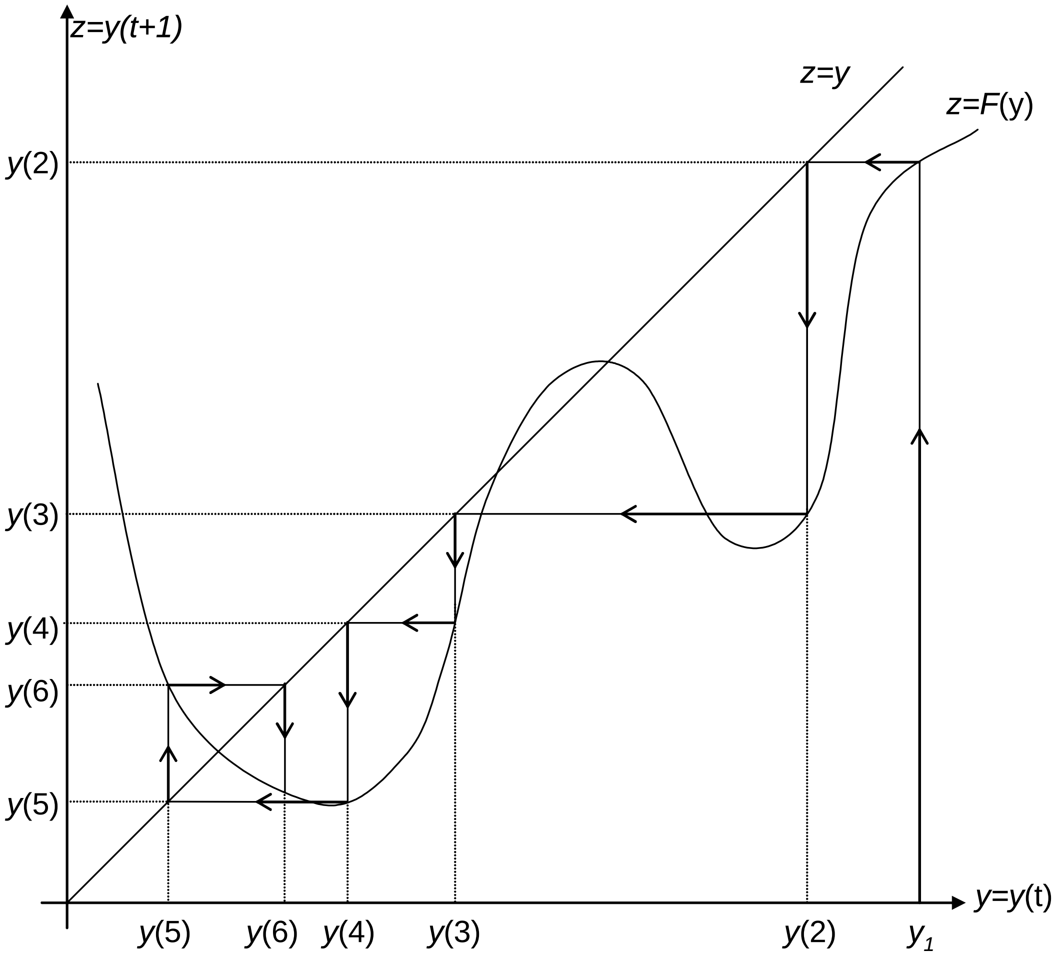
$$(y_1, F(y_1)) = (y_1, y(2))$$

pontban metszi.

Húzzunk ebből a pontból vízszintest az $y = z$ szögfelező egyenesig, a metszéspont ekkor $(y(2), y(2))$.
Ha ebből a pontból függőlegest húzunk a $z = F(y)$ grafikonig, akkor az

$$(y(2), F(y(2)) = (y(2), y(3)))$$

pontot kapjuk.
Ezt az eljárást folytatva, mindkét tengelyen megkapjuk a megoldássorozatot. Ez az ún. **pókháló diagram.**



13.2 ábra

A nemlineáris (13.71) alakú differenciaegyenlet egyensúlyi helyzetének stabilitását, hasonlóan mint differenciálegyenletek esetén az ún. **első közelítés (linearizálás)** módszerével vizsgálhatjuk.

Tétel (a linearizálás módszerével végzett stabilitás vizsgálat)

Tegyük fel, hogy (13.71) differenciaegyenletben a F függvény differenciálható az $y = y^*$ *egyensúlyi pont egy környezetében, és* F' *folytonos az* $y = y^*$ *pontban (tudjuk, hogy* $F(y^*) = y^*$*).*

a) Ha

$$|F'(y)| < 1, \qquad (13.82)$$

akkor az $y = y^*$ *egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabilis;*

b) Ha

$$|F'(y)| > 1, \qquad (13.83)$$

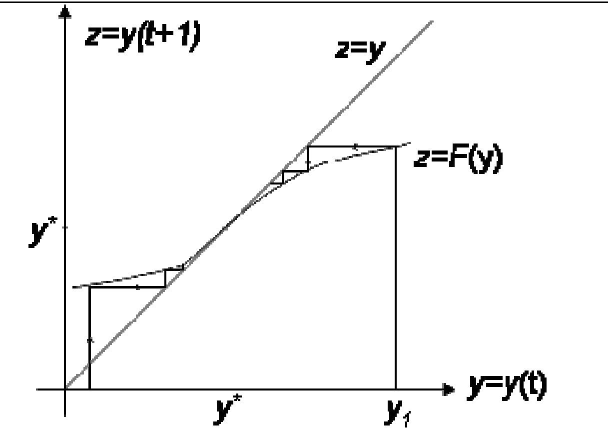
akkor az egyensúlyi helyzet instabilis.

c) Ha

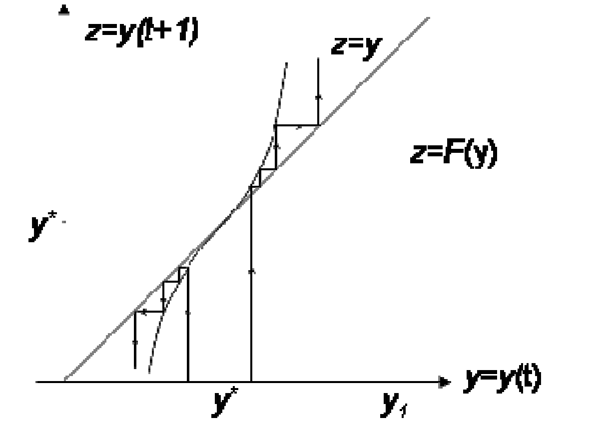
$$|F'(y)| = 1, \qquad (13.84)$$

akkor az egyensúlyi helyzet lehet stabilis, vagy instabilis. (Az első derivált alapján nem lehet dönteni stabilitásról. Ekkor a magasabb deriváltakra is szükség van, lásd [1,139. old])

A c) állítást egy pókháló diagramon szemléltetjük (lásd 13.3, 13.4 ábrákat, [1], 138 old.)



13.3 ábra (stabilis)



13.4 ábra (instabilis)

14. Egyes differenciaegyenletes gazdasági modellek

14.1 A banki kölcsön törlesztésének modellje [1, 126. old]

Tegyük fel, hogy felveszünk a bankban p_0 kölcsönt, amit időszakos (havi, vagy negyedéves, vagy éves időszakonként) törlesztünk. A törlesztés egy része kamat kifizetése, a másik része a p_0 tőkét csökkenti.
Készítsünk **matematikai modellt** a folyamatra.
Jelölje $p(n)$ az n-edik fizetés utáni tőketartozás nagyságát. Az n-edik alkalommal befizetett összeget jelölje $g(n)$. Tegyük fel, hogy az egy visszafizetési periódusra eső kamatláb r %. Ekkor az $(n+1)$-edik periódus elteltével, azaz az $(n+1)$-edik fizetés megtörténte után a fennmaradó $p(n+1)$ tőketartozás összetevődik az n-edik periódus utáni $p(n)$ tőketartozásból, annak $\frac{r \cdot p(n)}{100}$ egység kamatából, csökkentve ezek összegét a $g(n)$ befizetési összeggel:

$$p(n+1) = p(n) + \frac{r \cdot p(n)}{100} - g(n), \tag{14.1}$$

vagyis

$$p(n+1) = \left(1 + \frac{r}{100}\right) \cdot p(n) - g(n), \quad p(0) = p_0 \ . \tag{14.2}$$

A (14.2) egyenlet egy (13.25) alakú lineáris elsőrendű konstans együtthatójú inhomogén differenciaegyenlet, amelynek megoldása a (13.26) formula szerint

$$p(n) = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \cdot p_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-k-1} \cdot g(k), \quad n = 1,2,... \ , \tag{14.3}$$

A gyakorlatban a visszatérítési részlet állandó:

$$g(n) = \mathrm{T}, \quad n = 1,2,... \ . \tag{14.4}$$

Ekkor a (13.28) formulát használva kapjuk, hogy

$$p(n) = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \cdot p_0 - \left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1\right] \cdot \left(\frac{100 \cdot \mathrm{T}}{r}\right). \tag{14.5}$$

Ha a felvett kölcsönt az adott N-edik periódus végéig kell visszatéríteni, akkor nyilván (14.5) alapján a

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^N \cdot p_0 - \left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^N - 1\right] \cdot \left(\frac{100 \cdot \mathrm{T}}{r}\right) = 0 \tag{14.6}$$

összefüggésnek kell teljesülnie.
Tehát ha előre rögzítjük a kölcsön futamidejét, akkor az egy periódusra eső részlet:

$$\mathrm{T} = p_0 \cdot \frac{r}{100} \cdot \frac{1}{1 - \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{-N}} \quad . \tag{14.7}$$

14.2 A kereslet-kínálat pókhálómodellje (a piaci egyensúly)

Az 1.2 alfejezetben már szóba került egy áru piacának kétféle dinamikus matematikai modellje – az (1.16) differenciaegyenletes, illetve az (1.30) differenciálegyenletes.

A piac dinamikáját a kereslet és a kínálat kölcsönhatása határozza meg. A piac akkor működik jól, ha a kereslet és a kínálat dinamikus egyensúlyban van, vagyis ha ezek kioltják egymást, és kialakul egy egyensúlyi, vagy ahhoz közeli ár (ez a stabilitás).
Ismeretes, hogy a kereslet és a kínálat egy szabadversenyes piacgazdaságban az áron keresztül hat egymásra. Ha az áru ára nő, akkor az iránta mutatkozó kereslet csökken, az áru kínálata viszont nő.
Vizsgáljuk először a statikus modellt. A statikus modellben a D keresletre, S kínálatra és P árra vonatkozó összefüggéseket (1.14)-ből kapjuk, ha a második egyenletben $P(t$-1) helyébe $P(t)$-t írunk. Tehát egy rögzített t időpontban

$$D = a - b \cdot P \ , \tag{14.8}$$

$$S = -c + d \cdot P \ , \tag{14.9}$$

ahol a, b, c, d pozitív konstansok. A piac akkor van egyensúlyban, ha a kereslet és a kínálat megegyezik

$$D = S \ . \tag{14.10}$$

Ekkor

$$a - b \cdot P = -c + d \cdot P \ , \tag{14.11}$$

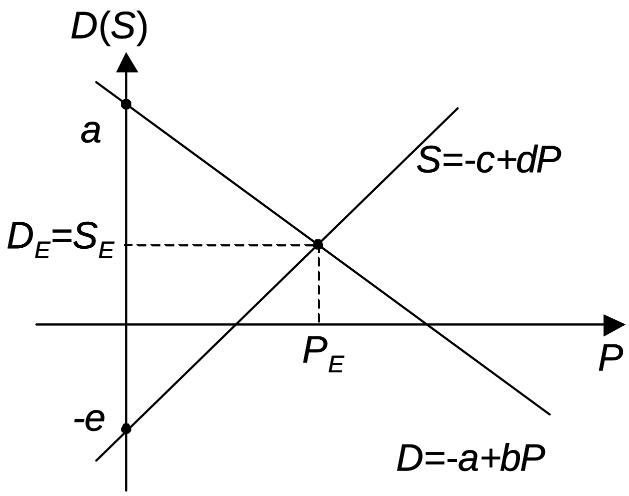
amelyből megkapjuk az egyensúlyi árat

$$P = P_E = \frac{a+c}{b+d} \ , \tag{14.12}$$

és (14.8),(14.9)-ből pedig megkapjuk a D_E egyensúlyi kereslet és S_E egyensúlyi kínálat mennyiségét:

$$D_E = S_E = \frac{ad - bc}{b+d} \ . \tag{14.13}$$

A (14.8), (14.9)-ben szereplő **négy paraméter közgazdasági tartalma** a következő:
a – az ártól független **kereslet**;
b – egységnyi árnövekedés hatására bekövetkező **keresletcsökkenés**;
c – az ártól független **kínálat**;
d – egységnyi árnövekedés hatására bekövetkező **kínálatnövekedés**.
Tehát, ha a piac egyensúlyban van, akkor (14.12), (14.13) teljesül.
A $(P, D(S))$ síkon a (14.12), (14.13) egyensúlyi pontokat a (14.8), (14.9) egyenletekkel adott egyenesek metszési pontja határozza meg (lásd a 14.1 ábrát).



14.1 ábra

Azonban a valóságban az ideális egyensúlyi állapot mindig sérül, a **piac kibillen az egyensúlyi állapotból.** Ekkor beindul egy **korrekciós visszacsatolási folyamat** a kereslet-kínálat-ár kölcsönhatásának révén.
Az egyensúlyi helyzet stabilis, ha ez a folyamat az egyensúlyi állapot felé tereli a rendszert, instabilis, ha attól egyre távolabb juttatja.
Ezt a korrekciós folyamatot egyes közgazdászok egymástól eltérő módon képzelték el.
Például, **Marshall szerint elsősorban az S kínálat változtatásával reagálnak a szereplők a piac ingadozására**:

ha $S>D$, akkor a kínálat csökken,

ha $S<D$, akkor a kínálat nő. (14.14)

Walras szerint a piac szereplői az árakat módosítják:

ha $P<P_E$, akkor az eladó emeli az árat,

ha $P>P_E$, akkor az eladó csökkenti az árat. (14.15)

Vizsgáljuk most a kereslet-kínálat dinamikus modelljét, melyet az (1.14)-(1.15) formulák szolgálnak.
Írjuk át az (1.16) egyenletet az alábbi alakban:

$$P(t+1) = -A \cdot P(t) + B\,, \quad t = 0,1,2,... \quad , \tag{14.16}$$

ahol $P(t)$ - a t-edik időperiódusban kialakult aktuális ár,

$$A = \frac{d}{b} > 0\,, \quad B = \frac{a+c}{b} > 0\,. \tag{14.17}$$

A (14.16) egyenlet nem más, mint a (13.27) alakú konstans együtthatójú elsőrendű lineáris differenciaegyenlet, amelynek a megoldását a (13.28) formula szerint kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} P(t) &= (-A)^t \cdot P_0 + B \cdot \frac{1-(-A)^t}{A+1} = (-A)^t \cdot \left[P_0 - \frac{B}{A+1}\right] + \frac{B}{A+1} = \\ &= \left(-\frac{d}{b}\right)^t \left[P_0 - \frac{a+c}{d+b}\right] + \frac{a+c}{d+b}\,. \end{aligned} \tag{14.18}$$

A (14.18) formulából (14.12) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$P(t) = \left(-\frac{d}{b}\right)^t \cdot [P_0 - P_E] + P_E\,, \quad t = 0,1,2,... \tag{14.19}$$

ahol $P_0 = P(0)$ a kezdeti ár, P_E pedig a (14.12) egyensúlyi ár.
A (14.19) formulából látható, hogy a b illetve a d konstans azt mutatja, hogy a kereslet, illetve a kínálat mennyire rugalmasan reagál az árváltozásokra.
Ha ennek megfelelően az

$$m_D = b\,, \quad m_S = d \tag{14.20}$$

jelöléseket használjuk, és ezeket a konstansokat rugalmassági együtthatóknak nevezzük, akkor a (14.19) megoldás a következő alakot ölti:

$$P(t) = \left(-\frac{m_S}{m_D}\right)^t \cdot [P_0 - P_E] + P_E\,, \quad t = 0,1,2,... \tag{14.21}$$

Tehát ha a kereslet rugalmasabb, mint a kínálat, akkor a $P(t)$ ár az egyensúlyi ár körül oszcillálva, az egyensúlyi árhoz tart, és ekkor a P_E ár stabilis:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P_E\,, \text{ ha } m_D > m_S\,, \text{ (stabilis)} \tag{14.22}$$

(lásd az (1.23) formulát is).
Ha a kínálat rugalmasabb, mint a kereslet, akkor a $P(t)$ ár oszcillál az egyensúlyi ár körül, de az oszcilláció amplitúdói nőnek, és végtelenbe tartanak, és ekkor az ár instabilis:

$$\lim_{t\to\infty}|P(t)| = \infty \text{ , ha } m_S > m_D \text{ , (instabilis)} \tag{14.23}$$

(lásd az (1.24) formulát szintén).
Végül, ha a kereslet és a kínálat egyformán rugalmasak ($m_S = m_D$), akkor a $P(t)$ periodikusan változik T=2 periódussal:

$$P(t) = \begin{cases} P_E + (P_0 - P_E) = P_0 \text{ , ha } t \text{ páros} \\ P_E - (P_0 - P_E) = 2P_E - P_0 \text{ , ha } t \text{ páratlan} \end{cases}, \; m_S = m_D \text{ (periodikus)} \tag{14.24}$$

azaz

$$\{P(t)\}_{t=0}^{\infty} = \{P_0,\, 2P_E - P_0,\, P_0,\, 2P_E - P_0,...\}\,, \tag{14.25}$$

(lásd az (1.25) formulát).
Ugyanehhez az eredményhez egy nagyon egyszerű geometriai eljárással, (a kereslet-kínálat ún. pókhálómodellje által) is eljutunk.
Ábrázoljuk a (P, Q) koordinátarendszerben a

$$Q = a + b \cdot P \tag{14.26}$$

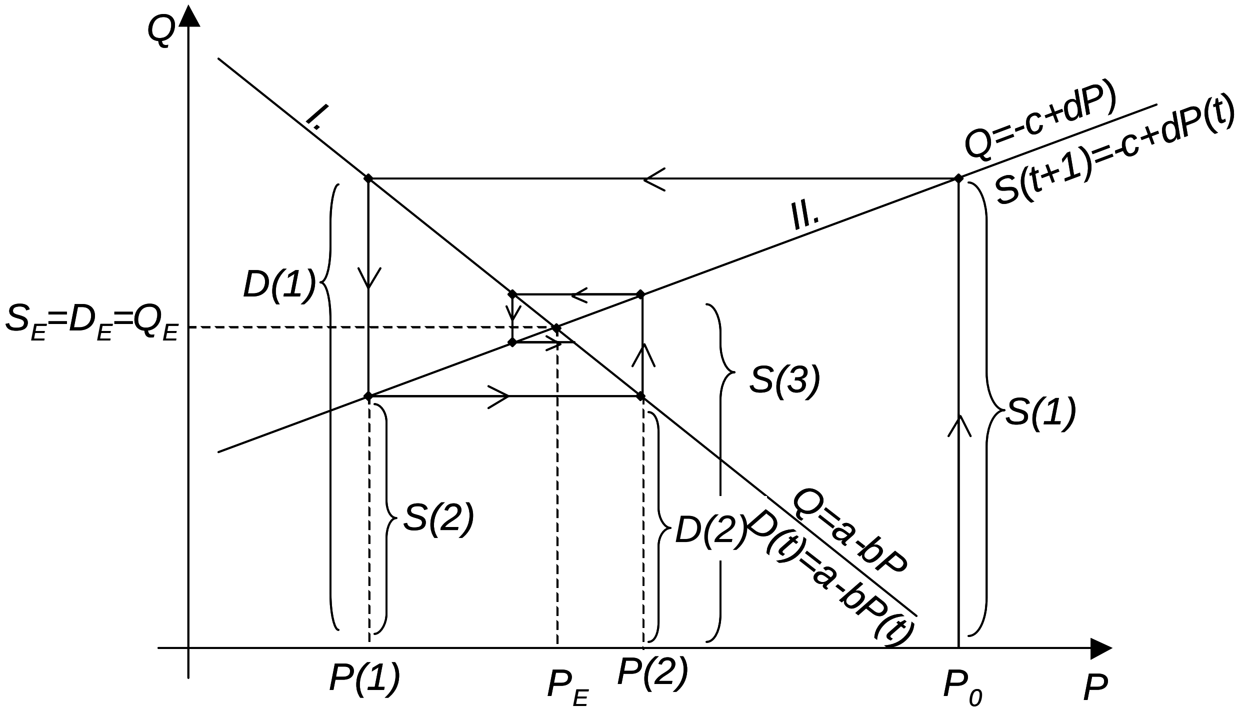
$$Q = -c + d \cdot P \tag{14.27}$$

egyeneseket, amelyek az (1.14)

$$D(t) = a - b \cdot P(t)\,, \tag{14.28}$$

$$S(t+1) = -c + d \cdot P(t) \tag{14.29}$$

modellegyenletek szerint az **kereslet-ár**, illetve a **kínálat-ár viszonyt** ábrázolják.



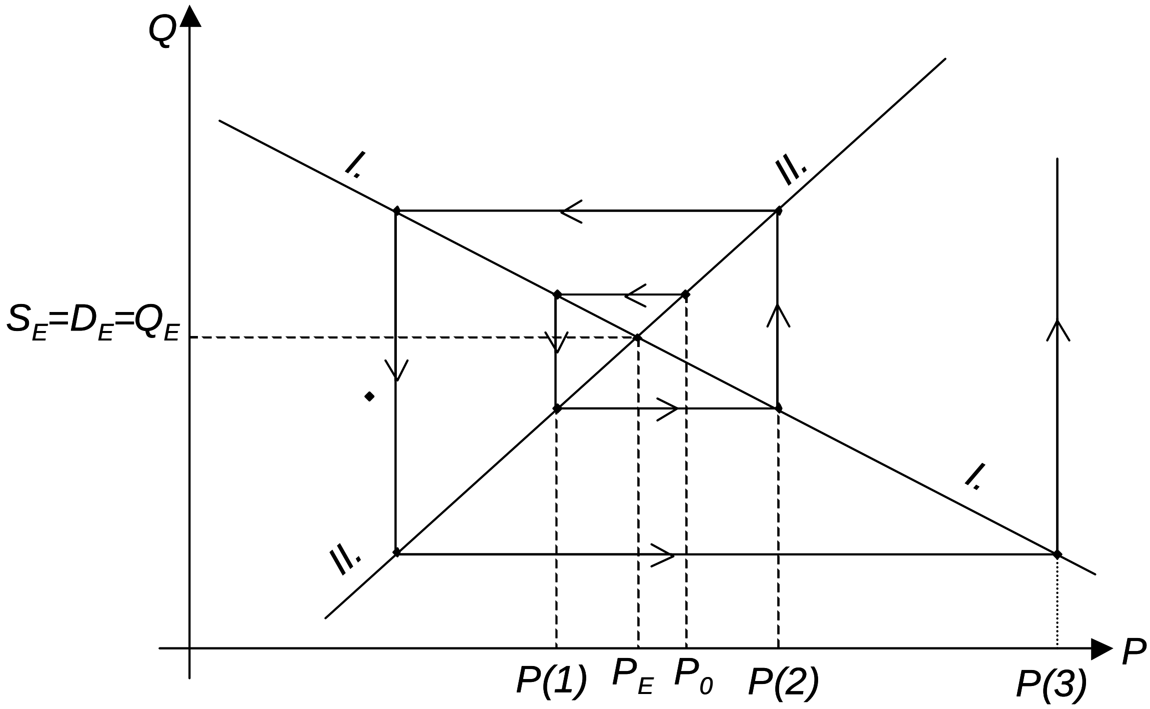
14.2 ábra

Induljunk ki a P_0 kezdeti árból. Ez meghatározza az $S(1)$ kínálatot, ha figyelembe vesszük a (14.29) egyenletet. Valóban emeljünk egy merőlegest a P_0 pontból a vízszintes tengelyre. Akkor a merőlegesnek a P_0 és a II. egyenes közötti darabjának a hossza adja $S(1)$ értékét (14.29) szerint.

Mivel a

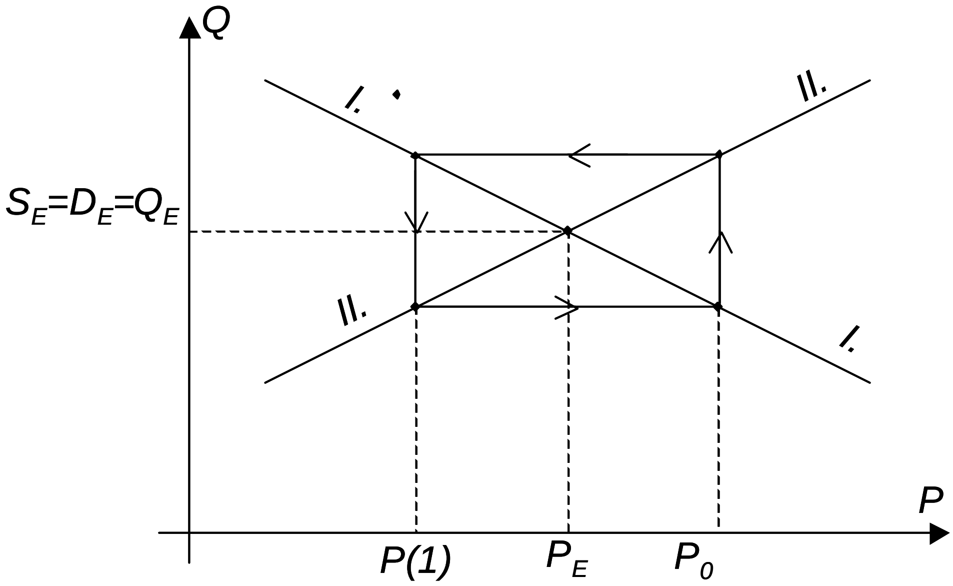
$$D(1) = S(1) \tag{14.30}$$

egyenletnek teljesülnie kell, a $P(1)$ árat úgy kapjuk, hogy a II. egyenes pontjából vízszintesen átmegyünk az I. egyenesre ($D(1) = S(1)$), az így kapott pont abszcisszája a $P(1)$ ár. Ez meghatározza az $S(2)$ kínálatot: az I. egyenes pontjából függőlegesen menjünk át a II. egyenesre.
Mivel $D(2) = S(2)$, ezért innen vízszintesen menjünk át az I. egyenesre, az így kapott pont abszcisszája $P(2)$, mi meghatározza $S(3)$-at.
Ha ezt az eljárást folytatjuk, akkor egy „pókháló-görbét" kapunk.
Geometriailag nyilvánvaló, ha $d < b$, vagyis $m_S < m_D$, akkor a kapott görbe a (P_E, Q_E) pontra „tekeredik" rá (az egyensúly stabilis), lásd a 14.2 ábrát ([1], 131 old.).
Ha $m_S > m_D$, akkor a kapott spirális távolodik az egyensúlyi ponttól (az egyensúly instabilis), lásd a 14.3 ábrát ([1], 132 old.) .



14.3 ábra

Ha $m_S = m_D$, akkor a kapott görbe záródik, azaz egy téglalapot kapunk az egyensúlyi pont körül, lásd a 14.4 ábrát([1], 132 old.) (periodikus eset).



14.4 ábra

A szóban forgó kereslet-kínálat piaci modell tovább finomítható (lásd [1, 131-132 old.]).

14.3 Goodwin piacmodellje

A 14.2 alfejezetben tárgyalt piacmodell egyenlete a

$$P(t+1) = -\frac{d}{b}P(t) + \frac{a+c}{b} \tag{14.31}$$

elsőrendű lineáris inhomogén differenciaegyenlet volt, amelyet a

$$D(t) = a - b \cdot P(t)\ , \tag{14.32}$$

$$S(t+1) = c + d \cdot P(t)\ , \tag{14.33}$$

modellegyenletekből kaptunk a

$$D(t) = S(t) \tag{14.34}$$

feltétel alapján.

Javítsuk modellünket. Tegyük fel, hogy a kínálat úgy reagál az árak változására, hogy a $(t+1)$-edik periódusra várható $\widetilde{P}(t+1)$ár kalkulálásánál az árak alakulásában az periódussal korábban tapasztalt tendenciát veszi figyelembe:

$$\widetilde{P}(t+1) = P(t) + \rho\left[P(t) - P(t-1)\right]\ , \tag{14.35}$$

ahol ρ az ún. várhatósági együttható.

Ekkor (14.33)-ba $P(t)$ helyébe a

$$P(t) := P(t) + \rho \cdot \left[P(t) - P(t-1)\right] = (t+\rho)\cdot p(t) - \rho \cdot P(t-1)$$

kifejezés kerül.

Modellünk ekkor (14.32), (14.33) helyett a

$$D(t) = a - b \cdot P(t) \tag{14.36}$$

$$S(t+1) = -c + d \cdot \left[P(t) + \rho \cdot \left(P(t) - P(t-1)\right)\right] \tag{14.37}$$

alakot ölti. A $P(t)$ ár most is (14.34) feltételből adódik:

$$a - b \cdot P(t) = -c + d \cdot \left[(1+\rho)P(t-1) - \rho \cdot P(t-2)\right]\ ,$$

vagyis

$$P(t)+\frac{d(1+\rho)}{b}P(t-1)-\frac{d\rho}{b}P(t-2)=\frac{c+a}{b}\ , \tag{14.38}$$

amelyet **Goodwin-féle piac modellnek nevezünk**.
A (14.38) összefüggés a (13.63) típusú másodrendű állandó együtthatójú lineáris inhomogén differenciaegyenlet:

$$P(t)+p\cdot P(t-1)+q\cdot P(t-2)=r\ , \tag{14.39}$$

ahol

$$p=\frac{d(1+\rho)}{b}=\frac{m_S}{m_D}(1+\rho)\ ;\ q=-\frac{d\cdot\rho}{b}=-\frac{m_S}{m_D}\cdot\rho\ ;\ r=\frac{c+a}{b}=\frac{c+a}{m_D}\ . \tag{14.40}$$

A (14.39) differenciaegyenlet egyensúlyi helyzete az a

$$P=P^*\ , \tag{14.41}$$

melyre a $\{P^*\}_{t=1}^{\infty}$ konstans sorozat megoldása (14.39)-nek.
Az egyensúlyi ár

$$P^*=\frac{r}{1+p+q}=\frac{c+a}{m_D+m_S}\ . \tag{14.42}$$

A (13.62) formulából ismeretes, hogy a (14.42) egyensúlyi helyzet aszimptotikus stabilitásának szükséges és elégséges feltétele a

$$\begin{cases} p+q+1=\dfrac{m_S}{m_D}+1>0 \\ -p+q+1=1-(1+2\rho)\dfrac{m_S}{m_D}>0 \\ q<1\rightarrow 1+\dfrac{m_S}{m_D}\rho>0 \end{cases} \tag{14.43}$$

egyenlőtlenségek együttes teljesülése.
Az első egyenlőtlenség automatikusan teljesül. Az utolsó két egyenlőtlenségből álló rendszer megoldása a következő .
Ha $\rho\geq 0$:

$$\frac{m_S}{m_D}<\frac{1}{1+2\rho}\ , \tag{14.44}$$

Ha $\rho<0$:

$$\frac{m_S}{m_D}<-\frac{1}{\rho}\ \text{, és }\ \frac{m_S}{m_D}<\frac{1}{1+2\rho}\ \text{, ha }\ \rho>-\frac{1}{2}\ . \tag{14.45}$$

Tehát (14.44), (14.45) alapján a megoldás:

$$\frac{m_S}{m_D}<\begin{cases} \dfrac{1}{1+2\rho} & ,\ \text{ha } \rho\geq 0 \\ \min\left\{-\dfrac{1}{\rho};\dfrac{1}{1+2\rho}\right\} & ,\ \text{ha } -\dfrac{1}{2}<\rho\leq 0\ , \\ -\dfrac{1}{\rho} & ,\ \text{ha } \rho\leq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{14.46}$$

vagyis

$$\frac{m_S}{m_D} < \begin{cases} \dfrac{1}{1+2\rho} & , \quad \text{ha } \rho \geq 0 \\ -\dfrac{1}{\rho} & , \quad \text{ha } \rho \leq -\dfrac{1}{3} \end{cases} . \tag{14.47}$$

Eredményünk azt mutatja, hogy a **kínálatnak ez a stratégiája lényegesen stabilizálja a piaci egyensúlyt.**
A (14.32), (14.33) modellegyenletekkel alkotott modell a $\rho = 0$ választásnak felel meg és mint láttuk, akkor

$$\frac{m_S}{m_D} < 1 \tag{14.48}$$

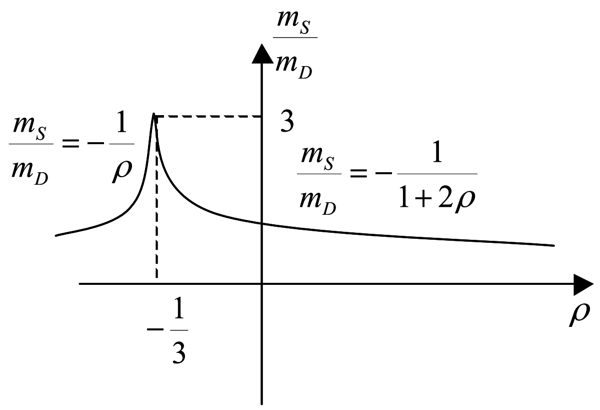
az aszimptotikus stabilitás feltétele.
A legjobb a

$$\rho = -\frac{1}{3} \tag{14.49}$$

választás a várakozási együtthatóra, mert ekkor a sokkal enyhébb

$$\frac{m_S}{m_D} < 3 \tag{14.50}$$

is garantálja az aszimptotikus stabilitást (lásd a 14.5 ábrát , [1], 175 old.).



14.5 ábra

14.4 Samuelson differenciaegyenletes modelljének megoldása

A 12.1 alfejezetben egy ország makrogazdaságának fejlődésére vonatkozó **Samuelson-féle differenciaegyenletes modelljét állítottuk elő** (12.11) alakban:

$$Y(t) = \alpha(1+\beta)Y(t-1) - \alpha\beta Y(t-2) + 1 \quad , t = 2,3,4,... \tag{14.51}$$

ahol $Y(t)$ a t-edik periódus bruttó nemzeti jövedelme, α a fogyasztási határhajlandóság, β egy viszonyszám, ami a beruházás és a fogyasztásnövekedés arányát fejezi ki.
Bevezetve a

$$y(t) := Y(t-2) \tag{14.52}$$

jelölést (14.51) az

$$y(t+2) - \alpha(1+\beta)y(t+1) + \alpha\beta y(t) = 1 \quad , t = 1,2,... \tag{14.53}$$

alakot ölti.
Oldjuk meg (lásd [1], 167 old.) a (14.52) másodrendű differenciaegyenletet, ha

$$\alpha = 0{,}5\,;\ \beta = 1\,,\quad y(1) = y_1 = 2\,,\quad y(2) = y_2 = 3\,. \tag{14.54}$$

Először keressük a megfelelő homogén differenciaegyenlet

$$y(t+2) - y(t+1) + \frac{1}{2}y(t) = 0 \quad ,\ t = 1,2,... \tag{14.55}$$

megoldását.
Ez esetben (13.44) karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0 \tag{14.56}$$

és a karakterisztikus gyökök

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} \quad ,\ \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\ . \tag{14.57}$$

Képzetes gyökök esetén a (14.55) homogén differenciaegyenlet megoldása (13.67) szerint

$$y_{h.á.}(t) = c_1 r^t \cos t\varphi + c_2 r^t \sin t\varphi \quad ,\ c_1, c_2 \in R \tag{14.58}$$

ahol

$$r = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi = \arg\lambda_1 = \frac{\pi}{4} \qquad .$$

Tehát

$$y_{h.á.}(t) = c_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \cos\frac{\pi}{4}t + c_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \sin\frac{\pi}{4}t \quad ,\ t = 1,2,... \qquad . \tag{14.59}$$

Mivel a (14.53) inhomogén differenciaegyenletben a jobb oldalon álló zavarófüggvény konstans

$$g(t) = 1, \tag{14.60}$$

ezért (13.69) szerint a (14.53) inhomogén differenciaegyenlet partikuláris megoldásának alakja (mivel $1 = \alpha$ nem karakterisztikus gyök):

$$\tilde{y}(t) = b_0\,. \tag{14.61}$$

Behelyettesítve (14.53) kapjuk, hogy

$$b_0 - b_0 + \frac{1}{2}b_0 = 1 \quad \to \quad b_0 = 2 \quad \to \quad \tilde{y}(t) = 2\ . \tag{14.62}$$

Tehát (13.68) alapján az inhomogén differenciaegyenlet általános megoldása:

$$y_{i.á.}(t) = y_{h.á.}(t) + \hat{y}(t) = c_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \cos\frac{\pi}{4}t + c_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \sin\frac{\pi}{4}t + 2 \quad ,\ t = 1,2,...\ . \tag{14.63}$$

A (14.63) általános megoldásból megkapjuk az

$$y(1) = 2 \quad ,\ y(2) = 3 \tag{14.64}$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldást.

$$t=1: c_1\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}+c_2\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{4}+2=2 \qquad c_1\frac{1}{2}+c_2\frac{1}{2}+2=2 \qquad c_1=-2$$
$$\rightarrow \qquad\qquad \rightarrow$$
$$t=2: c_1\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}+c_2\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+2=3 \qquad c_1\cdot 0+c_2\frac{1}{2}+2=3 \qquad c_2=2 \quad .$$

Vagyis a (14.53), (14.54) inhomogén differenciaegyenlet megoldása

$$y(t)=-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t\cos\frac{\pi}{4}t+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t\sin\frac{\pi}{4}t+2 \quad . \tag{14.65}$$

A (14.65) megoldás összhangban van a 12.1 táblázatban található eredményekkel. Látható, hogy

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=2 \quad . \tag{14.66}$$

azaz a megoldás 2 körül oszcillálva 2-höz tart. Ekkor a gazdaság stabilis.
Nézzük most az

$$\alpha=0{,}8\,;\ \beta=2\,,\quad y(1)=2\,,\quad y(2)=3 \tag{14.67}$$

esetet:

$$y(t+2)-2{,}4y(t+1)+1{,}6y(t)=1 \quad . \tag{14.68}$$

Hasonlóképpen a karakterisztikus egyenlet és gyökei:

$$\lambda^2-2{,}4\lambda+1{,}6=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=1{,}2+i\cdot 0{,}4\,,\quad \lambda_2=1{,}2-i\cdot 0{,}4\,. \tag{14.69}$$

A homogén egyenlet általános megoldása (14.58) szerint

$$r=|\lambda_1|=\sqrt{(1{,}2)^2+(0{,}4)^2}=\sqrt{1{,}6}\,,\quad \varphi=\arg\lambda_1=\operatorname{arctg}\frac{0{,}4}{1{,}2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \tag{14.70}$$

esetén

$$y_{h.á.}(t)=c_1\left(\sqrt{1{,}6}\right)^t\cdot\cos\left(t\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+c_2\left(\sqrt{1{,}6}\right)^t\sin\left(t\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) \quad . \tag{14.71}$$

A (14.53), (14.67) inhomogén differenciaegyenlet partikuláris megoldásának alakja újra (14.61), melyből

$$b_0-2{,}4b_0+1{,}6b_0=1 \quad\rightarrow\quad b_0=5\,.$$

Vagyis a (14.53), (14.67) differenciaegyenlet általános megoldása:

$$y_{i.á.}(t)=y_{h.á.}(t)+\hat{y}(t)=c_1\left(\sqrt{1{,}6}\right)^t\cos\left(t\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+c_2\left(\sqrt{1{,}6}\right)^t\sin\left(t\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+5\,. \tag{14.72}$$

A (14.72) általános megoldásból könnyen megkapjuk a (14.64) kezdeti feltételt kielégítő megoldást:

$$t=1 \ :\ c_1\sqrt{1{,}6}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+c_2\sqrt{1{,}6}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+5=2$$
$$\rightarrow$$
$$t=2 \ :\ c_1\cdot 1{,}6\cdot\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+c_2\cdot 1{,}6\cdot\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+5=3$$

$$\rightarrow c_1=\bar{c}_1 \quad , \quad c_2=\bar{c}_2\,.$$

Tehát az inhomogén differenciaegyenlet keresett partikuláris megoldása

$$y(t)=\bar{c}_1\left(\sqrt{1{,}6}\right)^t\cos\left(t\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+\bar{c}_2\left(\sqrt{1{,}6}\right)^t\sin\left(t\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+5\,. \tag{14.73}$$

A (14.73) megoldás is összhangban van a 12.1 táblázat második oszlopával. Látható, hogy

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \infty \ ,$$

azaz a megoldás a végtelenbe tart, oszcillálva 5 körül. **Ez esetben a gazdaság instabilissá válik és összeomlik.**

Nyilvánvaló, hogy léteznek olyan α és β értékek, melyekre a megoldás (13.64) alapján nem oszcilláló lesz, és a gazdaság stabilisan viselkedik.

Ismervén a (13.61) alakú másodrendű differenciaegyenlet $y^* = 0$ egyensúlyi helyzete aszimptotikus stabilitásának szükséges és elégséges (13.62) feltételét, fel tudjuk írni a (14.53) egyenlet

$$y^* - \alpha(1-\beta)y^* + \alpha\beta y^* = 1 \quad \to \quad y^* = \frac{1}{1-\alpha} \tag{14.74}$$

egyensúlyi helyzetének aszimptotikus stabilitási feltételét.

A (14.74) **egyensúlyi helyzet akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis**, ha (13.62) alapján:

$$\begin{cases} p + q + 1 = -\alpha(1+\beta) + \alpha\beta + 1 = -\alpha + 1 > 0 \\ -p + q + 1 = \alpha(1+\beta) + \alpha\beta + 1 = 2\alpha\beta + \alpha + 1 > 0 \\ 1 - q = 1 - \alpha\beta > 0 \end{cases} , \tag{14.75}$$

vagyis ha

$$\alpha < 1 \text{ és } \alpha\beta < 1 \ . \tag{14.76}$$

Ez összhangban van azzal a tapasztalatunkkal, hogy az $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1$ eset aszimptotikusan stabilis, az $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 2$ viszont instabilis.

Az is fontos közgazdasági szempontból, hogy a nemzeti jövedelem mikor oszcillál az egyensúlyi pont körül.

Ennek a kérdésnek a megválaszolása is a karakterisztikus gyökökön múlik. Az egyenletnek akkor és csakis akkor oszcillálnak a megoldásai (lásd a (13.46), (13.67) formulákat), ha λ_1, λ_2 képzetes, vagy λ_1, λ_2 negatív.

Az első eset a

$$p^2 - 4q = \alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta < 0 ,$$

vagyis az

$$\alpha < 4p(1+\beta)^2 \tag{14.77}$$

feltétel teljesülésével következik be.

A **második esetben**

$$-p + \sqrt{p^2 - 4q} < 0 \ ,$$

vagyis

$$p > 0 , \quad q > 0 \ ,$$

amelyből $p = -\alpha(1+\beta)$ lehetetlen.

Tehát azt kaptuk, hogy a (14.53) egyenletünk **minden megoldása akkor és csakis akkor oszcilláló, ha (14.77) teljesül.**

14.5 Hicks akcelerációs modellje

A 12.1 alfejezetben ismertetett **Samuelson-féle akcelerációs modellben a kiinduló közgazdasági axiómák a következők voltak:**

$$C(t)=\alpha\cdot Y(t-1)\ , \tag{14.79}$$

$$I(t)=\beta\cdot[C(t)-C(t-1)]\ , \tag{14.80}$$

$$Y(t)=C(t)+\dot{I}(t)+G(t)\ , \tag{14.81}$$

$$G(t)=1\qquad , \tag{14.82}$$

ahol $Y(t)$ a **teljes nemzeti jövedelmet**, $C(t)$ a **fogyasztást**, $\dot{I}(t)$ az **egyéni beruházást**, $G(t)$ a **központi kiadásokat** jelöli a *t*-edik periódusban. Az α arányossági együtthatót a közgazdaságtanban **fogyasztási határhajlandóságnak**, a β arányossági együtthatót pedig **beruházási viszonyszámnak nevezik.**

Samuelson modelljével szemben Hicks azt tételezte fel, hogy a $C(t)$ fogyasztás, illetve az $I(t)$ egyéni beruházás *t*-edik periódusbeli aktuális értéke nem az előző periódus nemzeti jövedelmétől, illetve fogyasztásnövekedésétől, hanem a megelőző *n* periódus ilyen adataitól függ. Vagyis a nemzeti jövedelem, illetve a fogyasztás-változás hatása nem csak a következő periódusban, hanem *n* perióduson át érződik $(1\le n\in N)$.

Ez azt jelenti, hogy **Hicks modelljében** (14.79), (14.80) helyett **a következő axiómák szerepelnek:**

$$C(t)=\alpha_1 Y(t-1)+\alpha_2 Y(t-2)+\ldots+\alpha_n Y(t-n)\ , \tag{14.83}$$

$$I(t)=\beta_1[C(t)-C(t-1)]+\beta_2[C(t-1)-C(t-2)]+\ldots+\beta_n[C(t-n+1)-C(t-n)] \tag{14.84}$$

ahol $\alpha_1,\ldots,\alpha_n>0\quad,\quad\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n>0$ és

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\alpha\quad,\quad\sum_{i=1}^{n}\beta_i=1\ . \tag{14.85}$$

Ha a (14.83), (14.84), (14.82) értékekkel felírjuk a (14.81) egyensúlyi egyenletet, akkor az $Y(t)$ nemzeti jövedelemre egy $(n+1)$**-edrendű differenciaegyenletet kapunk** (Samuelson modelljében a (12.11) egyenlet másodrendű differenciaegyenlet volt).

Írjuk fel a **Hicks-egyenletet** $n=2$ **esetén.**

Ekkor

$$\begin{aligned}
&C(t)=\alpha_1 Y(t-1)+\alpha_2 Y(t-2)\ ,\\
&I(t)=\beta_1[C(t)-C(t-1)]+\beta_2[C(t-1)-C(t-2)]\ ,\\
&Y(t)=\alpha_1 Y(t-1)+\alpha_2 Y(t-2)+\beta_1[C(t)-C(t-1)]+\beta_2[C(t-1)-C(t-2)]=\\
&=\alpha_1 Y(t-1)+\alpha_2 Y(t-2)+\beta_1[\alpha_1 Y(t-1)+\alpha_2 Y(t-2)-\alpha_1 Y(t-2)-\alpha_2 Y(t-3)]+\\
&+\beta_2[\alpha_1 Y(t-2)+\alpha_2 Y(t-3)-\alpha_1 Y(t-3)-\alpha_2 Y(t-4)]+1
\end{aligned} \tag{14.86}$$

Algebrai átalakításokkal (14.86)-ból kapjuk az

$$\begin{aligned}
&Y(t)=\alpha_1(1+\beta_1)Y(t-1)+[\alpha_2(1+\beta_1)-(\alpha_1\beta_1-\beta_2)]Y(t-2)+\\
&+[\alpha_2\beta_2-\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2]Y(t-3)-\alpha_2\beta_2 Y(t-4)+1\quad,\quad t=4,5,6,\ldots
\end{aligned}$$

alakú 4-edrendű állandó együtthatójú differenciaegyenletet.

Irodalom

[1] Hatvani László – Krisztin Tibor – Makay Géza , Dinamikus modellek a közgazdaságban. Polygon, Szeged, 2001, -210 old.

[2] Simonovits András, Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságban, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1998, - 311 old.

[3] Ligeti István – Sivák József, Növekedés, szabályozás és stabilitás a gazdasági folyamatokban, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1978, - 430 old.

[4] Rontó Miklós – Raisz Péterné, *Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. ,* Miskolci Egyetemi Kiadó , Miskolc, (2004), 323 old.