

VIII. Előadás (2020. Ápr. 16.)

(A) Veremautomata fogalma

A *veremautomata* kifejezésben, benne van az automata egy lényegi része, ami meghatározza a működését, ez az ún. „*verem*”. (Angol neve Stock automata vagy Push-down automata.) Működését az 1. Ábrán látható modell szemlélteti. Mint látjuk, ez egy input szalagból, egy mozgó fejből („véges kontroll”) és egy *veremnek* nevezett tárhelyből áll. Az input szalagra a Σ véges input ábécé betűivel írunk, a verembe pedig a Γ véges „veremábécé” betűivel. A fejnek csupán véges sok állapota lehet, amik a Q állapothalmazhoz tartoznak.

A fej mozgását a (q_i, a, Z_j) hármas határozza meg, ahol,

- q_i az automata aktuális állapota;
- $a \in \Sigma$, de lehet $a = \varepsilon$ (üres szó) is;
- Z_j a verem csúcsán található karakter.

Egy *tranzíciós lépés* általában $(q_i, a, Z_j) \rightarrow (q_k, \gamma)$ alakú, ahol $q_i, q_k \in Q$, $\gamma \in \Gamma^*$ pedig egy *veremszó*.

Működése: Az automata q_i állapotban és Z_j -vel a verem csúcsán beolvassa az $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ jelet, majd állapotát q_k -ra változtatja, Z_j -t a $\gamma = Z_1 Z_2 \dots Z_p$ veremszóval helyettesíti és eggyel jobbra lép a szalagon (γ általában nem tartalmaz háromnál több karaktert). γ lehet ε is, ekkor a $(q_i, a, Z_j) \rightarrow (q_k, \varepsilon)$ tranzíció azt jelenti hogy az automata csupán „törli” a verem csúcsát. Általában a (q_i, a, Z_j) hármas beolvasása után több válasz is lehetséges. A lehetséges válaszokat (tranzíciókat) egy utasításokat tartalmazó táblázat formájában szoktuk megadni (lásd Példa 1.).

A verem egyfajta kezdetleges memória, amiben a következő lépés meghatározásánál mindig csak az utolsó adatt, vagyis a *verem csúcsa* (Z_j) játszik szerepet. Z_0 a *verem aljának* a szimbóluma: a verem sohasem lehet üres - már induláskor rendelkeznie kell egy elemmel, ami Z_0

Példa 1. Zseton automata: Nevét onnan kapta, hogy a veremábécé betűit különböző színű zsetonok jelképezik (Kék, Zöld, Piros -amiket kezdőbetűikkel rövidítettünk), ezeket egy rúdra "húzzuk fel", amit majd megfordítunk - ez a rúd játsza a verem szerepét. Az automatának csak két állapota van: q_1 és q_2 . Az input szalagon az automata a 0, 1, illetve a c karaktert tudja beolvasni - működését az alábbi táblázatban adtuk meg:

Állapot	Felső Zseton	0	1	c
q_1	Kék	tegyél be egy kéket és maradj q_1 -ben	tegyél be egy zöldet és maradj q_1 -ben	Eredj q_2 -be
q_2		töröld a verem csúcsát és maradj q_2 -ben	—	—
q_1	ZöLd	tegyél be egy kéket és maradj q_1 -ben	tegyél be egy zöldet és maradj q_1 -ben vedd ki a verem csúcsát és maradj q_2 -ben	Eredj q_2 -be
q_2		—	—	—
q_1	Piros	tegyél be egy kéket és maradj q_1 -ben	tegyél be egy zöldet és maradj q_1 -ben	Eredj q_2 -be
q_2		* vedd ki a verem csúcsát anélkül hogy beolvasnád a köv. betűt	—	—

- Vegyük észre, hogy az, hogy az automata mit csinál a q_1 állapotban nem függ a színtől, vagyis a veremállapottól.
- A q_2 állapotban vagy nem csinál semmit, vagy törli a verem csúcsát.
- A c input jel hatására vagy nem csinál semmit, vagy q_1 állapotból q_2 -be megy.
- A $*$ válasz az ún. ε -os mozgást jelöli - ez azt jelenti hogy a fej nem mozdul el az input szallagon csak törli a verem csúcsát.
- Mivel bizonyos mezőkhöz a táblázatban egyetlen utasítás sem tartozik, egy $w \in (0 + 1 + c)^*$ input szó esetén a tranzíció akár meg is akadhat.

Formálisan egy verem automatát a köv. képpen adhatunk meg:

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

ahol

- Q az automata állapotainak véges halmaza;
- Σ input ábécé (véges, nem üres);
- Γ verem ábécé (véges, nem üres);
- $q_0 \in Q$ az automata kezdőállapota (Start állapota);
- $F \subseteq Q$ a végállapotok halmaza (lehet üres is!);
- $Z_0 \in \Gamma$ a verem aljának a szimbóluma (a verem „Start” szimbóluma), a memória kezdeti tartalmát jelenti;
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \longrightarrow \wp(Q \times \Gamma^*)$ ún. *tranzíciós függvény*.

Fontos megjegyezni, hogy δ általában egy többértékű leképezés (nem valódi függvény) - tehát ez a modell alapvetően *nondeterminisztikus*. δ alakja azt mutatja hogy $Q \times \Gamma^*$ egy részhalmazába képez le (ami lehet üres is ha a (q_i, a, Z_j) „hármast” nem szerepel δ megadásában). Valójában δ ilyen alakú:

$$\delta(q_i, a, Z) = \{(q_1, \gamma_1), \dots, (q_k, \gamma_k)\},$$

ahol $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma^*$ veremszavak és $Z \in \Gamma$.

Vegyük észre, hogy az 1. Példában, vagyis a „Zseton automata” esetén $\delta(q_i, a, Z)$ vagy egyelemű vagy $\emptyset$, végállapot pedig nincs kijelölve. Formálisan ezt az automatát így adhatjuk meg:

$$\mathcal{A} = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, c\}, \{P, K, Z\}, \delta, q_1, P, \emptyset) \text{ és}$$

$$\begin{aligned} \delta(q_1, 0, K) &= \{(q_1, KK)\}, \delta(q_1, 1, K) = \{(q_1, ZK)\}, \delta(q_1, c, K) = \{(q_2, K)\}, \\ \delta(q_2, 0, K) &= \{(q_2, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_1, 0, Z) &= \{(q_1, KZ)\}, \delta(q_1, 1, Z) = \{(q_1, ZZ)\}, \delta(q_1, c, Z) = \{(q_2, Z)\}, \\ \delta(q_2, 1, Z) &= \{(q_2, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_1, 0, P) &= \{(q_1, KP)\}, \delta(q_1, 1, P) = \{(q_1, ZP)\}, \delta(q_1, c, P) = \{(q_2, P)\}, \\ \delta(q_2, \varepsilon, P) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \text{ (*utasítás).} \end{aligned}$$

Megjegyzés 1. Ha az eredmény egyetlen pár, akkor a halmazjelet gyakran elhagyjuk, így pl. ezt írjuk: $\delta(q_1, 1, Z) = (q_1, ZZ)$. A verem csúcsa ebben az írásmódban mindig a veremszó jobboldalán (befelé) van. Pl. a (q_1, ZK) pár esetén a verem csúcsán Z van.

(B) A működés folyamatos leírása

- Ennek a lényege hogy a teljes inputállapotot és teljes veremállapotot feltüntetjük - lásd a 2. Ábrát: It az input szallagon a $v = aw \in \Sigma^*$ szót, a veremben pedig egy $Z\gamma$ alakú szót láthatunk (Z a verem csúcsa, $\gamma \in \Gamma^*$ veremszó utolsó karaktere pedig Z_0).

Most a $(q_i, a, Z) \rightarrow (q_j, \beta)$ tranzíciós lépés esetén a teljes állapotban bekövetkezett változást jegyezzük le, így most egy lépés:

$$(q_i, aw, Z\gamma) \vdash (q_j, w, \beta\gamma).$$

Ez azt jelenti hogy az automata az aw inputszóból beolvassa az a betűt, állapotát q_i -ről q_j -re változtatja, a verem csúcsán lévő $Z \in \Gamma$ betűt pedig egy $\beta \in \Gamma^*$ veremszóval helyettesíti (pl. $\beta = Z_1 \dots Z_k$) és eggyel jobbra lép az input szallagon.

Több lépést is ábrázolhatunk:

$$(q_i, aw, Z\gamma) \vdash (q_j, w, \beta\gamma) \vdash \dots \vdash (q_v, w', \omega),$$

-egy ilyen jelsorozatot a továbbiakban röviden a $(q_i, aw, Z\gamma) \vdash^* (q_v, w', \omega)$ írásmóddal jelölünk.

*
 $\vdash$ jelentése: 0 vagy több (véges) számú lépés után.

Elfogadott nyelv. Az $\mathcal{A}$ veremautomata által elfogadott $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ nyelvet kétféleképpen is definiálhatjuk:

(1) A $w \in \Sigma^*$ szó az $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ nyelvhez tartozik, ha beolvasása után az $\mathcal{A}$ automata végállapotba jut és az input szallag kiürül:

- $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q_f, \varepsilon, \omega)$, ahol $q_f \in F$.
- (2) A $w \in \Sigma^*$ szó eleme az $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ nyelvnek, ha beolvasása után mind az input szalag, mind a verem kiürül, vagyis:
- $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q_k, \varepsilon, \varepsilon)$, ahol $q_k \in Q$ bármi lehet.

Az (1) esetben elfogadott szavak összességét *az automata végállapotai által elfogadott nyelvnek* nevezzük, a (2) esetben kapott szavak összességét (nyelvet) pedig *az automata üres verme által elfogadott nyelvnek*.

Példa 2.: A Zseton automata csak az üres verme által tud szavakat elfogadni, hiszen végállapotainak a halmaza üres. Igazolható hogy $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{wcw^R \mid w \in (0+1)^*\}$ -ahol w^R -el a w szó tükörképét jelöltük. Pl. 011 tükörképe: 110.

Valójában a fenti két elfogadási lehetőség egymással ekvivalens, mint ahogy azt az alábbi tétel is mutatja:

Tétel 1.(i) *Ha $L \subseteq \Sigma^*$ valamely $\mathcal{A}$ veremautomata végállapotai által elfogadott nyelv, akkor létezik egy olyan $\mathcal{A}^*$ veremautomata, ami ugyanazt az L nyelvet az üres verme által fogadja el.*

(ii) *Ha $L \subseteq \Sigma^*$ valamely $\mathcal{M}$ veremautomata üres verme által elfogadott nyelv, akkor létezik egy olyan $\mathcal{M}^*$ veremautomata, ami ugyanazt az L nyelvet a végállapotai révén fogadja el.*

Következmény: *Az előbbi eredmény feljogosít arra, hogy a veremautomaták által elfogadott nyelvek összességét egyetlen nyelvosztályként kezeljük (függetlenül attól, hogy ez az L nyelv az (1) vagy a (2) módon lett elfogadva). - Az alábbi tétel azt mutatja, hogy ez a nyelvosztály nem más, mint a környezetfüggetlen nyelvek osztálya.*

Tétel 2. *Az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv akkor és csakis akkor állítható elő egy $G = (V, T, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtannal, ha létezik olyan $\mathcal{M}$ veremautomata ami az L nyelvet elfogadja, vagyis $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$.*

A tételt itt nem bizonyítjuk.

(C) Determinisztikus és nondeterminisztikus veremautomaták

Azt mondjuk hogy $\mathcal{A}$ veremautomata *determinisztikus*, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

- (1) $\delta(q, a, Z)$ eredmény legfeljebb egyelemű halmaz lehet,
- (2) Ha valamely $q \in Q$ és $Z \in \Gamma$ párra a $\delta(q, \varepsilon, Z)$ utasítás értelmezett, akkor minden $a \in \Sigma$ -ra $\delta(q, a, Z) = \emptyset$. (Ez azt jelenti, hogy nincs olyan állapot-veremállapot pár, amire egyszerre lehetséges ε -os és nem ε -os mozgás is.)

A veremautomata *nondeterminisztikus*, ha fenti feltételek közül valamelyik nem teljesül.

Példa 3.: A Zseton automata determinisztikus - ellenőrizhető hogy mindkét feltételt teljesíti.

Megjegyzés 2. A veremautomata determinisztikus volta megengedi hogy δ ne minden (q, a, Z) „hármásra" legyen értelmezve - más szóval a $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma^*$ leképezés még ebben az esetben is csak egy *parciális függvény* (nem valódi függvény mint a DFA-nál).

Példa 4. Nondeterminisztikus veremautomatára

$\mathcal{M} := (\{q_1, q_2\}, \{0, 1, \varepsilon\}, \{R, B, G\}, \delta, q_1, Z_0, \emptyset)$, ahol

- | | |
|--|--|
| 1) $\delta(q_1, 0, Z_0) = \{(q_1, BZ_0)\}$ | 7) $\delta(q_2, 0, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ |
| 2) $\delta(q_1, 1, Z_0) = \{(q_1, GZ_0)\}$ | 8) $\delta(q_2, 1, G) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ |
| 3) $\delta(q_1, 0, B) = \{(q_1, BB), (q_2, \varepsilon)\}$ | 9) $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ |
| 4) $\delta(q_1, 1, B) = \{(q_1, GB)\}$ | 10) $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$ |
| 5) $\delta(q_1, 0, G) = \{(q_1, BG)\}$ | |
| 6) $\delta(q_1, 1, G) = \{(q_1, GG), (q_2, \varepsilon)\}$ | |

- Látható hogy 3) és 6) többértékű utasítások, így $\mathcal{M}$ nem teljesíti az (1) feltételt. A (q_1, Z_0) pár esetén értelmezve van $(q_1, 0, Z_0)$ -re és (q_1, ε, Z_0) -re is utasítás (az 1)-es illetve a 10)-es), tehát $\mathcal{M}$ a (2) feltételt sem teljesíti.
- Nyilvánvaló hogy $\mathcal{M}$ csak az üres verme által fogadhat el szavakat.
- Igazolható hogy $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{ww^R \mid w \in (0+1)^*\}$.

(D) Tranzíciós fa

A *tranzíciós fa* segítségével követhetjük nyomon egy $w \in \Sigma^*$ szó elfogadását egy $\mathcal{M}$ veremautomata esetén. Mivel mind az (1), mind a (2) feltétel megsértése egy-egy elágazást okoz a tranzíciós útvonalon, a tranzíciós lépéseket a kezdőállapottól indulva és lefelé haladva ábrázolva egy fa struktúrát kapunk. Ha mindkét szabály teljesül, azaz ha $\mathcal{M}$ determinisztikus, nincs elágazás az útvonalon, így minden $w \in \Sigma^*$ szó esetén egy láncot kapunk. (Nincs ellentmondás - minden lánc maga is egy speciális fa.)

Példa 5. Mutassuk meg most hogy a Példa 4.-ben szereplő $\mathcal{M}$ nondeterminisztikus automata elfogadja a $w = 001100$ bináris szót és adjuk meg az elfogadáshoz tartozó tranzíciós fát. Ezt az alábbi ábra szemlélteti a következő oldalon. Mivel a fa egyik ága akceptáló állapotban végződik (q_2, ε) -ban ami helyesen $(q_2, \varepsilon, \varepsilon)$, ezért a w szót az $\mathcal{M}$ veremautomata az üres verme által elfogadja (akárcsak az NFA-nál, az nem számít, hogy többi ág miben végződik).

